

ANALYSE I

Suites II

1. Sous suites

1.1 Définition et indexation

Une **sous-suite** de (u_n) est une suite (u_{n_k}) obtenue en choisissant une suite d'indices entiers strictement croissante :

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots.$$

Exemples d'indices.

Les choix $n_k = 2k$, $n_k = 2k + 1$, $n_k = k^2$ et $n_k = 3k + 2$ donnent des sous-suites, pour des valeurs de k compatibles avec le premier indice de la suite.

Attention. Une suite composée de valeurs prises par (u_n) n'est pas automatiquement une sous-suite: il faut fournir des indices strictement croissants. Répéter indéfiniment le même indice n'est pas autorisé.

Exemple

Soit $u_n = \sqrt{n}$ pour $n \geq 0$. Déterminons si les suites suivantes sont des sous-suites.

Suite proposée	Indexation ou justification
$v_k = k$	$n_k = k^2$: oui.
$v_k = k^2$	$n_k = k^4$: oui.
$v_k = 2^k$	$n_k = 4^k$: oui.
$v_k = \sqrt{2k+1}$	$n_k = 2k+1$: oui.
$v_k = \sqrt[3]{k}$	Non : pour $k=2$, il faudrait $n_k = 2^{\frac{2}{3}}$, qui n'est pas entier.
$v_k = \cos k$	Non : $\cos 2 < 0$ alors que tous les u_n sont positifs ou nuls.

1.2 Limite d'une sous suite

Proposition. Si $u_n \rightarrow l$, alors toute sous-suite (u_{n_k}) converge vers l . La même propriété vaut pour une limite égale à $+\infty$ ou à $-\infty$.

La réciproque est fausse : l'existence d'une seule sous-suite convergente ne prouve pas la convergence de la suite initiale. Pour $u_n = (-1)^n$, la sous-suite paire converge vers 1, mais la suite initiale diverge.

2. Utiliser les sous suites pour étudier une limite

2.1 Montrer qu'une suite diverge

Méthode. Extraire deux sous-suites ayant des limites différentes. Si la suite initiale avait une limite, ces deux sous-suites auraient la même limite, ce qui est impossible. Une sous-suite sans limite réelle suffit également à exclure une convergence réelle de la suite initiale.

Exemple.

Pour $u_n = 2 + (-1)^n + \frac{1}{n+1}$, on obtient

$$u_{2k} = 3 + \frac{1}{2k+1} \rightarrow 3, \quad u_{2k+1} = 1 + \frac{1}{2k+2} \rightarrow 1.$$

La suite diverge.

2.2 Réunir un nombre fini de sous suites

Théorème. Si $u_{2k} \rightarrow l$ et $u_{2k+1} \rightarrow l$, alors $u_n \rightarrow l$. Plus généralement, pour un entier $p \geq 2$ fixé, si toutes les sous-suites (u_{pk+r}) , avec $0 \leq r < p$, convergent vers le même réel l , alors (u_n) converge vers l .

Condition essentielle. Les sous-suites utilisées doivent couvrir tous les indices à partir d'un certain rang. Par exemple, connaître seulement $u_{3k} \rightarrow 0$ et $u_{3k+1} \rightarrow 0$ ne suffit pas : les termes u_{3k+2} peuvent tous valoir 1.

2.3 La méthode des classes modulo

Lorsqu'un terme contient $(-1)^n$, on commence souvent par les indices pairs et impairs. Avec $\sin(\frac{n\pi}{2})$ ou $\cos(\frac{n\pi}{2})$, on utilise les quatre classes modulo 4. Si plusieurs facteurs périodiques interviennent, on choisit une période commune.

Exemple.

Étudions la convergence de la suite

$$u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Le terme trigonométrique est périodique de période 4. On distingue donc quatre classes d'indices :

Indices	Expression de la sous-suite	Limite
$n = 4k, \quad k \geq 1$	$u_{4k} = \frac{1}{4k}$	0
$n = 4k+1, \quad k \geq 0$	$u_{4k+1} = 1 + \frac{1}{4k+1}$	1
$n = 4k+2, \quad k \geq 0$	$u_{4k+2} = \frac{1}{4k+2}$	0
$n = 4k+3, \quad k \geq 0$	$u_{4k+3} = -1 + \frac{1}{4k+3}$	-1

Conclusion. Les sous-suites (u_{4k+1}) et (u_{4k+3}) convergent respectivement vers 1 et -1. La suite (u_n) ne converge donc pas.

3. Points d'accumulation

3.1 Définition et caractérisation

Un réel x est un **point d'accumulation**, ou une valeur d'adhérence, de (u_n) s'il existe une sous-suite telle que $u_{n_k} \rightarrow x$. On note K l'ensemble de ces points.

Caractérisation. Un réel x appartient à K si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : |u_n - x| < \varepsilon.$$

Autrement dit, chaque voisinage de x contient des termes de la suite pour une infinité d'indices. Les valeurs de ces termes ne doivent pas nécessairement être distinctes : une suite constante a bien un point d'accumulation.

Négation. Pour montrer que x n'est pas un point d'accumulation, il suffit de trouver $\varepsilon_0 > 0$ et N tels que $|u_n - x| \geq \varepsilon_0$ pour tous les $n \geq N$.

3.2 Points d'accumulation et convergence

Si $u_n \rightarrow \ell$, alors $K = \{\ell\}$. La réciproque est vraie si la suite est bornée, mais elle est fausse sans cette hypothèse.

Contre-exemple

Posons $u_{2k} = 0$ et $u_{2k+1} = k+1$ pour $k \geq 0$. Le seul point d'accumulation réel est 0, mais la suite ne converge pas : les termes impairs tendent vers $+\infty$.

Une suite non bornée peut donc avoir un point d'accumulation. Elle peut aussi n'en avoir aucun, comme $u_n = n$. L'absence de point d'accumulation réel exclut toute convergence réelle.

Termes initiaux. Modifier ou supprimer un nombre fini de termes ne change ni les points d'accumulation, ni les limites inférieure et supérieure, ni le caractère de Cauchy.

4. Théorème de Bolzano Weierstrass

4.1 Énoncé

Théorème.

Toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente.

Le théorème garantit une existence ; il ne fournit pas nécessairement une formule pour les indices. Il ne garantit ni la convergence de la suite initiale, ni l'unicité du point d'accumulation.

4.2 Conséquences utiles

Suite bornée et unique point d'accumulation. Si (u_n) est bornée et $K = \{\ell\}$, alors $u_n \rightarrow \ell$.

Exemple

La suite $u_n = \cos(e^{3n} + n^2)$ est bornée par 1 en valeur absolue. Elle admet donc au moins un point d'accumulation dans $[-1, 1]$, même si cet argument ne calcule pas ce point et ne prouve pas la convergence.

Piège. Une suite bornée n'a pas nécessairement une sous-suite paire ou impaire convergente. Pour $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, on a $u_{2k} = (-1)^k$ et $u_{2k+1} = (-1)^k$: chacune de ces deux suites diverge. En revanche, une extraction plus fine fournit des sous-suites constantes.

5. Limites inférieure et supérieure

5.1 Supremum et infimum des queues

Pour une suite bornée, définissons

$$M_n = \sup\{u_k : k \geq n\}, \quad m_n = \inf\{u_k : k \geq n\}.$$

L'ensemble considéré est la queue de la suite à partir du rang n . Quand on avance d'un rang, cet ensemble devient plus petit. Son supremum ne peut pas augmenter et son infimum ne peut pas diminuer :

$$m_n \leq u_n \leq M_n, \quad M_{n+1} \leq M_n, \quad m_{n+1} \geq m_n.$$

Les suites (M_n) et (m_n) sont monotones et bornées ; elles convergent. On définit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \inf_n M_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \sup_n m_n.$$

On a toujours $\liminf u_n \leq \limsup u_n$. Ces deux nombres décrivent le comportement à l'infini ; ils ne sont pas nécessairement le minimum et le maximum de l'ensemble de tous les termes.

Exemple

Pour $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, on a $M_n = \frac{1}{n}$ et $m_n = 0$. Le supremum global vaut 1, mais $\limsup u_n = 0$. L'infimum de chaque queue est 0, bien qu'aucun terme ne vaille 0.

5.2 Caractérisations avec epsilon

Pour une suite bornée et un réel L , l'égalité $L = \limsup u_n$ équivaut aux deux conditions suivantes, pour chaque $\varepsilon > 0$:

Borne éventuelle. Il existe N tel que $u_n < L + \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Approche répétée. Il existe une infinité d'indices n tels que $u_n > L - \varepsilon$.

De même, $l = \liminf u_n$ équivaut à : pour chaque $\varepsilon > 0$, on a $u_n > l - \varepsilon$ à partir d'un certain rang, et $u_n < l + \varepsilon$ pour une infinité d'indices.

Complément — formulations utiles pour les quiz. Pour tout réel x :

$$x \leq \limsup u_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \{n : u_n > x - \varepsilon\} \text{ est infini,}$$

$$x \geq \limsup u_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \{n : u_n > x + \varepsilon\} \text{ est fini,}$$

$$x \geq \liminf u_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \{n : u_n < x + \varepsilon\} \text{ est infini,}$$

$$x \leq \liminf u_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \{n : u_n < x - \varepsilon\} \text{ est fini.}$$

5.3 Lien avec les points d'accumulation

Théorème. Pour une suite bornée, K est non vide et ses deux extrêmes sont eux-mêmes des points d'accumulation :

$$\liminf u_n = \min K, \quad \limsup u_n = \max K.$$

5.4 Critère de convergence

Théorème. Pour une suite bornée,

$$u_n \rightarrow l \Leftrightarrow \liminf u_n = \limsup u_n = l.$$

5.5 Extension aux suites non bornées

On peut définir les mêmes suprema et infima dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Les suites de queues, monotones, ont alors des limites éventuellement infinies. Cette extension permet de parler de $\liminf$ et $\limsup$

pour toute suite réelle. Les énoncés portant sur des points d'accumulation réels doivent cependant être distingués des limites infinies.

Exemples. Pour $u_n = n$, $\liminf$ et $\limsup$ valent $+\infty$, mais il n'existe aucun point d'accumulation réel. Pour $u_n = (-1)^n n$, la limite inférieure vaut $-\infty$ et la limite supérieure vaut $+\infty$, sans point d'accumulation réel.

6. Exemples de calcul et méthode

6.1 Calculer explicitement les queues

Exemple

Soit $u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ pour $n \geq 1$. Les termes pairs sont positifs et décroissent vers 1 ; les termes impairs sont négatifs et croissent vers -1.

Dans la queue à partir du rang n , le plus grand terme est le premier terme pair ; le plus petit est le premier terme impair. Ainsi :

Parité de n	M_n	m_n
n pair	$1 + \frac{1}{n}$	$-1 - \frac{1}{n+1}$
n impair	$1 + \frac{1}{n+1}$	$-1 - \frac{1}{n}$

On voit que $M_n \rightarrow 1$ et $m_n \rightarrow -1$. On peut aussi identifier les deux sous-suites $u_{2k} \rightarrow 1$ et $u_{2k+1} \rightarrow -1$. Par conséquent,

$$K = \{-1, 1\}, \quad \liminf u_n = -1, \quad \limsup u_n = 1.$$

6.2 Une fraction avec alternance

Exemple

Soit

$$u_n = \frac{1 + (-2)^n}{2^n - 1}, \quad n \geq 1.$$

Divisons le numérateur et le dénominateur par 2^n :

$$u_n = \frac{2^{-n} + (-1)^n}{1 - 2^{-n}}.$$

Pour les indices pairs, $u_{2k} \rightarrow 1$. Pour les indices impairs, le numérateur initial vaut $1 - 2^{2k+1}$; il est l'opposé du dénominateur, donc $u_{2k+1} = -1$. Ainsi $K = \{-1, 1\}$, $\limsup u_n = 1$ et $\liminf u_n = -1$. La suite diverge.

6.3 Quatre classes modulo

Exemple

Considérons

$$u_n = \frac{\cos(\pi n)}{\frac{1}{2} + \cos(\frac{\pi n}{2})}, \quad n \geq 1.$$

Les valeurs du dénominateur sont $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$; il ne s'annule donc pas. La période commune est 4.

Classe des indices	$\cos(\pi n)$	$\cos(\frac{\pi n}{2})$	u_n
$n = 4k$	1	1	$\frac{2}{3}$
$n = 4k + 1$	-1	0	-2
$n = 4k + 2$	1	-1	-2
$n = 4k + 3$	-1	0	-2

Ces quatre classes couvrent tous les indices. Il n'y a que deux limites distinctes : $K = \{-2, \frac{2}{3}\}$. Donc $\liminf u_n = -2$ et $\limsup u_n = \frac{2}{3}$. Quatre sous-suites naturelles ne signifient pas quatre points d'accumulation.

6.4 Six classes et six points distincts

Exemple

Posons

$$u_n = 2 \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - 3(-1)^n.$$

Les périodes 3 et 2 ont pour période commune 6. Pour les restes $r=0,1,2,3,4,5$, les valeurs sont respectivement

$$-3, \quad 3+\sqrt{3}, \quad -3-\sqrt{3}, \quad 3, \quad -3+\sqrt{3}, \quad 3-\sqrt{3}.$$

Elles sont toutes distinctes. Chacune apparaît pour une infinité d'indices ; ce sont exactement les six points d'accumulation. Les extrêmes sont $\liminf u_n = -3-\sqrt{3}$ et $\limsup u_n = 3+\sqrt{3}$.

6.5 Sous suites infinies et points d'accumulation réels

Exemple

Soit $u_n = n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. On obtient

$$u_{4k} = 0, \quad u_{4k+1} = 4k+1 \rightarrow +\infty,$$

$$u_{4k+2} = 0, \quad u_{4k+3} = -(4k+3) \rightarrow -\infty.$$

Le seul point d'accumulation réel est 0. Dans l'extension aux limites infinies, $\liminf u_n = -\infty$ et $\limsup u_n = +\infty$. La suite n'a de limite ni réelle ni infinie.

Exemple complémentaire

Pour $v_n = \frac{2+(-3)^n}{5+3^n}$, les indices pairs donnent une limite égale à 1 et les impairs une limite égale à -1.

On obtient encore $K = \{-1, 1\}$.

6.6 Trois exemples supplémentaires

Exemples

1. Pour $x_n = \frac{n + \sin n}{n}$, on a $x_n = 1 + \frac{\sin n}{n}$ et $\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$. Donc $x_n \rightarrow 1$; $\liminf$ et $\limsup$ valent toutes deux 1.

2. Si $x_n = \frac{1}{n^2+1}$ pour n impair et $x_n = (-1)^{\frac{n}{2}}$ pour n pair, la classe impaire tend vers 0, la classe $n=4k$ vaut 1 et la classe $n=4k+2$ vaut -1. Ces classes couvrent tous les indices : $K = \{-1, 0, 1\}$, $\liminf$ vaut -1 et $\limsup$ vaut 1.
3. Pour $x_n = (-1)^n + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, les quatre classes modulo 4 donnent respectivement les valeurs 1, 0, 1, -2. Ainsi $K = \{-2, 0, 1\}$; $\liminf$ vaut -2 et $\limsup$ vaut 1.

7. Propriétés et pièges des limites inférieure et supérieure

7.1 Comparaison et opérations

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\liminf u_n \leq \liminf v_n$ et $\limsup u_n \leq \limsup v_n$. Ajouter une constante c ajoute c aux deux limites. Multiplier par $c > 0$ multiplie les deux limites par c ; multiplier par $c < 0$ échange leurs rôles.

En particulier,

$$\limsup(-u_n) = -\liminf u_n, \quad \liminf(-u_n) = -\limsup u_n.$$

Pour deux suites bornées :

$$\liminf u_n + \liminf v_n \leq \liminf(u_n + v_n),$$

$$\limsup(u_n + v_n) \leq \limsup u_n + \limsup v_n.$$

Contre-exemple à l'égalité

Pour $u_n = (-1)^n$ et $v_n = -(-1)^n$, la somme est nulle. Sa $\limsup$ vaut 0, tandis que la somme des $\limsup$ vaut 2. Pour le produit, $u_n v_n = -1$, donc sa $\limsup$ vaut -1 ; le produit des $\limsup$ vaut 1. Il n'existe donc pas de règle générale consistant à remplacer chaque facteur par sa $\limsup$.

Si $v_n \rightarrow b$, alors $\limsup(u_n + v_n) = \limsup u_n + b$, et de même pour $\liminf$: une perturbation convergeant vers une constante déplace tous les points d'accumulation de cette constante.

7.2 Convergence de la valeur absolue

Si $|u_n| \rightarrow M > 0$, tout point d'accumulation réel de (u_n) appartient à $\{-M, M\}$. Mais les deux points ne sont pas obligatoirement présents, et la suite peut converger ou diverger. Les suites $u_n = M$, $u_n = -M$ et $u_n = M(-1)^n$ illustrent les trois possibilités.

Si $|u_n| \rightarrow 0$, alors $u_n \rightarrow 0$. Plus généralement, $\limsup |u_n| = 0$ impose $|u_n| \rightarrow 0$, puisque $0 \leq \liminf |u_n| \leq \limsup |u_n| = 0$.

Valeurs absolues décroissantes. Si $|u_n|$ est décroissante, elle converge vers un réel $M \geq 0$. La suite (u_n) est bornée ; elle possède au moins un point d'accumulation et au plus deux, inclus dans $\{-M, M\}$. Si $M=0$, elle converge vers 0. Si $M>0$, elle converge quand son signe est constant à partir d'un certain rang ; si chacun des deux signes apparaît une infinité de fois, ses points d'accumulation sont $-M$ et M .

8. Suites de Cauchy et complétude de $\mathbb{R}$

Définition : Une suite (u_n) est de **Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N : |u_m - u_n| < \varepsilon.$$

Le même entier N doit convenir pour toutes les paires d'indices $m, n \geq N$. Il peut dépendre de ε , mais pas de la paire choisie. Remplacer ε par $\frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{\varepsilon}{5}$ ou utiliser une inégalité large donne une définition équivalente.

Négation exacte. La suite n'est pas de Cauchy si

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists m, n \geq N : |u_m - u_n| \geq \varepsilon_0.$$

Pour une limite, on compare les termes à un réel fixé l . Pour Cauchy, on compare les termes entre eux ; on n'a pas besoin de connaître la limite.

Théorème : Toute suite convergente est de Cauchy

Théorème : Toute suite de Cauchy est bornée

Théorème. Une suite réelle converge vers un réel si et seulement si elle est de Cauchy.

Cette propriété exprime la complétude de $\mathbb{R}$.

9. Méthodes pour prouver ou réfuter Cauchy

9.1 Trouver une borne uniforme

Pour démontrer directement Cauchy, on peut supposer $m \geq n$ par symétrie, puis chercher une majoration de $|u_m - u_n|$ qui tend vers 0 avec n , indépendamment de la taille de $m - n$.

Exemple

Pour $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, si $m \geq n$:

$$|u_m - u_n| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n}.$$

Choisissons un entier $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Alors $|u_m - u_n| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ pour toutes les paires d'indices au-delà de N .

9.2 Une récurrence affine étudiée par CauchyExemple

Soit $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$ pour $n \geq 1$. Le point fixe est 6. Posons $v_n = u_n - 6$; alors $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ et $v_1 = -4$. Donc

$$u_n = 6 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Pour $m \geq n$, on obtient

$$|u_m - u_n| = 4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{m-n}\right) \leq 4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, on peut choisir N tel que $4\left(\frac{2}{3}\right)^{N-1} < \varepsilon$. Cette borne convient pour tous $m, n \geq N$: la suite est de Cauchy, donc converge dans $\mathbb{R}$. Sa formule explicite donne la limite 6.

Choix explicite possible. Tout entier N tel que $N \geq 1$ et $N - 1 > \frac{\ln(\frac{4}{\varepsilon})}{\ln(\frac{3}{2})}$ convient. Il suffit d'un entier

satisfaisant ces inégalités ; le plus petit n'est pas nécessaire.

9.3 Des écarts consécutifs petits ne suffisent pas

Si une suite est de Cauchy, alors $|u_{n+1} - u_n| \rightarrow 0$. Pour chaque entier p fixé, on a aussi $u_{n+p} - u_n \rightarrow 0$. Les réciproques sont fausses : un nombre fixé d'accroissements ne contrôle pas toutes les paires d'indices lointains.

Contre-exemple.

Pour $u_n = \sqrt{n}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

mais $u_n \rightarrow +\infty$, donc la suite n'est pas de Cauchy. Directement, pour tout N , choisissons un entier $n \geq \max(N, 1)$ et $m = 4n$. Alors $|u_m - u_n| = \sqrt{n} \geq 1$, ce qui vérifie la négation de Cauchy avec $\varepsilon_0 = 1$.

10. Opérations sur les suites de Cauchy

10.1 Somme et produit

Si (u_n) et (v_n) sont de Cauchy, alors $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$ et $(u_n v_n)$ le sont aussi. Multiplier une suite de Cauchy par une constante conserve cette propriété.

10.2 Valeur absolue et quotient

L'inégalité $||u_m| - |u_n|| \leq |u_m - u_n|$ montre que $(|u_n|)$ est de Cauchy dès que (u_n) l'est. La réciproque est fautive : $u_n = (-1)^n$ a une valeur absolue constante.

Pour un quotient, il faut contrôler le dénominateur. Si (v_n) est de Cauchy et $|v_n| \geq c > 0$ à partir d'un certain rang, alors $(\frac{1}{v_n})$ est de Cauchy, car

$$\left| \frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_n} \right| = \frac{|v_m - v_n|}{|v_m v_n|} \leq \frac{|v_m - v_n|}{c^2}.$$

Si (u_n) est aussi de Cauchy, son quotient par (v_n) l'est alors. Dans $\mathbb{R}$, il suffit que $v_n \rightarrow b \neq 0$ pour obtenir cette minoration éventuelle.

Contre-exemple.

Le fait que chaque v_n soit non nul ne suffit pas. Pour $u_n = 1$ et $v_n = \frac{1}{n}$, les deux suites sont de Cauchy,

mais $\frac{u_n}{v_n} = n$ ne l'est pas.

Autre piège. La suite $((-1)^n u_n)$ n'est pas nécessairement de Cauchy : prendre $u_n = 1$. Dans $\mathbb{R}$, si u_n est de Cauchy, cette suite alternée est de Cauchy exactement lorsque $u_n \rightarrow 0$.

11. Entraînement ciblé et corrigé

Pour chaque affirmation fausse, donner un contre-exemple explicite. Les réponses suivent dans une partie séparée pour permettre de chercher d'abord.

11.1 Questions

1. Une suite ayant une sous-suite convergente est convergente.
2. Si une sous-suite n'a pas de limite réelle, la suite initiale n'a pas de limite réelle.
3. Si une suite diverge, toutes ses sous-suites divergent.
4. Une suite réelle bornée possède au moins un point d'accumulation.
5. Une suite non bornée ne possède aucun point d'accumulation réel.
6. Une suite ayant exactement un point d'accumulation réel converge.
7. Toute suite bornée possède une sous-suite croissante.
8. Pour une suite bornée, $\limsup$ est le supremum de l'ensemble de tous ses termes.
9. Si $\limsup u_n = 0$, alors tous les termes sont négatifs ou nuls.
10. Si $\limsup |u_n| = 0$, alors $u_n \rightarrow 0$.
11. Si $|u_n| \rightarrow a$, alors $\limsup u_n = a$ et $\liminf u_n = -a$.
12. Si $\limsup u_n = 0$ et $\liminf v_n = 0$, alors $\limsup (u_n - v_n) = 0$.
13. Si $|u_n|$ est strictement décroissante, (u_n) converge.
14. Une suite de Cauchy est bornée.
15. Une suite bornée est de Cauchy.
16. Si $|u_{n+1} - u_n| \rightarrow 0$, alors (u_n) est de Cauchy.
17. Si (u_n) est de Cauchy, il existe $C > 0$ tel que $|u_m - u_n| < C$ pour tous les indices m, n .
18. Si (u_n^2) est de Cauchy, (u_n) est de Cauchy.
19. Deux suites de Cauchy à termes non nuls ont nécessairement un quotient de Cauchy.
20. Si (u_n) est de Cauchy, alors $u_{2n} - u_n \rightarrow 0$ et $u_{n^2} - u_n \rightarrow 0$.

11.2 Corrigé avec justifications

1 — Faux. Pour $u_n = (-1)^n$, la sous-suite paire converge vers 1, mais la suite diverge.

2 — Vrai. Toute sous-suite d'une suite convergeant vers un réel converge vers le même réel. On applique la contraposée.

3 — Faux. Les sous-suites paire et impaire de $(-1)^n$ convergent.

4 — Vrai. C'est le théorème de Bolzano–Weierstrass.

5 — Faux. Prendre $u_{2k} = 0$ et $u_{2k+1} = k + 1$. La suite est non bornée et possède le point d'accumulation 0.

6 — Faux en général. Le même contre-exemple convient. L'affirmation devient vraie avec l'hypothèse de bornitude.

7 — Faux. La suite $u_n = \frac{1}{n+1}$ est strictement décroissante ; toutes ses sous-suites le sont aussi. Une sous-suite monotone n'est pas nécessairement croissante.

8 — Faux. Pour $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, le supremum global vaut 1 et la limsup vaut 0.

9 — Faux. La suite $u_n = \frac{1}{n}$ a une limsup nulle, mais tous ses termes sont strictement positifs. Une limsup décrit la fin de la suite, pas un majorant valable à tous les rangs.

10 — Vrai. Puisque $|u_n| \geq 0$, sa liminf et sa limsup valent toutes deux 0. Donc $|u_n| \rightarrow 0$, puis $u_n \rightarrow 0$.

11 — Faux. Pour $u_n = 1$, on a $|u_n| \rightarrow 1$, mais la liminf et la limsup valent toutes deux 1. Les valeurs $-a$ et a ne sont pas forcément toutes deux atteintes comme limites de sous-suites.

12 — Faux. Prenons $u_n = -1$ pour n pair et $u_n = 0$ pour n impair ; posons $v_n = 0$ pour n pair et $v_n = 1$ pour n impair. Alors $\limsup u_n = 0$ et $\liminf v_n = 0$, mais $u_n - v_n = -1$ à tous les rangs. Sa limsup vaut -1 . Les hypothèses assurent seulement $\limsup (u_n - v_n) \leq 0$.

13 — Faux. Pour $u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, la valeur absolue décroît strictement vers 1 ; la suite a deux points d'accumulation distincts. En revanche, $(|u_n|)$ et (u_n^2) convergent.

14 — Vrai. On contrôle toute la queue avec $\varepsilon = 1$, puis les termes initiaux, qui sont en nombre fini.

15 — Faux. La suite $(-1)^n$ est bornée, mais des termes arbitrairement lointains de parités opposées restent à distance 2.

16 — Faux. La suite $\sqrt{n}$ fournit un contre-exemple. Ses écarts consécutifs tendent vers zéro, mais la distance entre les rangs n et $4n$ vaut $\sqrt{n}$.

17 — Vrai. Une suite de Cauchy est bornée : si $|u_n| \leq B$ pour tout n , alors $|u_m - u_n| \leq 2B < 2B + 1$. Cette propriété est beaucoup plus faible que Cauchy : elle ne garantit pas des distances arbitrairement petites.

18 — Faux. Pour $u_n = (-1)^n$, la suite des carrés est constante égale à 1 et est donc de Cauchy ; la suite initiale ne l'est pas.

19 — Faux. Prendre $u_n = 1$ et $v_n = \frac{1}{n}$. Les deux suites sont de Cauchy, et leurs termes sont non nuls, mais leur quotient vaut n .

20 — Vrai. Dans chaque différence, les deux indices tendent vers l'infini. La définition de Cauchy contrôle toutes les paires d'indices au-delà d'un même rang, même si leur écart tend vers l'infini.