
Analyse I — Quiz : Notions élémentaires

Quiz — Corrigé

Question 1

Vrai : chaque élément est son propre antécédent unique.

Question 2

1 et 3 seulement. $\sin(k\pi)=0$, $\cos(k\pi)=(-1)^k$.

Question 3

La relation est une équivalence ; il existe une classe par nombre de côtés $n \geq 3$, donc une infinité.

Question 4

16, car un ensemble à 4 éléments possède 2^4 parties.

Question 5

Si et seulement si $ad = bc$.

Question 6

$$\frac{ab}{(a+b)}.$$

Question 7

$x \neq x'$: une fonction associe la même image à deux écritures égales du même élément.

Question 8

La deuxième. La tangente parcourt tout $\mathbb{R}$ sur cet intervalle.

Question 9

La deuxième. $A \subseteq X \times X$ mais la relation n'est pas symétrique.

Question 10

1 Faux, 2 Faux, 3 Faux, 4 Vrai, 5 Vrai. Les propriétés 4 et 5 expriment l'injectivité.

Question 11

La troisième : $a(bc) = abc = (ba)c$ (associativité et commutativité).

Question 12

1 Vrai ; 2 Faux ; 3 Vrai ; 4 Faux ; 5 Vrai ; 6 Faux. Dans 1, le nom de l'indice muet n'influe pas sur la somme. Dans 2, la somme n'est égale à $n x_k$ que si tous les termes sont égaux à x_k . La proposition

3 isole le premier terme et 5 isole le dernier. Pour 4, le signe de x_n est quelconque ; pour 6, les termes croisés manquent en général.

Question 13

La deuxième proposition.

Question 14

$(-1)^{n(n+1)/2}$, puisque $1 + \dots + n = n(n+1)/2$.

Question 15

Vrai : le coefficient binomial correspondant est un entier.

Question 16

$x \sim y$; l'égalité des classes n'impose pas celle des représentants.

Question 17

Vrai. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $7^{n+1} - 1 = 7(7^n - 1) + 6$. Si 6 divise $7^n - 1$, il divise $7(7^n - 1)$, ainsi que 6, donc il divise aussi $7^{n+1} - 1$.

Question 18

C'est une relation d'équivalence : elle est réflexive, symétrique et transitive.

Question 19

$99^3 = 970\,299$, car $99^2 = 9\,801$ et $9\,801 \times 99 = 970\,299$.

Question 20

1 Faux : $\arcsin(\sin(\frac{5\pi}{8})) = \frac{3\pi}{8}$. 2 Vrai, car $\frac{5\pi}{8} \in [0, \pi]$.

Question 21

1. Algorithme d'Euclide : $1291 = 3 \cdot 331 + 298$; $331 = 298 + 33$; $298 = 9 \cdot 33 + 1$; donc $\text{pgcd} = 1$.

Question 22

1 Faux ; 2 Vrai ; 3 Vrai ; 4 Faux. L'injectivité n'impose pas croissance ni continuité.

Question 23

$(g \circ f)(x) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Question 24

Oui. Il s'agit du graphe de l'identité de X .

Question 25

Vrai : l'ordre de sommation est inversé.

Question 26

$n(n+1)/2$.

Question 27

Vrai, en élevant l'égalité initiale à la puissance n .

Question 28

La seconde. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Question 29

Vrai : on remplace i par $j + 1$.

Question 30

$\frac{(ad + bc)}{(bd)}$. On réduit les deux fractions au dénominateur commun bd .

Question 31

La deuxième, par propriété archimédienne.

Question 32

La deuxième : le graphe d'une fonction est une relation.

Question 33

Vrai, puisque $a^n - 1$ est divisible par $a - 1$ (y compris pour $n=0$: 0 est divisible par 999).

Question 34

Vrai. Par récurrence sur $n \geq 1$: pour $n = 1$, $a^1 = a \in A$. Si $a^n \in A$, la stabilité par multiplication donne $a^{n+1} = a^n \cdot a \in A$. L'hypothèse $n \geq 1$ est importante : si $n = 0$, il faudrait aussi supposer $1 \in A$.

Question 35

La deuxième, sous la convention $c \geq 0$.

Question 36

$(n+1)a$: il y a $n+1$ termes.

Question 37

La deuxième : l'ordre n'intervient pas dans un ensemble.

Question 38

Ni injective ni surjective : la somme 1 est impossible et plusieurs couples ont la même somme.

Question 39

Réponse C uniquement, avec la convention $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, choisir $x = e^y > 0$ donne $\ln(x) = y$: l'application $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective. La fonction n'est pas définie en 0, donc la proposition B ne convient pas.

Question 40

$X \in \mathcal{P}(X)$, car $X \subseteq X$.

Question 41

Il existe exactement une restriction $f|_E : E \rightarrow Y$.

Question 42

$X = \mathbb{R}$, $Y = [-1, 1]$.

Question 43

Non. Dans un couple ordonné, la position des éléments compte.

Question 44

$b = 9^{10} \approx 3,49 \cdot 10^9$; $c = 10^9$; $a = 10^{10}$. Donc $c < b < a$. À comparer à la version source pour les exposants exacts.

Question 45

Réponse C . Par définition $C = \{3^n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Chaque 3^n est multiple de 3 et impair, donc n'est pas multiple de 6. Ainsi $C \subset A \setminus B$. Le cas $3^0 = 1$ est exclu explicitement.

Question 46

Injective, car la composition de deux injections est injective.

Question 47

Réponse A uniquement. On a $10^{n+1} - 1 = 10(10^n - 1) + 9$: si 9 divise $10^n - 1$, il divise le membre de droite, donc $10^{n+1} - 1$. La proposition B est fausse car $10 \equiv 1 \pmod{9}$, d'où $10^n + 1 \equiv 2 \pmod{9}$.

Question 48

Vrai : $i^2 - 2i + 1 = (i-1)^2$ et $j = i-1$.

Question 49

Non : pour $x=1$, plusieurs valeurs y conviennent.

Question 50

$\frac{ac}{(bd)}$.

Question 51

$$C(5,3)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Question 52

37. Une bijection établit une correspondance un à un.

Question 53

Réponses 2, 5 et 6. Dans chacun de ces trois cas, chaque élément de $A = \{1, 2, 3\}$ reçoit une unique image dans B . L'option 5 définit la fonction constante $f(1) = f(2) = f(3) = d$. Les autres règles ne définissent pas une application $A \rightarrow B$.

Question 54

nm : n choix pour la première composante et m pour la seconde.

Question 55

F, V, F, V.

Question 56

Réponse B uniquement. Montrons par récurrence que $n! > 2^n$ pour tout $n \geq 4$. Initialisation : pour $n = 4$, on a $4! = 24 > 16 = 2^4$. Hérédité : supposons $n! > 2^n$ pour un $n \geq 4$. Alors $(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, puisque $n+1 > 2$. Par récurrence, $n! > 2^n$ pour tout $n \geq 4$. L'option B est donc vraie et l'option A fausse.

Question 57

La première.

Question 58

Propositions 1 à 6 : fausses en général ; proposition 7 : vraie. En effet, $\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in B : \text{il existe } x \in A \text{ tel que } f(x) = y\}$. La proposition 4, désormais formulée avec « exactement un antécédent », est fausse : un point de l'image peut avoir plusieurs antécédents.

Question 59

$(0, (1, 0))$: le deuxième élément est un couple de $X \times X$.

Question 60

Vrai. Pour la réciproque, $X \in \mathcal{P}(X)$, donc $X \in \mathcal{P}(Y)$.

Question 61

La deuxième proposition est la définition de la surjectivité.

Question 62

Les deux dernières. Deux classes distinctes correspondent à des éléments non équivalents, donc distincts.

Question 63

$$c^n \prod_{i=1}^n u_i.$$

Question 64

Les propositions 1 et 3.

Question 65

La deuxième.

Question 66

4 classes, chacune constituée des 13 cartes d'une enseigne.