
Analyse I — Quiz : Nombres Réels

Question 1

Soit $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}$. Identifier C .

- A. $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$
- B. $[\sqrt{2}, +\infty)$
- C. $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, +\infty)$

Question 2

Soient $a = \frac{1}{2^{10}}$ et $b = 3^{10}$. Quel est le plus petit entier n vérifiant $na > b$?

- A. 6^{10}
- B. $6^{10} - 1$
- C. $6^{10} + 1$
- D. $2 \cdot 6^{10}$

Question 3

Quelles assertions sur la densité sont vraies ?

- A. Tout sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- B. Tout sous-ensemble dense dans $\mathbb{R}$ est infini.
- C. $\mathbb{R}$ est dense dans lui-même.
- D. Si E est dense dans $\mathbb{R}$ et $E' \subset E$, alors E' est dense dans $\mathbb{R}$.
- E. Si E est dense dans $\mathbb{R}$, chaque intervalle $]x, y[$ avec $x < y$ contient une infinité de points distincts de E .

Question 4

Quelles égalités sont vraies ?

- A. $\sqrt{9} = \pm 3$.
- B. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = x$.
- C. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Question 5

Quelles inégalités ou égalités sont vraies pour les réels indiqués ?

- A. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| = |x| - |y|$.
- B. Pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $|(-x)^n| = |x|^n$.
- C. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| \leq |x| - |y|$.
- D. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| \leq |x| + |y|$.

Question 6

Quelles assertions sont vraies (avec $\text{dist}(x, y) = |x - y|$) ?

- A. Si $\text{dist}(x, y) > 0$, alors $x \neq y$.
- B. Si $x \geq a$ et $|y| \leq \frac{a}{2}$, alors $x + y \geq \frac{a}{2}$.
- C. Si $x < y$, alors $\text{dist}(x, y) < 0$.
- D. Si $x < z < y$, alors $\text{dist}(x, z) < \text{dist}(x, y)$.
- E. Si $y = \frac{x}{2}$, alors $\text{dist}(x, y) = \frac{x}{2}$.
- F. Si $\text{dist}(x, y) = \alpha$ et $\text{dist}(y, z) = \beta$, alors $\text{dist}(x, z) = \alpha + \beta$.
- G. Si $x < z < y$, alors $\text{dist}(x, y)^2 \leq \text{dist}(x, z)^2 + \text{dist}(z, y)^2$.
- H. Si $\text{dist}(x, y) \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors $x = y$.

Question 7

Soit $A \subset \mathbb{R}$ ouvert. Quelles assertions sont nécessairement vraies ?

- A. A est borné.
- B. Si $x, y \in A$ et $x < z < y$, alors $z \in A$.
- C. Pour tout $x \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - 2\varepsilon, x + 2\varepsilon[\subset A$.
- D. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$.
- E. Si $B \subset A$ est ouvert, alors $A \setminus B$ est ouvert.
- F. A est réunion d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts.

Question 8

Pour les réels concernés, déterminer les propositions vraies.

- A. Si $x \leq y$ et $a \leq b$, alors $\frac{x}{a} \leq \frac{y}{b}$.
- B. Si $0 < a < b$, alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
- C. Si $x \leq y$ et $a \leq b$, alors $ax \leq by$.
- D. Si $x < y + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors $x \leq y$.
- E. Si $x_k \leq a$ pour $k = 1, \dots, n$, alors $\max\{x_1, \dots, x_n\} \leq a$.

Question 9

Quelles assertions sont correctes ?

- A. $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- B. $\pi \in \mathbb{Q}$
- C. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x^3 \notin \mathbb{Z}$.
- D. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\frac{1}{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Question 10

Quels sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ne sont ni ouverts ni fermés ?

- A. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$
- B. $\{1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$
- C. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 4\}$

D. $\mathbb{Z}$

E. $\{x \in \mathbb{R}^*: x \leq 10\}$

Question 11

Soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x > 0$. Existe-t-il $n \in \mathbb{N}^*$ avec $\frac{1}{n} \leq x$?

A. Vrai

B. Faux

Question 12

Quels sous-ensembles de $\mathbb{R}$ sont fermés ?

A. $\{x \in \mathbb{R}: x^2 = 1\}$

B. $\{1/(n+1): n \in \mathbb{N}\}$

C. $\{x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 4\}$

D. $\mathbb{Z}$

E. $\{x \in \mathbb{R}: x^3 - 2x^2 - x + 2 \neq 0\}$

Question 13

Soit D l'ensemble des rationnels à développement décimal fini. D est-il un corps ?

A. Oui

B. Non

Question 14

Soit $A = \{a + b\sqrt{2}: a, b \in \mathbb{Q}\}$. Quelles assertions sont vraies ?

A. A est dénombrable.

B. A est un intervalle.

C. $A \subset \mathbb{Q}$.

D. A , muni des opérations habituelles, est un corps.

Question 15

Quels ensembles sont dénombrables (au sens au plus dénombrables) ?

A. $\{1/(n+1): n \in \mathbb{N}\}$

B. $\mathbb{R}/\sim$, où $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

C. L'ensemble des nombres premiers.

D. Un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

E. La réunion de deux ensembles dénombrables.

Question 16

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des intervalles ?

A. $\mathbb{Q}$

B. $\{x \in \mathbb{R}: |x| \leq 10^{100}\}$

C. $\{x \in \mathbb{R}: x^2 > 0\}$

D. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

E. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0\}$

Question 17

Quels ensembles ne sont ni ouverts ni fermés ?

A. $\mathbb{R} \setminus \{0,1,2\}$

B. D , l'ensemble des réels à écriture décimale finie

C. $\mathbb{R}$

D. $\mathbb{N}$

E. $\mathbb{Q} \cap (0,1)$

Question 18

Soit $A = \{(-0,5)^n + 1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$. Quelle assertion est exacte ?

A. $\inf A = -1$ et $\sup A = 1$

B. $\inf A = 0$ et $\sup A = 1$

C. $\inf A = 0 = \min A$ et $\sup A = 2 = \max A$

D. A n'est ni minoré ni majoré.**Question 19**

Soit $A = \{2 + \frac{1^n}{3} : n \in \mathbb{N}\}$. Quelles assertions sont vraies ?

A. A est fini.B. A n'est pas borné.

C. $\sup A = \max A = 3$.

D. $\inf A = 2$.

E. $\inf A \in A$.

Question 20

Quelles assertions sur les produits sont correctes ?

A. Le produit de deux rationnels est toujours rationnel.

B. Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est toujours rationnel.

C. Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est toujours irrationnel.

D. Le produit de deux irrationnels est toujours irrationnel.

Question 21

Soit $A = \{x \in \mathbb{R} : -x \leq 1\}$. Identifier A .

A. $(-\infty, -1]$

B. $[-1, +\infty)$

C. $[-1, 1]$

Question 22

Soit $B = \{(-1)^n + 1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$. Quelle assertion est exacte ?

- A. $\inf B = -2$ et $\sup B = 1$
- B. $\inf B = -1$ et $\sup B = 2$
- C. $\min B = -1$ et $\max B = 2$
- D. B n'est ni minoré ni majoré.

Question 23

Soient $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $a \leq b$. A-t-on nécessairement $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$?

- A. Vrai
- B. Faux

Question 24

Soit $B = \{\cos(n\pi/4) : n \in \mathbb{N}\}$. Quelles assertions sont vraies ?

- A. B possède un nombre fini d'éléments.
- B. $B \subset \mathbb{Q}$.
- C. B possède un nombre infini d'éléments.
- D. $B \subset \mathbb{R}$.

Question 25

Pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, quelles égalités sont vraies ?

- A. $1/|x^n| = (1/|x|)^n$
- B. $1/|x^n| = \left(\frac{1}{x}\right)^n$
- C. $1/|x^n| = \left|\frac{1}{x}\right|^n$
- D. $1/|x^n| = \frac{1^n}{x}$

Question 26

Soit $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$. Identifier B .

- A. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- B. $(-\infty, \sqrt{2}]$
- C. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Question 27

Quels ensembles sont bornés ?

- A. $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$
- B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- C. $\{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$
- D. $\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : -2 \leq x \leq 2\}$

Question 28

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. Si M ne majore pas A , laquelle des assertions est vraie ?

- A. M minore A .
- B. $x < M$ pour tout $x \in A$.
- C. Il n'existe aucun $x \in A$ tel que $x = M$.
- D. Il existe $x \in A$ tel que $x > M$.
- E. A contient des éléments arbitrairement grands.

Question 29

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, quelles propositions sont vraies ?

- A. $|x| \geq 0$.
- B. $|x + y| = |x| + |y|$.
- C. $|\lambda x| = \lambda|x|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 30

Quels ensembles sont minorés ?

- A. $\mathbb{N}$
- B. $\mathbb{Z}$
- C. $\mathbb{Q}$
- D. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

Question 31

Quelle assertion résulte de la propriété archimédienne de $\mathbb{R}$?

- A. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^{-n} < \varepsilon$.
- B. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^{-n} < \varepsilon$.
- C. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon \neq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^{-n} < \varepsilon$.

Question 32

Quels sous-ensembles de $\mathbb{R}$ sont ouverts ?

- A. $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
- B. $\{1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$
- C. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 4\}$
- D. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Question 33

Soit $C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} < 1\}$. Quelles assertions sont vraies ?

- A. C est un intervalle.
- B. C est ouvert dans $\mathbb{R}$.
- C. C est borné.
- D. C est majoré.
- E. C est minoré.

Question 34

Quels ensembles sont des intervalles ?

- A. $\{x \in \mathbb{R}^*: x^2 \leq 9\}$
- B. $\{x \in \mathbb{R}: x^3 \geq 8\}$
- C. $\{x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 9\}$
- D. $\{x \in \mathbb{R}^*: x^2 \leq 9\} \cap (1,3)$

Question 35

Soit D l'ensemble des nombres à développement décimal fini. Quelles assertions sont vraies ?

- A. D est un intervalle.
- B. D est dénombrable.
- C. $D \subset \mathbb{Q}$.
- D. D , muni de $+$ et $\cdot$ usuels, est un corps.

Question 36

Soient $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ tels que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$. Quelle proposition est toujours vraie ?

- A. $\frac{d}{c} \leq \frac{b}{a}$
- B. $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ pour tout $\frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$

Question 37

Pour justifier l'existence d'une solution à $x^2 = 2$ dans $\mathbb{R}_+$, quelle méthode constitue une démonstration valide ?

- A. Lire 1,41421356... sur une calculatrice.
- B. Écrire $x = \sqrt{2}$ après avoir supposé qu'une solution existe.
- C. Utiliser la complétude de $\mathbb{R}$ (par exemple en considérant la borne supérieure de $\{t \geq 0: t^2 < 2\}$).

Question 38

Quelle formulation est une propriété archimédienne de $\mathbb{R}$?

- A. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $ny > x$.
- B. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.
- C. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

Question 39

Que signifie que le corps ordonné $\mathbb{Q}$ est archimédien ?

- A. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $ny > x$.
- B. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, $x > y$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx < y$.
- C. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.
- D. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

Question 40

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $C = \{x \in \mathbb{R} : ax \leq 1\}$. Quelle assertion est exacte ?

- A. Pour tout $a \neq 0$, $\inf C = -\infty$ et $\sup C = +\infty$.
- B. Si $a < 0$, $\inf C = \frac{1}{a}$ et C n'est pas majoré.
- C. Pour tout $a \neq 0$, C n'est ni minoré ni majoré.

Question 41

Quelles assertions générales sont vraies ?

- A. La réunion de deux intervalles est toujours un intervalle.
- B. La réunion de deux ouverts est ouverte.
- C. La réunion de deux fermés est fermée.
- D. L'intersection de deux ensembles non bornés est non bornée.

Question 42

Soit $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$. Quelle assertion est exacte ?

- A. A n'a pas d'infimum mais possède un minimum.
- B. A ne possède ni minimum ni infimum.
- C. A ne possède pas de minimum mais admet un infimum.

Question 43

Soit $a > 0$. Quelles assertions sont toujours vraies ?

- A. Si $x \leq a$, alors $|x| \leq a$.
- B. Si $x > a$, alors $|x| > a$.
- C. Si $|x| \leq a$, alors $x = a$ ou $-a < x < a$.

Question 44

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré, $s = \sup A$. Quelles assertions sont vraies ?

- A. s est le plus grand élément de A .
- B. Il existe $L > 0$ tel que $x \geq s - L$ pour tout $x \in A$.
- C. Tout $M \geq s$ majore A .
- D. $s \in A$.
- E. $s \notin A$.
- F. L'ensemble des majorants de A possède un minimum.
- G. L'ensemble des majorants de A est majoré.
- H. A contient un nombre fini d'éléments.
- I. Si $x \leq \beta$ pour tout $x \in A$, alors $s \leq \beta$.

Question 45

Pour $x \in \mathbb{Q}$, l'équivalence $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x^2 \in \mathbb{Z}$ est-elle vraie ?

- A. Vrai
- B. Faux

Question 46

Parmi les ensembles suivants, lesquels possèdent un minimum ?

- A. $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$
- B. $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$
- C. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1\}$
- D. $\{x \in \mathbb{R} : x^3 \leq 1\}$

Question 47

Quel est le plus grand sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ tel que $|x - 2| \leq |x + 3|$ pour tout $x \in A$?

- A. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$
- B. $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$
- C. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$
- D. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

Question 48

Soit p un nombre premier. Quelle proposition est vraie ?

- A. Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $x^2 \neq p$.
- B. Il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 = p$.

Question 49

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x| \neq |y|$. Quelle assertion est vraie ?

- A. $1/(|x| + |y|) \geq 1/|x + y|$
- B. $1/(|x| + |y|) \leq 1/|x + y|$
- C. $1/|x| + 1/|y| \leq 1/|x + y|$

Question 50

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Quelles assertions sont vraies ?

- A. f n'est ni injective ni surjective.
- B. f est injective.
- C. $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+$
- D. Il existe $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $(f \circ g)(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Question 51

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non ouvert. Quelle assertion est nécessairement vraie ?

- A. A est fermé.
- B. Le complémentaire de A est ouvert.
- C. Il existe $x \in A$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\not\subset A$.

- D. Pour tout $x \in A$, aucun voisinage ouvert de x n'est inclus dans A .
E. Le complémentaire de A n'est pas ouvert non plus.

Question 52

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, lesquelles des assertions sont vraies ?

- A. Il existe un rationnel y tel que $0 < |x - y| \leq \frac{1}{10^n}$.
B. Il existe un irrationnel y tel que $0 < |x - y| \leq 1/10^n$.
C. Il existe une infinité de rationnels y vérifiant $0 < |x - y| \leq 1/10^n$.
D. Il existe une infinité d'irrationnels y vérifiant $0 < |x - y| \leq 1/10^n$.

Question 53

Vrai ou faux ?

- A. Il existe un réel strictement positif plus petit que tous les autres réels strictement positifs.
B. Tout nombre réel possède un successeur immédiat.

Question 54

Vrai ou faux ?

- A. Si $x > 0$, alors $|\sin x| = \sin x$.
B. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x^2 + x + 1| = x^2 + x + 1$.
C. $|\cos 8| = \cos 8$.

Question 55

Pour quelles applications $f(x) = \sqrt{x}$ est-elle bien définie ?

- A. $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}$
B. $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
C. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
D. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Question 56

Quelles assertions sur les sommes sont correctes ?

- A. La somme d'un irrationnel et d'un rationnel est toujours irrationnelle.
B. La somme de deux irrationnels est toujours irrationnelle.
C. La somme de deux rationnels est toujours rationnelle.
D. La somme d'un irrationnel et d'un rationnel est toujours rationnelle.