
Analyse I — Quiz : Nombres Complexes

Question 1

Soit $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = \prod (z - z_i)$. Est-il vrai que $\sum_{k=0}^n a_k = \prod_{j=1}^n (1 - z_j)$, en posant $a_n = 1$?

- ☐ A. Vrai
- ☐ B. Faux

Question 2

Soient $x, y \in \mathbb{C}$ et $x \neq 0$. Quelle affirmation est vraie ?

- ☐ A. Il existe n avec $nx \geq y$ (ordre usuel de $\mathbb{C}$).
- ☐ B. Il existe n avec $|x^n| \geq |y|$.
- ☐ C. Il existe n avec $n|x| \geq |y|$.
- ☐ D. Il existe n avec $n|x| \leq |y|$.

Question 3

Si z_1 et z_2 sont les racines de $z^2 - i = 0$, quelle relation est nécessaire ?

- ☐ A. $z_2 = -\overline{z_1}$
- ☐ B. $z_2 = \overline{z_1}$
- ☐ C. $z_2 = -z_1$

Question 4

Résoudre $z^2 = 3 - 4i$.

- ☐ A. $\{2 + i, -2 + i\}$
- ☐ B. $\{2 - i, -2 + i\}$
- ☐ C. $\{2 - i, -2 - i\}$

Question 5

Résoudre $z^2 = -2i$.

- ☐ A. $\{1 + i, -1 + i\}$
- ☐ B. $\{1 - i, -1 - i\}$
- ☐ C. $\{1 - i, -1 + i\}$

Question 6

Déterminer les racines de $z^2 + 3z + 10i$.

- ☐ A. $\{-4 - 2i, 1 + 2i\}$
- ☐ B. $\{-4 + 2i, 1 - 2i\}$
- ☐ C. $\{4 + 2i, -1 - 2i\}$

Question 7

Combien de racines réelles et non réelles possède $x^5 - 1$?

- ☐ A. Cinq réelles
- ☐ B. Une réelle et quatre non réelles
- ☐ C. Trois réelles et deux non réelles

Question 8

Quelle factorisation réelle de $x^5 - 1$ est possible ?

- ☐ A. Seulement $(x - 1)$ fois un polynôme irréductible de degré 4.
- ☐ B. $(x - 1)$ fois deux polynômes réels de degré 2.
- ☐ C. Aucune factorisation.
- ☐ D. Un produit de cinq facteurs linéaires réels.

Question 9

Écrire $(1 + i)^4$ sous forme cartésienne.

- ☐ A. -4
- ☐ B. 4
- ☐ C. $-4i$

Question 10

Si z n'est pas un réel négatif ou nul, quelle relation d'arguments est valable (modulo 2π) ?

- ☐ A. $\arg(z) = \arg(z^{-1})$
- ☐ B. $\arg(z) = -\arg(z^{-1})$
- ☐ C. $\arg(z) = 1/\arg(z^{-1})$

Question 11

Choisir les propriétés vraies du module.

- ☐ A. Si $|z|=1$, alors $z=\pm 1$.
- ☐ B. $|z^n|=|z|^n$.
- ☐ C. $z \bar{z} \in \mathbb{R}$.

- ☐ D. $z^2 \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Question 12

Propriétés des racines n-ièmes.

- ☐ A. Si $a \neq 0$, $z^5 = a$ a exactement cinq solutions distinctes dans $\mathbb{C}$.
- ☐ B. Tout polynôme de degré 5 a cinq racines distinctes.
- ☐ C. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, $z^5 = a$ a cinq solutions distinctes.
- ☐ D. Les solutions de $z^n = 1$ ont toutes le même module ($n \geq 1$).

Question 13

Propriétés élémentaires des nombres complexes.

- ☐ A. $|z| \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- ☐ B. $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- ☐ C. $\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$.
- ☐ D. $\operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)$ pour tous z, w .

Question 14

Résoudre $z^3 = -i$ dans $\mathbb{C}$.

- ☐ A. $\{i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - i/2, \frac{\sqrt{3}}{2} - i/2\}$
- ☐ B. $\{i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + i/2, \frac{\sqrt{3}}{2} - i/2\}$

Question 15

Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, quelle identité est vraie ?

- ☐ A. $\bar{z}^n = n \bar{z}$
- ☐ B. $\bar{z}^n = |z|^n$
- ☐ C. $\bar{z}^n = (\bar{z})^n$

Question 16

À propos du module complexe, quelles propriétés sont vraies ?

- ☐ A. $|z| = |\bar{z}|$ pour tout z .
- ☐ B. $|z| = |z^{-1}|$ pour tout $z \neq 0$.
- ☐ C. $|z| \geq 0$.

- ☐ D. $|z| = \overline{z^{-1}}$ pour tout $z \neq 0$.

Question 17

Pour $n \geq 3$, quelles affirmations sont vraies ?

- ☐ A. La somme de deux racines n -ièmes de 1 est toujours une racine n -ième de 1.
- ☐ B. Les racines de $z^n = 1$ forment un polygone régulier à n côtés.
- ☐ C. Si $z^n = 2$, alors $(z^2)^n = 2$.
- ☐ D. Si $z^n = 1$, alors $(z^2)^n = 1$.

Question 18

Si $\arg(z_1) = -\arg(z_2)$, avec $z_1, z_2 \neq 0$, quelle proposition est toujours vraie (à 2π près) ?

- ☐ A. $\arg(z_1 + z_2) = 0$
- ☐ B. $\arg(z_1 z_2) = 0$
- ☐ C. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$

Question 19

Pour $\varphi \in \mathbb{R}$, quelle est la nature de $\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)$?

- ☐ A. Toujours nul
- ☐ B. Imaginaire pur
- ☐ C. Réel

Question 20

Les identités suivantes sont-elles correctes ?

- ☐ A. $(1+i)(1-i)=2$
- ☐ B. $(i+1)(i+2)(i+3)=6-i$
- ☐ C. $1+i+i^2+\dots+i^{443}=0$

Question 21

Donner la forme exponentielle de $2\sqrt{3} - 2i$.

- ☐ A. $4e^{i\pi/6}$
- ☐ B. $4e^{-i\pi/6}$
- ☐ C. $2e^{-i\pi/6}$

Question 22

Soit $P(x)=x^4+1$ à coefficients réels. Quelles propositions sont vraies ?

- ☐ A. P n'a pas de racine réelle.
- ☐ B. P ne se factorise pas en facteurs linéaires réels.
- ☐ C. P ne se factorise pas en facteurs quadratiques réels.

Question 23

Calculer l'inverse multiplicatif de i .

- ☐ A. 1
- ☐ B. i
- ☐ C. $-i$
- ☐ D. $1+i$

Question 24

Donner la forme cartésienne de $e^{i\pi/4}$.

- ☐ A. i
- ☐ B. $(\frac{\sqrt{2}}{2})(1-i)$
- ☐ C. $1+i$
- ☐ D. $(\frac{\sqrt{2}}{2})(1+i)$

Question 25

Donner la forme exponentielle de $-1-i$.

- ☐ A. $\sqrt{2} e^{-i\pi/4}$
- ☐ B. $\sqrt{2} e^{3i\pi/4}$
- ☐ C. $\sqrt{2} e^{-3i\pi/4}$

Question 26

Éléments neutres de $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$. Cochez les propositions vraies.

- ☐ A. $(0, 0)$ est le neutre de l'addition.
- ☐ B. $(1, -1)$ est le neutre de l'addition.
- ☐ C. $(1, 0)$ est le neutre de la multiplication.
- ☐ D. $(0, 1)$ est le neutre de la multiplication.

Question 27

Dans $(9 + 5i)(2 - 7i) = a + bi$, trouver b.

- ☐ A. -53
- ☐ B. 53
- ☐ C. -43

Question 28

Déterminer un argument principal de $1 - i$.

- ☐ A. $-\frac{\pi}{2}$
- ☐ B. $\frac{\pi}{4}$
- ☐ C. $-\frac{\pi}{4}$

Question 29

Quelles factorisations de $z^4 + 1$ sont correctes ?

- ☐ A. $(z^2 + i)(z^2 - 1)$
- ☐ B. $(z^2 + i)(z^2 - i)$
- ☐ C. $(z^2 + 1)(z^2 - i)$
- ☐ D. $(z^2 + i)(z - (\frac{\sqrt{2}}{2})(1 + i))(z + (\frac{\sqrt{2}}{2})(1 + i))$

Question 30

Résoudre $z^4 = 1$ dans $\mathbb{C}$.

- ☐ A. $\{-1, 1\}$
- ☐ B. $\{-i, i\}$
- ☐ C. $\{-1, 1, -i, i\}$

Question 31

Dans $(3 + 2i)(3 - 2i) = a + bi$, trouver b.

- ☐ A. 0
- ☐ B. 12
- ☐ C. -12

Question 32

Écrire $\frac{(5+3i)}{(2+4i)}$ en forme cartésienne.

- ☐ A. $\frac{11}{10} - 7i/10$
- ☐ B. $\frac{7}{10} - 11i/10$
- ☐ C. $\frac{11}{10} + 7i/10$

Question 33

Factoriser $z^2 + 9$ dans $\mathbb{C}$.

- ☐ A. $(z - 3i)^2$
- ☐ B. $(z + 3i)(z - 3i)$
- ☐ C. $(z - 3)^2$

Question 34

Résoudre $z^3 = -1$ dans $\mathbb{C}$.

- ☐ A. $\{-1, \frac{1}{2} - (\frac{\sqrt{3}}{2})i, \frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2})i\}$
- ☐ B. $\{-1, -\frac{1}{2} - (\frac{\sqrt{3}}{2})i, -\frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2})i\}$

Question 35

Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$. Quelles affirmations sont vraies ?

- ☐ A. f est injective.
- ☐ B. f est surjective.
- ☐ C. f est une rotation.
- ☐ D. $f \circ f$ est l'identité.

Question 36

Déterminer les racines de $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

- ☐ A. $\{-\frac{1}{2} \pm (\frac{\sqrt{3}}{2})i, \frac{1}{2} \pm (\frac{\sqrt{3}}{2})i\}$
- ☐ B. $\{-1, 1, -i, i\}$
- ☐ C. $\{\pm(\frac{\sqrt{3}}{2}) \pm (\frac{1}{2})i\}$

Question 37

Écrire $(3 - 4i)^2$ sous la forme $a + bi$.

- ☐ A. $-7 - 24i$
- ☐ B. $7 - 24i$
- ☐ C. $-7 + 24i$

Question 38

Identités portant sur l'argument (dans le domaine où il est défini).

- ☐ A. $\text{Arg}(z+w) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$ toujours.
- ☐ B. $\text{Arg}(\lambda z) = \lambda \text{Arg}(z)$ pour tout réel λ .
- ☐ C. $\text{Arg}(z^{-1}) = -\text{Arg}(z)$ pour z non réel, avec argument principal.
- ☐ D. $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(|z|)$ pour tout $z \neq 0$.

Question 39

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $z = a + ai$ et $w = b + bi$. Déterminer zw .

- ☐ A. $2ab$
- ☐ B. $2abi$
- ☐ C. $ab + abi$

Question 40

Pour $z \in \mathbb{C}$, quelle égalité est correcte ?

- ☐ A. $\frac{1}{e^z} = e^{\bar{z}}$
- ☐ B. $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$
- ☐ C. $\frac{1}{e^z} = -e^z$

Question 41

Déterminer un argument principal de $1 + \sqrt{3}i$.

- ☐ A. $-\frac{\pi}{3}$
- ☐ B. $\frac{\pi}{3}$
- ☐ C. $\frac{\pi}{6}$

Question 42

Calculer le module de $3 + 4i$.

- ☐ A. 5
- ☐ B. 7
- ☐ C. 25

Question 43

Calculer $(2 + 3i)^{-1}$.

- ☐ A. $\frac{(1-i)}{13}$
- ☐ B. $\frac{(2-3i)}{13}$
- ☐ C. $2 - 3i$

Question 44

Propriétés des racines de l'unité.

- ☐ A. Si $z_1^3 = z_2^3 = 1$, alors $(z_1 z_2)^3 = 1$.
- ☐ B. Si $z_1^3 = z_2^3 = 2$, alors $(z_1 z_2)^3 = 2$.
- ☐ C. Si $z^5 = 1$, alors $(-z)^5 = 1$.
- ☐ D. Si $z^5 = 1$, alors z^2, z^3, z^4 sont aussi racines cinquièmes.
- ☐ E. Si $z^5 = 1$, alors $z^{-1} = z^4$.

Question 45

Soit $z = i$ et $A = \{z^n : n \in \mathbb{N}\}$. Combien A possède-t-il d'éléments ?

- ☐ A. Une infinité
- ☐ B. Quatre
- ☐ C. Un

Question 46

L'image par conjugaison du cercle $|z - z_0| = r$ est un cercle...

- ☐ A. de centre $-z_0$ et rayon r
- ☐ B. de centre $\bar{z}_0$ et rayon r
- ☐ C. de centre $\bar{z}_0$ et rayon $1/r$

Question 47

Soient $z = 1 + i$ et $w = 2 + 2i$. Déterminer zw .

- ☐ A. $2 + 2i$
- ☐ B. $4i$
- ☐ C. $3 + 3i$

Question 48

Résoudre $z^2 + 6iz + 8 = 0$. (Énoncé original : ses choix de réponses sont erronés.)

- ☐ A. $i(-3 + \sqrt{17}), i(-3 - \sqrt{17})$
- ☐ B. $1-3i, -1-3i$
- ☐ C. $1-3i, -1+3i$

Question 49

Calculer $\text{Im}((1 + i)^{1000})$.

- ☐ A. 0
- ☐ B. 1
- ☐ C. -1

Question 50

Calculer $|\exp(\ln 4 + i)|$.

- ☐ A. 1
- ☐ B. 4
- ☐ C. e^4

Question 51

Résoudre $z^2 + 4iz + 3 = 0$.

- ☐ A. $\{i(-2 + \sqrt{7}), i(-2 - \sqrt{7})\}$
- ☐ B. $\{1-2i, -1-2i\}$
- ☐ C. $\{1-2i, -1+2i\}$

Question 52

Donner la forme exponentielle de $-\sqrt{3} - i$.

- ☐ A. $e^{-2i\pi/3}$
- ☐ B. $2e^{-5i\pi/6}$
- ☐ C. $2e^{5i\pi/6}$

Question 53

Pour $n \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{C}$ non nul, combien de solutions distinctes possède $z^n = \omega$?

- ☐ A. Exactement n
- ☐ B. Une seule
- ☐ C. Au plus deux