
Analyse I — Nombres complexes

Corrigé

Question 1— A

Évaluer les deux expressions de $p(1)$.

Question 2— C

La propriété archimédienne s'applique aux réels positifs $|x|$ et $|y|$.

Question 3— C

Les racines carrées d'un complexe non nul sont opposées.

Question 4— B

$$(2 - i)^2 = 3 - 4i.$$

Question 5— C

$(1 - i)^2 = -2i$, et l'autre racine est son opposée.

Question 6— B

$$(z+4-2i)(z-1+2i) = z^2+3z+10i.$$

Question 7— B

$x \mapsto x^5$ est strictement croissante ; l'unique racine réelle est 1.

Question 8— B

Les quatre racines complexes non réelles se groupent en deux paires conjuguées.

Question 9— A

$(1 + i)^2 = 2i$, donc la puissance quatrième vaut -4 .

Question 10— B

L'inversion transforme $r e^{i\theta}$ en $r^{-1} e^{-i\theta}$.

Question 11— B, C

Multiplicativité du module et $z \bar{z} = |z|^2$.

Question 12— A, D

Pour $a = 0$, les cinq racines coïncident. Les racines de l'unité sont sur le cercle unité.

Question 13— A, C

Le module est positif ou nul et la partie imaginaire est additive, non multiplicative.

Question 14— A

Angles $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}$.

Question 15 (— C

La conjugaison commute avec la multiplication, donc avec les puissances entières.

Question 16— A, C

$|\bar{z}|=|z|$; $|z^{-1}|=1/|z|$.

Question 17— B, D

Les racines de l'unité sont régulièrement espacées ; $(z^2)^n = (z^n)^2$.

Question 18— B

Un argument du produit est la somme des arguments.

Question 19— C

La somme vaut $2 \cos \varphi$.

Question 20— A, C

Deuxième produit = $10i$; troisième somme a 444 termes, soit 111 blocs de quatre.

Question 21— B

Module 4 ; angle $-\frac{\pi}{6}$. Le i est indispensable dans l'exposant.

Question 22— A, B

$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$.

Question 23— C

$i(-i) = 1$.

Question 24— D

Formule d'Euler : $\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4})$.

Question 25— C

Module $\sqrt{2}$, argument $-\frac{3\pi}{4}$.

Question 26— A, C

Les neutres correspondent à 0 et à 1.

Question 27— A

Le produit vaut $53 - 53i$.

Question 28— C

Le point est dans le quatrième quadrant et $\tan \theta = -1$.

Question 29— B, D

Différence de deux carrés : $z^4 + 1 = (z^2 + i)(z^2 - i)$, avec $((\frac{\sqrt{2}}{2})(1+i))^2 = i$.

Question 30— C

Les quatre racines sont $e^{ik\pi/2}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Question 31— A

Produit conjugué : $9 + 4 = 13$, donc $b = 0$.

Question 32— A

Multiplication par le conjugué : $\frac{(22-14i)}{20}$.

Question 33— B

Les racines sont $\pm 3i$.

Question 34— A

Angles $(\pi + 2k\pi)/3$, pour $k = 0, 1, 2$.

Question 35— A, B, D

La conjugaison est une bijection involutive ; géométriquement, c'est une symétrie.

Question 36— A

Factoriser en $(z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1)$.

Question 37— A

$9 - 24i + 16i^2 = -7 - 24i$.

Question 38— C

L'argument principal de $\frac{1}{z}$ change de signe lorsque z n'est pas sur l'axe réel négatif.

Question 39— B

$ab(1 + i)^2 = 2abi$.

Question 40— B

La fonction exponentielle vérifie $e^z e^{\bar{z}} = 1$.

Question 41— B

Premier quadrant, $\tan \theta = \sqrt{3}$.

Question 42— A

$$\sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5.$$

Question 43— B

Multiplier numérateur et dénominateur par $2 - 3i$: $\frac{1}{(2 + 3i)} = \frac{(2 - 3i)}{13}$.

Question 44— A, D, E

On applique les règles des puissances.

Question 45— B

Les puissances de i sont périodiques de période quatre : $1, i, -1, -i$.

Question 46— B

La conjugaison est une isométrie du plan.

Question 47— B

$$(1 + i)(2 + 2i) = 2 + 4i - 2 = 4i.$$

Question 48— A

$$\Delta = (6i)^2 - 32 = -68, \text{ donc } z = (-6i \pm 2i\sqrt{17})/2 = i(-3 \pm \sqrt{17}).$$

Question 49— A

$(1 + i)^4 = -4$; la puissance 1000 est réelle.

Question 50 (— B

$$|e^{a+ib}| = e^a, \text{ donc } e^{\ln 4} = 4.$$

Question 51— A

$$\Delta = (4i)^2 - 12 = -28, \text{ donc } z = i(-2 \pm \sqrt{7}).$$

Question 52— B

Module 2 et argument $-\frac{5\pi}{6}$.

Question 53— A

$\omega \neq 0$ possède exactement n racines n -ièmes distinctes.