
Analyse I — Quiz : Notions élémentaires

Question 1

Soit X un ensemble non vide. La fonction identité $\text{id} : X \rightarrow X$ est bijective.

- A. Vrai
- B. Faux

Question 2

Soit $E = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x)=0$. Quelles assertions sont vraies ?

- 1. $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prolonge f .
- 2. La restriction de $\cos$ à E est constante.
- 3. La fonction nulle $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prolonge f .
- 4. $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prolonge f .

Question 3

Sur l'ensemble X des polygones du plan, on pose $P \sim Q$ si P et Q ont le même nombre de côtés. Que peut-on dire de $X/\sim$?

- A. La relation n'est pas une équivalence
- B. La relation est une équivalence et le quotient est infini
- C. La relation est une équivalence et le quotient est fini

Question 4

Soit $X = \{a, b, c, d\}$. Combien d'éléments possède l'ensemble des parties $P(X)$?

Question 5

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ rationnels, avec $b, d \neq 0$. À quelle condition $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$?

Question 6

Soient $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ avec $a+b \neq 0$. Calculer $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

- A. $a+b$
- B. $\frac{ab}{(a+b)}$
- C. $\frac{1}{(a+b)}$
- D. $\frac{(a+b)}{(ab)}$

Question 7

Soit $f: X \rightarrow Y$ et $x, x' \in X$ avec $f(x) \neq f(x')$. Que peut-on conclure ?

- A. $x = x'$
- B. $x \neq x'$

Question 8

Pour quelles valeurs de X et Y la fonction tangente $\tan: X \rightarrow Y$ est-elle surjective ?

- A. $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$
- B. $X =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, Y = \mathbb{R}$
- C. $X =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, Y = \mathbb{R}_+$

Question 9

Soit $X = \{0, 1, 2, 3\}$ et $A = \{(x, y) \in X \times X : x \leq y\}$. Quelle proposition est vraie ?

- A. $A \subseteq X$
- B. A est une relation binaire sur X
- C. A est une relation d'équivalence sur X

Question 10

Vrai ou faux ? Si $f: A \rightarrow B$ est injective, alors :

1. B contient plus de deux éléments.
2. L'image $f(A)$ est finie.
3. L'ensemble des $x \in A$ tels que $f(x) \in B$ possède au plus un élément.
4. Pour tous $x, x' \in A$, $f(x) = f(x')$ si et seulement si $x = x'$.
5. Pour tous $x, x' \in A$, $f(x) = f(x')$ seulement si $x = x'$.

Question 11

Pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$, laquelle des identités est toujours vraie ?

- A. $(a^b)^c = a^{bc}$
- B. $a - (b - c) = (a - b) - c$
- C. $a(bc) = (ba)c$

Question 12

Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels. Indiquer vrai ou faux.

1. $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{j=1}^n x_j$.
2. $\sum_{k=1}^n x_k = n x_k$.
3. $\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + \sum_{k=2}^n x_k$.
4. $\sum_{j=1}^n x_j \geq \sum_{k=1}^{n-1} x_k$.
5. $\sum_{j=1}^n x_j = x_n + \sum_{k=1}^{n-1} x_k$.
6. $(\sum_{j=1}^n x_j)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$.

Question 13

Soient $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow X$. Quelles sont les compositions bien typées ?

- A. $g \circ f: Y \rightarrow Y$ et $f \circ g: X \rightarrow X$
- B. $g \circ f: X \rightarrow X$ et $f \circ g: Y \rightarrow Y$
- C. $g \circ f = f \circ g$

Question 14

Calculer le produit $\prod_{i=1}^n (-1)^i$.

- A. $(-1)^n$
- B. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Question 15

Vrai ou faux ? Dans le développement binomial d'une puissance entière d'un binôme, le coefficient combinatoire du terme de degré 1 est entier.

- A. Vrai
- B. Faux

Question 16

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X . Si $C_x = C_y$, que peut-on conclure ?

- A. $x = y$
- B. $x \sim y$

Question 17

Vrai ou faux ? Si $7^n - 1$ est divisible par 6, alors $7^{n+1} - 1$ est également divisible par 6.

- A. Vrai
- B. Faux

Question 18

Soit $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. On définit $a \sim b$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$. Quelle proposition est correcte ?

- A. $\sim$ n'est pas une relation binaire sur X
- B. $\sim$ est une relation d'équivalence sur X
- C. $\sim$ est binaire, mais non équivalente

Question 19

Calculer 99^3 .

Question 20

Vrai ou faux ?

1. $\arcsin(\sin(\frac{5\pi}{8})) = \frac{5\pi}{8}$.
2. $\arccos(\cos(\frac{5\pi}{8})) = \frac{5\pi}{8}$.

Question 21

Calculer le pgcd de 1291 et 331.

Question 22

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ injective. Indiquer vrai ou faux pour chacune des assertions.

1. f est croissante.
2. $f(x) = f(y)$ implique $x = y$.
3. Le graphe de f coupe chaque droite horizontale au plus une fois.
4. Le graphe de f peut être tracé sans lever le crayon.

Question 23

Soient $f(x)=x+1$ et $g(x)=x^2$. Calculer $(g \circ f)(x)$.

- A. $x^2 + 1$
- B. $x^2 + 2x + 1$

Question 24

Soit X un ensemble et $R=\{(x,y)\in X\times X : x=y\}$. R est-il le graphe d'une fonction $X\rightarrow X$?

- A. Oui
- B. Non

Question 25

Vrai ou faux ? Pour des nombres $a_1, \dots, a_n$, $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_{n-i+1}$.

- A. Vrai
- B. Faux

Question 26

Pour $n \geq 1$, calculer $\sum_{i=1}^n i$.

- A. n
- B. $\frac{n(n+1)}{2}$
- C. $\frac{n(n-1)}{2}$

Question 27

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux nombres rationnels égaux, avec b et d non nuls. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}.$$

- A. Vrai
- B. Faux

Question 28

Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ avec $x \leq y$. Quelle implication est toujours vraie ?

- A. $x^2 \leq y^2$
- B. $x^3 \leq y^3$

Question 29

Vrai ou faux ? Pour $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}$.

- A. Vrai
- B. Faux

Question 30

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux nombres rationnels ($b \neq 0, d \neq 0$). Calculer $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

- A. $\frac{(a+c)}{(bd)}$
- B. $\frac{(ad+bc)}{(bd)}$

Question 31

Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a \neq 0$. Quelle proposition est vraie ?

- A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $na \leq b$
- B. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na \geq b$

Question 32

Soit X un ensemble. Quelle proposition est vraie ?

- A. Toute relation binaire sur X définit une fonction $X \rightarrow X$
- B. Toute fonction $f: X \rightarrow X$ définit une relation binaire sur X

Question 33

Vrai ou faux ? Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1000n - 1$ est un multiple de 999.

- A. Vrai
- B. Faux

Question 34

Vrai ou faux ? Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble stable par multiplication : pour tous $x, y \in A$, on a $xy \in A$. Alors, pour tout $a \in A$ et tout entier $n \geq 1$, on a $a^n \in A$.

- A. Vrai
- B. Faux

Question 35

Pour tous $a, b, c \in \mathbb{N}$, quelle identité sur le pgcd est valable ?

- A. $\text{pgcd}(a+c, b+c) = \text{pgcd}(a, b) + c$
- B. $\text{pgcd}(ac, bc) = c \cdot \text{pgcd}(a, b)$
- C. $\text{pgcd}(ac, bc) = \text{pgcd}(a, b)$

Question 36

Soit a un nombre et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{i=0}^n a$.

- A. an
- B. na
- C. a
- D. $(n+1)a$

Question 37

Cocher la bonne réponse.

- A. $\{0, 1\} \neq \{1, 0\}$
- B. $\{0, 1\} = \{1, 0\}$

Question 38

On lance deux dés cubiques et on associe à chaque résultat la somme des faces. La fonction à valeurs dans $\{1, \dots, 12\}$ est-elle injective, surjective ou bijective ?

- A. Surjective
- B. Injective
- C. Bijective
- D. Ni injective ni surjective

Question 39

Pour quelles valeurs de X et Y la fonction $\ln : X \rightarrow Y$ est-elle surjective ? On utilise $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

- A. $X = \mathbb{R}^*, Y = \mathbb{R}$
- B. $X = \mathbb{R}_+, Y = \mathbb{R}$
- C. $X = \mathbb{R}_+^*, Y = \mathbb{R}$

Question 40

Soit X un ensemble. Choisir la proposition toujours vraie.

- A. $X \notin \mathcal{P}(X)$
- B. $X \in \mathcal{P}(X)$

Question 41

Soient $E \subseteq D$, E non vide, et $f : D \rightarrow Y$. Quelle propriété de la restriction $f|_E$ est correcte ?

- A. Elle n'existe pas toujours
- B. Il existe une unique restriction à E
- C. Il existe plusieurs restrictions

Question 42

La fonction sinus $\sin : X \rightarrow Y$ est surjective dans quel cas ?

- A. $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$
- B. $X = \mathbb{R}, Y = [-1, 1]$
- C. $X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], Y = \mathbb{R}$

Question 43

Soit $X = \{0, 1\}$. Les couples $(0, 1)$ et $(1, 0)$ sont-ils égaux ?

- A. Oui
- B. Non

Question 44

Comparer les trois puissances $a = 10^{10}$, $b = 9^{10}$ et $c = 10^9$.

- A. $a \leq b \leq c$
- B. $c \leq b \leq a$
- C. $c \leq a \leq b$
- D. $b \leq c \leq a$

Question 45

Soient A l'ensemble des multiples de 3, B l'ensemble des multiples de 6 et $C = \{3^n : n \in \mathbb{N}^*\}$.

Quelle inclusion est correcte ?

- A. $A=B \cup C$
- B. $A \subset B$
- C. $C \subset A \setminus B$
- D. $C = A \setminus B$

Question 46

Soient $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ injectives. Que peut-on dire de $g \circ f: X \rightarrow Z$?

- A. Bijective
- B. Injective
- C. Surjective

Question 47

Quelle assertion est correcte ?

- A. Si $10^n - 1$ est divisible par 9, alors $10^{n+1} - 1$ est divisible par 9.
- B. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $10^n + 1$ est divisible par 9.

Question 48

Vrai ou faux ? Pour $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^n (i^2 - 2i + 1) = \sum_{j=0}^{n-1} j^2$.

- A. Vrai
- B. Faux

Question 49

Soit $X = \{1, 2, 3\}$ et $R = \{(x, y) \in X \times X : x \leq y\}$. R est-il le graphe d'une fonction $X \rightarrow X$?

- A. Oui
- B. Non

Question 50

Soient $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ ($b, d \neq 0$). Calculer $(\frac{a}{b}) \cdot (\frac{c}{d})$.

- A. $\frac{ac}{(bd)}$
- B. $\frac{ad}{(bc)}$

Question 51

Déterminer le coefficient de x^3 dans $(x + \frac{1}{2})^5$.

Question 52

Soit $f: X \rightarrow Y$ bijective et supposons que X possède 37 éléments. Combien d'éléments Y possède-t-il ?

- A. Un nombre quelconque
- B. 37

Question 53

Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b, c, d\}$. Parmi les règles suivantes, lesquelles définissent une fonction $f: A \rightarrow B$?

1. Aucune fonction n'est possible car B a plus d'éléments que A .
2. $f(1)=d, f(3)=a, f(2)=a$.
3. $f(a)=d, f(b)=2, f(c)=3$.
4. $f(a)=1, f(b)=2, f(3)=c$.
5. $f(1)=f(2)=f(3)=d$.
6. $f(1)=c, f(2)=a, f(3)=f(1)$.
7. $f(1)=a, f(2)=b, f(3)=\{c, d\}$.

Question 54

Si $|X|=n$ et $|Y|=m$, combien d'éléments contient $X \times Y$?

- A. $n+m$ B. nm C. nm

Question 55

Si $f: A \rightarrow B$ n'est pas injective, indiquer vrai ou faux.

1. Elle est surjective.
2. Elle n'est pas bijective.
3. $f(x)=f(x')$ dès que $x \neq x'$.
4. Il existe au moins deux éléments distincts de A de même image.

Question 56

Pour $n \geq 4$ entier, choisir la proposition exacte.

- A. Il existe $n \geq 4$ tel que $n! \leq 2^n$.
B. Pour tout $n \geq 4$, $n! \geq 2^n$.

Question 57

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. À quelle condition $\frac{a}{b}$ appartient-il à $\mathbb{Z}$?

- A. Il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $a=cb$
B. Il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $b=ca$

Question 58

Soit $f: A \rightarrow B$. L'ensemble image de f est-il égal aux objets ci-dessous ? Indiquer vrai ou faux.

1. B .
2. Le graphe de f .
3. $\{y \in B : \text{il existe au plus un } x \in A \text{ avec } f(x)=y\}$.
4. $\{y \in B : y \text{ possède exactement un antécédent dans } A\}$.
5. $\{x \in A : f(x) \in B\}$.
6. $\{y \in B : y \text{ possède au moins deux antécédents}\}$.
7. $\{y \in B : \{x \in A : f(x)=y\} \neq \emptyset\}$.

Question 59

Soit $X = \{0, 1\}$. Parmi ces écritures, laquelle appartient à $X \times (X \times X)$?

- A. $(0, 1, 0)$
- B. $(0, (1, 0))$
- C. $((0, 1), 0)$

Question 60

Pour des ensembles X et Y , l'assertion $X \subseteq Y \Leftrightarrow P(X) \subseteq P(Y)$ est-elle vraie ?

- A. Vrai
- B. Faux

Question 61

Soit $f: X \rightarrow Y$ une fonction surjective. Quelle est la formulation correcte ?

- A. Il existe $y \in Y$ tel que $f(x) = y$ pour tout $x \in X$
- B. Pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$

Question 62

Si $C_x \neq C_y$ pour une relation d'équivalence $\sim$, lesquelles des assertions sont vraies ?

- A. $x = y$
- B. $x \sim y$
- C. x et y ne sont pas équivalents
- D. $x \neq y$

Question 63

Soient c une constante et $u_1, \dots, u_n$ des nombres. Simplifier $\prod_{i=1}^n (c u_i)$.

Question 64

Soit $f: X \rightarrow Y$ bijective. Cocher toutes les affirmations vraies.

1. Pour tout $y \in Y$, il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$.
2. Il existe $y \in Y$ tel que $f(x) = y$ pour tout $x \in X$.
3. f est injective et surjective.

Question 65

Soit $f: X \rightarrow Y$ injective. Quelle affirmation est correcte ?

- A. Tout $y \in Y$ possède un unique antécédent
- B. Tout $y \in Y$ possède au plus un antécédent
- C. Tout $y \in Y$ possède au moins un antécédent

Question 66

Dans un jeu de 52 cartes, deux cartes sont équivalentes lorsqu'elles ont la même enseigne (trèfle, pique, carreau, cœur). Combien d'éléments comporte le quotient ?

- A. 52 classes de 1 carte
- B. 4 classes de 13 cartes
- C. 13 classes de 4 cartes