

ANALYSE I

Suites numériques

1 Définir une suite et vérifier son domaine

Définition. Une **suite réelle** est une fonction $u: N \rightarrow R$. On note $u_n = u(n)$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite entière. Une suite peut aussi être définie seulement pour $n \geq n_0$.

Exemples.

$u_n = n^2$ est définie pour $n \geq 0$; $v_n = 1/n$ est définie pour $n \geq 1$; $w_n = \sqrt{n}$ est réelle pour $n \geq 0$. L'expression $\sqrt{-n}$ ne définit pas une suite réelle sur tout N .

Une formule **explicite** donne directement le terme en fonction de n . Une **récurrence** donne un terme initial et une règle pour calculer les suivants.

Exemple de récurrence.

Si $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = 1/(u_n + 1)$, alors $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = \frac{1}{2}, u_4 = \frac{2}{3}, u_5 = \frac{3}{5}$.

Il faut remplacer u_n par le terme précédent, et non par le rang n .

Suites arithmétiques et géométriques

- Une suite est **arithmétique** lorsque $u_{n+1} - u_n = d$ est constant. Alors $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)d$. Elle est croissante si $d \geq 0$, décroissante si $d \leq 0$ et constante si $d = 0$.

Exemples.

$u_n = 7n + 2$ a pour raison 7 ; $v_n = \ln(2^n) = n \ln 2$ a pour raison $\ln 2$; $w_{n+1} = w_n + 1$ donne une suite arithmétique de raison 1.

- Une suite est **géométrique** lorsque $u_{n+1} = q u_n$, avec q constant. Alors $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$.

Exemple.

2^{-n} a pour raison $1/2$; $(-1)^n$ a pour raison -1 ; 10^{n-1} a pour raison 10 . La suite $1 - 1/n$ n'est pas géométrique.

2 Monotonie et bornes

2.1. Monotonie

Une suite est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout rang de son domaine ; Elle est **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$.

Elle est **monotone** dans l'un de ces deux cas.

- **Méthode 1.** Calculer $u_{n+1} - u_n$ et déterminer son signe.

Exemple.

Pour $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

La suite est strictement croissante.

- **Méthode 2.** Si $u_n > 0$, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 . Un quotient supérieur à 1 donne une croissance stricte ; un quotient inférieur à 1 donne une décroissance stricte. La positivité est indispensable pour utiliser cette règle.

Contre-exemple.

Pour $u_n = -2^n$, le quotient vaut $2 > 1$, mais la suite est décroissante. Les termes sont négatifs.

- **Méthode 3.** Si $u_n = f(n)$ et si f est monotone sur l'intervalle considéré, alors la suite hérite de cette monotonie. Cette méthode ne remplace pas la vérification du domaine.

Exemple

Pour $u_n = n^2 - 4n + 1$, $n \geq 1$,

$$u_{n+1} - u_n = 2n - 3.$$

La suite décroît de u_1 à u_2 , puis croît pour $n \geq 2$. Elle n'est pas monotone sur tout son domaine.

2.2. Majorée minorée bornée

Une suite est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout n ; elle est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq u_n$ pour tout n . Elle est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, ce qui équivaut à

$$\exists C > 0, \forall n, |u_n| \leq C.$$

Exemples.

- $(-1)^n$ est bornée entre -1 et 1, sans être monotone.
- n est croissante et minorée, mais non majorée.
- $-n^2$ est décroissante et majorée, mais non minorée.

Une suite monotone n'est donc pas nécessairement bornée.

2.3. Infimum supremum minimum maximum

Pour $A = \{u_n : n \geq n_0\}$, $\inf A$ est le plus grand minorant et $\sup A$ le plus petit majorant. Un minimum ou un maximum doit en plus être **atteint** par un terme.

Exemple

Si $u_n = \frac{3n}{n+2}$ pour $n \geq 1$, alors $u_n = 3 - \frac{6}{n+2}$ est strictement croissante. Le premier terme vaut 1 ; tous les termes sont strictement inférieurs à 3 et tendent vers 3. Donc

$$\inf A = \min A = 1, \sup A = 3, A \text{ n'a pas de maximum.}$$

Pour vérifier que 3 est bien le plus petit majorant : tout nombre $3 - \delta$ avec $\delta > 0$ est dépassé dès que $\frac{6}{n+2} < \delta$.

Exemples

1. Si $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{2^n}$, $n \geq 0$, les termes d'indice pair sont compris entre 2 et 3, et ceux d'indice impair entre $3/2$ et 2. Ainsi $\inf A = \min A = 3/2$, atteint en $n=1$, et $\sup A = \max A = 3$, atteint en $n=0$.
2. Pour $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{3}$, on a $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Donc $\sup A = \max A = 1$ et $\inf A = 0$, sans minimum.

3 Définition de convergence

Définition. La suite (u_n) **converge** vers $l \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon.$$

On écrit $u_n \rightarrow l$. À partir d'un certain rang, **tous** les termes appartiennent à l'intervalle $l - \varepsilon, l + \varepsilon$.

Exemples

1. Montrer que la suite $u_n = \frac{1}{n}$, définie pour $n \geq 1$, converge vers 0.

Par définition, il faut montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \geq 1$ tel que

$$n \geq N \implies |u_n - 0| < \varepsilon. \text{ Soit } \varepsilon > 0. \text{ On a}$$

$$|u_n - 0| = \frac{1}{n}.$$

Pour rendre cette distance inférieure à ε , on cherche donc à avoir $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Par la propriété archimédienne on peut choisir un entier $N > \frac{1}{\varepsilon}$, par exemple $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$.

Alors, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

La définition de la convergence est donc vérifiée, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. Montrer que $u_n = \frac{1-2n}{n+4}$ converge vers -2.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$,

$$|u_n - (-2)| = \left| \frac{1-2n}{n+4} + 2 \right| = \left| \frac{1-2n+2(n+4)}{n+4} \right| = \frac{9}{n+4} \leq \frac{9}{n}. \text{ Pour obtenir } |u_n + 2| < \varepsilon, \text{ il suffit donc d'avoir}$$

$\frac{9}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{9}{\varepsilon}$. Par la propriété archimédienne, il existe un entier $N > \frac{9}{\varepsilon}$, par exemple $N = \lfloor \frac{9}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Alors,

pour tout $n \geq N$,

$$|u_n + 2| = \frac{9}{n+4} \leq \frac{9}{n} \leq \frac{9}{N} < \varepsilon. \text{ La définition de la convergence est donc vérifiée :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-2n}{n+4} = -2.$$

3. Montrer que $u_n = \frac{n^3-1}{2n^3+1}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$,

$$\left| u_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2(n^3-1) - (2n^3+1)}{2(2n^3+1)} \right| = \frac{3}{2(2n^3+1)} \leq \frac{3}{4n^3}. \text{ Pour obtenir une distance inférieure à } \varepsilon, \text{ il suffit d'avoir}$$

$\frac{3}{4n^3} < \varepsilon \iff n > \sqrt[3]{\frac{3}{4\varepsilon}}$. Par la propriété archimédienne, on peut choisir un entier dépassant ce nombre. Un choix

explicite est

$$N = \lfloor \sqrt[3]{\frac{3}{4\varepsilon}} \rfloor + 1. \text{ Alors, pour tout } n \geq N,$$

$$\left| u_n - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{3}{4n^3} \leq \frac{3}{4N^3} < \varepsilon. \text{ Par définition de la convergence,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3-1}{2n^3+1} = \frac{1}{2}.$$

4. Montrer que $u_n = \frac{(-1)^n}{n^p}$, avec $p > 0$, converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$, puisque $|(-1)^n| = 1$,

$$|u_n - 0| = \frac{1}{n^p}.$$

Comme $p > 0$,

$\frac{1}{n^p} < \varepsilon \iff n^p > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}$. Par la propriété archimédienne, il existe un entier dépassant ce nombre. On

peut choisir

$$N = \left\lceil \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p} \right\rceil + 1. \text{ Alors, pour tout } n \geq N,$$

$$|u_n| = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{N^p} < \varepsilon. \text{ Par définition de la convergence,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} = 0. \text{ Négation de la définition}$$

La suite (u_n) **ne converge pas vers un réel donné** l signifie

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall M, \exists n \geq M, |u_n - l| \geq \varepsilon_0.$$

Il reste donc toujours des termes éloignés de l , même après un rang arbitrairement grand. Pour dire que la suite ne converge vers aucun réel, cette propriété doit être vraie pour tout $l \in \mathbb{R}$.

Exemple

Pour $u_n = (-1)^n$, les termes pairs valent 1 et les impairs -1. Quel que soit l , au moins l'une de ces deux valeurs est à distance au moins 1 de l . Il existe donc des termes arbitrairement éloignés du début tels que $|u_n - l| \geq 1$: la suite ne converge pas.

4. Unicité de la limite et conséquences

Théorème. Une suite convergente possède une seule limite.

Preuve. Si $u_n \rightarrow a$ et $u_n \rightarrow b$ avec $a \neq b$, prendre $\varepsilon = |a - b|/3$. Pour un rang assez grand,

$$|a - b| \leq |a - u_n| + |u_n - b| < \frac{2}{3}|a - b|,$$

ce qui est impossible.

Théorème.

Toute suite convergente est bornée.

Preuve. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite convergeant vers $l \in \mathbb{R}$.

Par définition de la convergence, en prenant $\varepsilon = 1$, il existe un entier $N \geq 1$ tel que

$$n \geq N \implies |u_n - l| < 1. \text{ L'inégalité triangulaire donne alors, pour tout } n \geq N,$$

$$|u_n| = |(u_n - l) + l| \leq |u_n - l| + |l| < 1 + |l|. \text{ Les termes à partir du rang } N \text{ sont donc bornés.}$$

Il reste à considérer les premiers termes $u_0, \dots, u_{N-1}$. Ils sont en nombre fini, donc on peut poser

$$M = \max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, |l| + 1). \text{ Pour } n < N, \text{ on a } |u_n| \leq M \text{ par définition du maximum. Pour } n \geq N, \text{ on a également}$$

$$|u_n| < |l| + 1 \leq M. \text{ Ainsi,}$$

$$\forall n \geq 0, |u_n| \leq M, \text{ ce qui prouve que la suite est bornée.}$$

Attention ! La réciproque est fausse. $(-1)^n$ est bornée mais divergente. Une suite convergente peut aussi être non monotone : $(-1)^n / n \rightarrow 0$.

Théorème.

Toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite que la suite initiale.

Autrement dit, si $u_n \rightarrow l$ et si (n_k) est une suite strictement croissante d'entiers naturels, alors

$$u_{n_k} \longrightarrow l \text{ (} k \rightarrow +\infty \text{).}$$

Conséquence. Si deux sous-suites d'une même suite convergent vers des limites différentes, alors la suite initiale ne converge pas.

Méthode — Montrer qu'une suite diverge à l'aide de sous-suites

Pour prouver qu'une suite diverge, on peut donc chercher deux sous-suites ayant des limites différentes.

Exemples

1. Une suite bornée mais divergente

Soit $u_n = (-1)^n$. Les sous-suites de rang pair et impair vérifient

$u_{2k} = 1 \longrightarrow 1, u_{2k+1} = -1 \longrightarrow -1$. Elles convergent vers deux limites différentes. La suite (u_n) est donc divergente, bien qu'elle soit bornée.

2. Une suite positive et bornée, mais divergente

Soit $u_n = 2 + (-1)^n + \frac{1}{n+1}$.

Alors

$u_{2k} = 3 + \frac{1}{2k+1} \longrightarrow 3, u_{2k+1} = 1 + \frac{1}{2k+2} \longrightarrow 1$. Ainsi, (u_n) ne converge pas. La positivité et le caractère borné ne suffisent donc pas à garantir la convergence.

3. Attention — Deux sous-suites de même limite ne suffisent pas en général

Soit $u_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ est un multiple de } 3, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$ On a

$u_{3k+1} \rightarrow 0, u_{3k+2} \rightarrow 0$, mais $u_{3k} \rightarrow 1$. La suite diverge donc malgré l'existence de deux sous-suites convergeant vers la même limite.

Cas particulier utile. Si les sous-suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) convergent toutes les deux vers l , alors $u_n \rightarrow l$, car elles couvrent ensemble tous les termes de la suite.

4. Application trigonométrique.

Pour

$u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, on choisit des indices donnant deux valeurs distinctes :

$u_{4k+1} = 1 \longrightarrow 1, u_{4k+3} = -1 \longrightarrow -1$. Les limites étant différentes, la suite est divergente.

5. Théorèmes de comparaison

Théorème des deux gendarmes

Soient (a_n) , (u_n) et (b_n) trois suites réelles. Supposons qu'il existe un entier N_0 tel que

$\forall n \geq N_0, a_n \leq u_n \leq b_n$. Si les deux suites qui encadrent (u_n) convergent vers **la même limite** l , c'est-à-dire

$$a_n \rightarrow l \text{ et } b_n \rightarrow l, \text{ alors } u_n \rightarrow l.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$

Comme $a_n \rightarrow l$, il existe un entier N_1 tel que

$$n \geq N_1 \implies |a_n - l| < \varepsilon. \text{ En particulier,}$$

$a_n > l - \varepsilon$. De même, comme $b_n \rightarrow l$, il existe un entier N_2 tel que

$$n \geq N_2 \implies |b_n - l| < \varepsilon. \text{ En particulier,}$$

$$b_n < l + \varepsilon. \text{ Posons}$$

$N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$. Pour tout $n \geq N$, les trois conditions sont simultanément vérifiées. On obtient donc

$$l - \varepsilon < a_n \leq u_n \leq b_n < l + \varepsilon. \text{ Ainsi,}$$

$$l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \iff |u_n - l| < \varepsilon. \text{ La définition de la convergence est vérifiée, donc}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. *Version pratique.* Si $|u_n| \leq v_n$ à partir d'un rang et $v_n \rightarrow 0$, alors $u_n \rightarrow 0$, car $-v_n \leq u_n \leq v_n$.

Exemples

$$1. \quad \left| \frac{\cos(\sqrt{n})}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ donc } \frac{\cos(\sqrt{n})}{n} \rightarrow 0.$$

$$2. \quad \text{Pour } u_n = \frac{\sin(\cos(n^{1000}))}{n+333}, |u_n| \leq \frac{1}{n+333} \rightarrow 0.$$

$$3. \quad \text{Si } 4 - \frac{1}{n^2+1} \leq u_n \leq 4 - \frac{1}{n^3+1}, \text{ les deux bornes tendent vers } 4, \text{ donc } u_n \rightarrow 4.$$

❖ Inégalités et limite

Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes telles que

$$a_n \longrightarrow a \text{ et } b_n \longrightarrow b. \text{ Si, à partir d'un certain rang, } a_n \leq b_n, \text{ alors}$$

$$a \leq b.$$

Attention : une inégalité stricte entre les termes peut devenir une égalité à la limite. Si $a_n < b_n$ à partir d'un certain rang, on peut seulement conclure que $a \leq b$.

Exemple

Pour tout $n \geq 1$, $0 < \frac{1}{n}$. Cependant, les deux membres tendent vers 0.

Si $u_n > 0$ et $u_n \rightarrow l$, on peut conclure seulement $l \geq 0$.

❖ **Produit d'une suite convergeant vers zéro par une suite bornée**

Si $a_n \rightarrow 0$ et (b_n) est bornée, alors : $a_n b_n \rightarrow 0$.

En effet, si $|b_n| \leq C$, alors $|a_n b_n| \leq C |a_n| \rightarrow 0$.

Exemples

1. Prenons $a_n = \frac{1}{n}$, pour $n \geq 1$. On obtient

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}. \text{ Comme les deux suites qui encadrent } \frac{\sin n}{n} \text{ tendent vers 0,}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$. À retenir : il suffit que le facteur $\sin n$ soit borné ; sa convergence n'est pas nécessaire.

2. Calculons la limite de

$$u_n = \frac{n \cos(n^2) + (-1)^n \sqrt{n}}{n^2 + 1}, n \geq 1. \text{ On écrit}$$

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1} \cos(n^2) + \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} (-1)^n. \text{ Chaque terme est le produit d'un facteur qui tend vers zéro par un facteur borné.}$$

1. Étudier le premier terme.

Pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n}. \text{ Comme } 1/n \rightarrow 0, \text{ le théorème des gendarmes donne}$$

$\frac{n}{n^2 + 1} \rightarrow 0$. De plus, $|\cos(n^2)| \leq 1$. Par le théorème du produit d'une suite convergeant vers zéro par une suite bornée,

$$\frac{n}{n^2+1} \cos(n^2) \rightarrow 0.$$

2. Étudier le second terme.

De même,

$$0 \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \rightarrow 0. \text{ Puisque } |(-1)^n| = 1, \text{ on en déduit}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} (-1)^n \rightarrow 0.$$

Les deux termes tendent vers zéro. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cos(n^2) + (-1)^n \sqrt{n}}{n^2+1} = 0.$$

6. Opérations sur les limites

6.1 Opérations

Si $a_n \rightarrow a$ et $b_n \rightarrow b$, alors

$$a_n + b_n \rightarrow a + b, \quad a_n - b_n \rightarrow a - b, \quad a_n b_n \rightarrow ab.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, $t a_n \rightarrow ta$. Pour tout entier $k \geq 2$, $a_n^k \rightarrow a^k$.

Si $b \neq 0$, alors b_n est non nul à partir d'un certain rang et $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$.

Le seul fait que chaque b_n soit non nul ne suffit pas : il faut une limite $b \neq 0$ pour appliquer directement cette formule.

6.2. Valeur absolue et racines fixes

$$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow a_n - a \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n - a| \rightarrow 0.$$

En particulier,

$$a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n| \rightarrow 0.$$

$$\text{Si } a_n \rightarrow a, \text{ alors } |a_n| \rightarrow |a|, \text{ car } ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|.$$

Attention : La réciproque est fausse lorsque la limite de la valeur absolue est non nulle.

Exemples

1. $|(-1)^n| \rightarrow 1$, mais $(-1)^n$ ne converge pas.
2. De même, $a_n^2 \rightarrow 1$ implique que (a_n) est bornée, sans garantir sa convergence.

Racines fixes

Si $a_n \geq 0$ et $a_n \rightarrow a$, alors $a \geq 0$ et, pour un entier fixé $k \geq 2$,

$$\sqrt[k]{a_n} \rightarrow \sqrt[k]{a}.$$

Exemple : $\sqrt{2+1/n^2} \rightarrow \sqrt{2}$.

Attention : Les réciproques des opérations sont à vérifier

La convergence de $a_n + b_n$ n'implique pas celle des deux suites. Pour $a_n = n$, $b_n = -n$, la somme est constamment nulle. La convergence du produit n'implique pas non plus celle des facteurs : $a_n = b_n = (-1)^n$ donne $a_n b_n = 1$.

7. Divergence et limites infinies

Définition. $u_n \rightarrow +\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists N, \forall n \geq N, u_n > M.$$

De même, $u_n \rightarrow -\infty$ si,

$$\forall M > 0, \exists N, \forall n \geq N, u_n < -M.$$

Une limite infinie n'est pas une convergence dans $\mathbb{R}$.

Définition. Une suite est **divergente** si elle ne converge vers aucun réel. Elle peut tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou ne posséder aucune limite, même infinie.

Une suite peut aussi diverger en oscillant, sans tendre vers une limite infinie.

Attention : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin n$ n'existe pas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos n$ n'existe pas.

Exemples

1. $n \rightarrow +\infty$, $-n^2 \rightarrow -\infty$,
2. $(-1)^n$ est divergente et bornée.

3. La suite $(-1)^n n$ est divergente et non bornée, sans tendre vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- Si $u_n \geq v_n$ et si $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n \rightarrow +\infty$.
- Si $u_n \leq v_n$ et si $v_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n \rightarrow -\infty$.

Méthode. Pour montrer qu'une suite tend vers $+\infty$, il suffit de la minorer par une suite qui tend vers $+\infty$. Pour montrer qu'elle tend vers $-\infty$, il suffit de la majorer par une suite qui tend vers $-\infty$.

Exemples

Considérons la suite

$u_n = n + \frac{\cos n}{n}$, $n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$, on a $\cos n \geq -1$. Puisque $n > 0$, on peut diviser cette inégalité par n :

$$\frac{\cos n}{n} \geq -\frac{1}{n}. \text{ En ajoutant } n \text{ aux deux membres, on obtient}$$

$$u_n \geq n - \frac{1}{n}. \text{ Or } n \rightarrow +\infty \text{ et } \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ donc}$$

$n - \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$. Ainsi, (u_n) est minorée par une suite qui tend vers $+\infty$. Par le théorème de comparaison,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + \frac{\cos n}{n} \right) = +\infty. \text{ Conséquences.}$$

$$\text{Si } u_n \rightarrow +\infty, \text{ alors } -u_n \rightarrow -\infty \quad \text{et } 1/u_n \rightarrow 0,$$

le quotient étant défini à partir d'un certain rang. Cela n'impose pas que (u_n) soit monotone.

Par exemple, $u_n = n + 2(-1)^n$ tend vers $+\infty$ mais n'est pas monotone.

❖ Formes indéterminées

Les opérations sur les limites finies ne s'appliquent pas directement aux formes

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0/0 \text{ et } \infty/\infty$$

Il faut transformer l'expression.

Exemple

Considérons la suite

$$u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}.$$

Les deux termes tendent vers $+\infty$. Leur différence présente donc une forme indéterminée.

Pour lever cette indétermination, on multiplie et on divise par l'expression conjuguée :

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}. \text{ À l'aide de l'identité } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2, \text{ on obtient}$$

$$u_n = \frac{(n+2) - n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}. \text{ Le numérateur est constant et le dénominateur tend vers } +\infty. \text{ Ainsi,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = 0.$$

8. Limites de référence et méthodes de calcul

Proposition : *Trois limites de référence*

- i) Si $a > 1$, alors $x_n = a^n \rightarrow +\infty$
- ii) Si $0 < a < 1$, alors $x_n = \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$
- iii) La suite $x_n = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$

Dans i) et ii), a est un réel fixé.

❖ Puissances géométriques

- Pour $q > 1$, $q^n \rightarrow +\infty$;
- pour $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$;
- pour $q = 1$, la suite vaut 1 ;
- pour $q = -1$, elle oscille ;
- pour $q < -1$, sa valeur absolue tend vers $+\infty$, mais la suite ne possède pas de limite infinie.

Exemple

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite

$u_n = (2a+1)^n, n \geq 1$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la suite (u_n) converge vers un réel et préciser sa limite.

Solution.

La suite (u_n) est géométrique de raison

$q = 2a + 1$. On utilise les propriétés des suites géométriques en distinguant les valeurs de q .

1. Si $-1 < q < 1$, alors $q^n \rightarrow 0$.

Cette condition s'écrit

$$-1 < 2a + 1 < 1 \iff -2 < 2a < 0 \iff -1 < a < 0. \text{ Ainsi, pour } -1 < a < 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2a + 1)^n = 0.$$

2. Si $q = 1$, la suite est constante.

On a

$$2a + 1 = 1 \iff a = 0. \text{ Dans ce cas, } u_n = 1 \text{ pour tout } n, \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1. \text{ La valeur } a = 0 \text{ est donc admise.}$$

3. Si $q = -1$, la suite ne converge pas.

On a

$$2a + 1 = -1 \iff a = -1. \text{ Dans ce cas,}$$

$u_n = (-1)^n$. Les termes pairs valent 1, tandis que les termes impairs valent -1. Les deux sous-suites ont des limites différentes : la suite ne converge pas. La valeur $a = -1$ est donc exclue.

❖ Quotients de polynômes

Diviser par la plus grande puissance de n présente dans le dénominateur, puis comparer les degrés.

Exemple.

$$\frac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7} = \frac{5 - 3/n + 2/n^2}{3 + 7/n^2} \rightarrow \frac{5}{3}.$$

$$u_n = \frac{4n^2 - 3n + 2}{1000 - 5n^2} \rightarrow -\frac{4}{5}.$$

❖ **Rationalisation des racines**

Multiplier par l'expression conjuguée évite une soustraction de deux termes proches.

Exemple 1

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Exemple 2

$$\sqrt{n}(\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3+1}) = \frac{1-1/n}{\sqrt{1+1/n^2} + \sqrt{1+1/n^3}} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

❖ **Sinus et petits arguments**

Utiliser $|\sin t| \leq |t|$ et la limite $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0$.

Exemple

1. Calculer les limites suivantes, les angles étant exprimés en radians :

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et ii) } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

i) On sait que

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0. \text{ La fonction sinus étant continue en } 0, \text{ on obtient } \sin\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \sin 0 = 0.$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

ii) Le facteur n tend vers $+\infty$, tandis que $\sin(1/n)$ tend vers zéro. Le produit présente donc la forme indéterminée $+\infty \cdot 0$.

Pour lever cette indétermination, on écrit

$$n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin(1/n)}{1/n}. \text{ On utilise la limite fondamentale, les angles étant exprimés en radians :}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Puisque $1/n \rightarrow 0$ et $1/n \neq 0$, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

2. On considère

$$u_n = n \sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right), n \geq 1.$$

Déterminer sa limite à l'aide de l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$.

Pour tout réel x ,

$$|\sin x| \leq |x|$$

En prenant $x = \frac{2n+3}{n^3}$, qui est positif pour $n \geq 1$, on obtient

$$\left| \sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right) \right| \leq \frac{2n+3}{n^3}.$$

En simplifiant,

$$n \frac{2n+3}{n^3} = \frac{2n+3}{n^2} = \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}. \text{ Ainsi,}$$

$$0 \leq |u_n| \leq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}. \text{ Utiliser le théorème des gendarmes.}$$

On a

$\frac{2}{n} \rightarrow 0$ et $\frac{3}{n^2} \rightarrow 0$. La borne supérieure tend donc vers zéro. Par le théorème des gendarmes,

$$|u_n| \rightarrow 0, \text{ ce qui entraîne } u_n \rightarrow 0. \text{ Finalement,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right) = 0.$$

❖ Limites exponentielles

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, la base étant positive à partir d'un certain rang,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x.$$

Exemples

1. $(1 + 2/n)^n \rightarrow e^2$ et
2. $(1 - 1/n)^n \rightarrow e^{-1}$
3. Par ailleurs, $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \rightarrow 1$,
4. Calculer la limite de la suite

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, n \geq 2. \text{Solution.}$$

La base tend vers 1, tandis que l'exposant tend vers $+\infty$. On rencontre donc la **forme indéterminée** $1^{+\infty}$.

- Passer au logarithme.

Pour $n \geq 2$, on a $1 - \frac{1}{n^2} > 0$, donc $u_n > 0$. Son logarithme est ainsi défini et

$$\ln u_n = n \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

- Calculer la limite du logarithme.

On utilise la limite usuelle

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \text{ Pour faire apparaître ce quotient, on écrit}$$

$$\ln u_n = n \left(-\frac{1}{n^2} \right) \frac{\ln(1 - 1/n^2)}{-1/n^2} = -\frac{1}{n} \frac{\ln(1 - 1/n^2)}{-1/n^2}. \text{ Puisque } -1/n^2 \rightarrow 0,$$

$$\frac{\ln(1 - 1/n^2)}{-1/n^2} \rightarrow 1.$$

Comme $-1/n \rightarrow 0$, on obtient

$$\ln u_n \rightarrow 0.$$

- Revenir à la suite initiale.

On a $u_n = e^{\ln u_n}$. Par continuité de la fonction exponentielle,

$$u_n \longrightarrow e^0 = 1. \text{ Ainsi,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$$

- Autre méthode — Inégalité de Bernoulli.

L'inégalité $(1+x)^n \geq 1+nx$, valable pour $x \geq -1$ et $n \geq 1$, donne ici

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}. \text{ De plus, la base appartient à }]0,1[, \text{ donc}$$

$$1 - \frac{1}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1. \text{ Les deux bornes tendent vers 1. Le théorème des gendarmes permet donc également de}$$

conclure que $u_n \rightarrow 1$.

5. Calculer la limite de la suite

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}, n \geq 1. \quad \mathbf{9. Critère de d'Alembert (critère du quotient)}$$

Proposition — Critère de d'Alembert (critère du quotient)

Soit (a_n) une suite réelle telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L. \text{ Alors :}$$

- Si $0 \leq L < 1$, la suite converge vers zéro : $a_n \longrightarrow 0$.
- Si $L > 1$, la valeur absolue des termes tend vers $+\infty$: $|a_n| \longrightarrow +\infty$. En particulier, si $a_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $a_n \longrightarrow +\infty$. Sans condition sur le signe, on ne peut pas conclure que $a_n \rightarrow +\infty$.
- Si $L = 1$, le critère ne permet pas de conclure.

Proposition — Comparaison avec une suite géométrique

Soit (u_n) une suite réelle.

1. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\mu \in]0,1[$ tels que

$$|u_{n+1}| \leq \mu |u_n| \text{ pour tout } n \geq N. \text{ Alors } u_n \rightarrow 0.$$

2. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\mu > 1$ tels que

$$u_n > 0 \text{ et } u_{n+1} \geq \mu u_n \text{ pour tout } n \geq N. \text{ Alors } u_n \rightarrow +\infty$$

Preuve

- Cas $0 < \mu < 1$.

Supposons qu'il existe un rang N tel que

$$|u_{n+1}| \leq \mu |u_n| \text{ pour tout } n \geq N. \text{ En appliquant successivement cette inégalité, on obtient}$$

$$|u_{N+1}| \leq \mu |u_N|,$$

$$|u_{N+2}| \leq \mu |u_{N+1}| \leq \mu^2 |u_N|. \text{ Montrons par récurrence que, pour tout entier } k \geq 0,$$

$$|u_{N+k}| \leq |u_N| \mu^k. \text{ Pour } k=0, \text{ l'inégalité est une égalité. Si elle est vraie au rang } k, \text{ alors}$$

$$|u_{N+k+1}| \leq \mu |u_{N+k}| \leq \mu |u_N| \mu^k = |u_N| \mu^{k+1}. \text{ La propriété est donc vraie pour tout } k \geq 0.$$

Puisque $0 < \mu < 1$, on a $\mu^k \rightarrow 0$. Ainsi,

$$0 \leq |u_{N+k}| \leq |u_N| \mu^k \rightarrow 0. \text{ Par le théorème des gendarmes,}$$

$$u_n \rightarrow 0$$

- Cas $\mu > 1$ et termes positifs.

Supposons que, pour tout $n \geq N$,

$$u_n > 0 \text{ et } u_{n+1} \geq \mu u_n. \text{ Par le même raisonnement par récurrence,}$$

$$u_{N+k} \geq u_N \mu^k \text{ pour tout } k \geq 0. \text{ Or } u_N > 0 \text{ et } \mu^k \rightarrow +\infty, \text{ donc}$$

$$u_N \mu^k \rightarrow +\infty. \text{ Par le théorème de comparaison,}$$

$$u_n \rightarrow +\infty$$

Exemples

1. Pour $u_n = 2^n / n!$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0, \text{ donc } u_n \rightarrow 0. \text{ Plus généralement, pour } a \neq 0 \text{ fixé,}$$

$$\frac{\left| \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{a^n}{n!} \right|} = \frac{|a|}{n+1} \rightarrow 0,$$

donc $a^n / n! \rightarrow 0$. Pour $a=0$, la suite est nulle à partir du rang 1.

2. Calculer la limite de la suite $u_n = \frac{2^n}{n!}, n \geq 1$, à l'aide du critère de d'Alembert. Généraliser

ensuite le résultat à la suite $v_n = \frac{a^n}{n!}, a \in \mathbb{R}$. Solution.

- Calculer le quotient de deux termes consécutifs.

Les termes u_n sont strictement positifs. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} \text{ en simplifiant}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \cdot 2^n \cdot n!}{(n+1)n! \cdot 2^n} = \frac{2}{n+1}.$$

- Appliquer le critère de d'Alembert.

Puisque $n+1 \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1. \text{ Le critère de d'Alembert donne donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

- Généraliser à une constante réelle a .

Si $a \neq 0$, les termes v_n sont non nuls et

$$\left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = \left| \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} \right| = \frac{|a|}{n+1}. \text{ Comme } a \text{ est fixé, } |a| \text{ est constant, donc}$$

$$\frac{|a|}{n+1} \rightarrow 0 < 1. \text{ Par le même critère, } v_n \rightarrow 0, \text{ y compris lorsque } a < 0.$$

Si $a=0$, on a directement $v_n=0$ pour tout $n \geq 1$.

Finalement, pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

3. Calculer la limite de la suite $u_n = \frac{n^2}{3^n}, n \geq 1$. Solution.

On considère $u_n = \frac{n^2}{3^n}, n \geq 1$. Les termes sont strictement positifs. Calculons le quotient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2}. \text{ On simplifie :}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{3n^2} = \frac{13}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}. \text{ Or } 1/n \rightarrow 0, \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3} < 1. \text{ Par le critère de d'Alembert, la suite converge vers zéro : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0.$$

10. Critère de la racine pour les suites

Soit (u_n) une suite réelle. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L.$$

- Si $0 \leq L < 1$, alors $u_n \rightarrow 0$.
- Si $L > 1$, alors $|u_n| \rightarrow +\infty$. Si, de plus, les termes sont positifs à partir d'un certain rang, alors $u_n \rightarrow +\infty$.
- Si $L = 1$, le critère ne permet pas de conclure.

Exemple

1. Pour $u_n = \frac{n^2}{3^n}$, on a

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{n^{2/n}}{3} \rightarrow \frac{1}{3} < 1, \text{ car } n^{2/n} \rightarrow 1. \text{ Par le critère de la racine, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0.$$

2. Déterminer la limite de

$$u_n = \left(\frac{2n+1}{5n+3} \right)^n. \text{ On calcule la racine } n\text{-ième :}$$

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{2n+1}{5n+3} = \frac{2+\frac{1}{n}}{5+\frac{3}{n}} \rightarrow \frac{2}{5} < 1. \text{ Par le critère de la racine pour les suites : } u_n \rightarrow 0$$

11. Convergence des suites monotones

Théorème. Toute suite croissante et majorée converge vers le supremum de l'ensemble de ses termes. Toute suite décroissante et minorée converge vers l'infimum de cet ensemble. **Ainsi,**

Toute suite monotone et bornée converge.

Preuve dans le cas croissant. Soit $l = \sup \{u_n\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant, donc il existe N tel que $l - \varepsilon < u_N$. Par croissance, pour $n \geq N$,

$$l - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq l,$$

donc $|u_n - l| < \varepsilon$.

Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. Une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Exemples

1. On considère la suite

$$u_n = 1 - \frac{1}{n+1}, n \geq 0.$$

Montrer qu'elle est croissante et majorée, puis en déduire sa convergence et déterminer sa limite

- Montrer que la suite est croissante.

Calculons la différence entre deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right). \text{ En simplifiant puis en mettant au même dénominateur,}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \text{ Cette quantité est strictement positive pour tout } n \geq 0.$$

Ainsi,

$u_{n+1} > u_n$, donc la suite est strictement croissante.

- Montrer que la suite est majorée.

Pour tout $n \geq 0$, on a $\frac{1}{n+1} > 0$, donc $u_n = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$. Ainsi, 1 est un majorant de la suite.

- En déduire la convergence.

Le théorème de convergence des suites monotones affirme que toute suite croissante et majorée converge vers un réel.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 : elle est donc convergente.

- Déterminer sa limite.

Puisque $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 - 0 = 1$.

2. Une suite décroissante n'est pas toujours convergente : $u_n = -n$ diverge. La minoration est l'hypothèse manquante.

3. Toute suite négative et croissante converge : elle est majorée par zéro. Toute suite positive et décroissante converge : elle est minorée par zéro.

4. **Somme de suites monotones.** La somme de deux suites croissantes est croissante. La somme de deux suites monotones et bornées converge, mais n'est pas nécessairement monotone si leurs sens de variation sont opposés.

12. Suites récurrentes et preuve de convergence

Pour une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, suivre quatre étapes : vérifier le domaine ; établir une borne ou un intervalle stable ; démontrer la monotonie ; puis passer à la limite, lorsque f est continue au point considéré.

Résoudre $l = f(l)$ fournit des **candidats** à la limite. Cela ne prouve pas que la suite converge.

Exemples

1. Soit $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ pour $n \geq 1$.

▪ Domaine et positivité. Si $u_n \geq 0$, alors u_{n+1} est défini et positif. Comme $u_1 = 1$, la suite est définie et positive à tous les rangs.

▪ Majoration par récurrence. $u_1 < 2$. Si $u_n < 2$, alors

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} < \sqrt{3} < 2.$$

Donc $u_n < 2$ pour tout n .

▪ Croissance par récurrence. $u_2 = \sqrt{2} > u_1$. Si $u_{n+1} \geq u_n$, la croissance de la racine donne

$$u_{n+2} = \sqrt{1+u_{n+1}} \geq \sqrt{1+u_n} = u_{n+1}.$$

La suite est donc croissante et majorée : elle converge vers un réel $l \geq 1$.

▪ Calcul de la limite. Par continuité de la racine,

$$l = \sqrt{1+l} \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0.$$

Les solutions sont $(1 \pm \sqrt{5})/2$. Puisque $l \geq 1$, seule la racine positive convient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2. Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = (u_n - 3)/2$. Le point fixe vérifie $l = (l - 3)/2$, donc $l = -3$. Pour obtenir une preuve, posons $v_n = u_n + 3$. Alors

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n, v_0 = 4, u_n = -3 + \frac{4}{2^n}.$$

La suite est décroissante, minorée par -3 et converge vers -3. Le changement de variable permet ici d'obtenir directement la formule explicite.

3. On considère la suite définie par

$$u_0 = \sqrt{2}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

Pour déterminer sa limite, on montre qu'elle est **croissante et majorée**, puis on calcule sa limite.

▪ Montrer que $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \geq 0$

On raisonne par récurrence.

Initialisation : pour $n=0$, $u_0 = \sqrt{2}$ donc

$$\sqrt{2} \leq u_0 \leq 2. \text{Hérédité : supposons que}$$

$$\sqrt{2} \leq u_n \leq 2. \text{Comme } \sqrt{2} \geq 1, \text{ on a aussi}$$

$$1 \leq u_n \leq 2. \text{En multipliant par 2, } 2 \leq 2u_n \leq 4.$$

La fonction racine carrée étant croissante sur $[0, +\infty[$, on obtient $\sqrt{2} \leq \sqrt{2u_n} \leq 2$. Or $\sqrt{2u_n} = u_{n+1}$, donc $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$.

Par récurrence : $\forall n \geq 0, \sqrt{2} \leq u_n \leq 2$.

- Montrer que la suite est croissante

On veut prouver que $u_{n+1} \geq u_n$.

Puisque les deux termes sont positifs, on peut comparer leurs carrés :

$$\begin{aligned} u_{n+1} \geq u_n &\Leftrightarrow \sqrt{2u_n} \geq u_n \\ &\Leftrightarrow 2u_n \geq u_n^2 && \text{D'après l'encadrement obtenu, } u_n \geq 0 \text{ et } 2 - u_n \geq 0. \\ &\Leftrightarrow u_n(2 - u_n) \geq 0. \end{aligned}$$

Leur produit est donc positif ou nul. Ainsi, $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite est croissante.

- Justifier l'existence d'une limite

La suite est croissante et majorée par 2. Par le théorème de convergence des suites monotones, elle converge vers une limite réelle l .

L'encadrement donne également $\sqrt{2} \leq l \leq 2$.

- Calculer la limite

Dans la relation

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}, \text{ on fait tendre } n \text{ vers } +\infty. \text{ Comme } u_{n+1} \rightarrow l \text{ et que la racine carrée est continue,}$$

$$l = \sqrt{2l}.$$

En élevant au carré,

$$l^2 = 2l \iff l(l-2) = 0. \text{ Les deux possibilités sont donc}$$

$l=0$ ou $l=2$. Mais $l \geq \sqrt{2} > 0$, ce qui exclut 0. Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

4. On considère la suite définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}, u_{n+1} = u_n^2$.

On cherche sa limite en fonction de la valeur de a .

- Calculer les premiers termes

En appliquant la relation de récurrence :

$$u_0 = a,$$

$$u_1 = u_0^2 = a^2,$$

$$u_2 = u_1^2 = (a^2)^2 = a^4,$$

$$u_3 = u_2^2 = (a^4)^2 = a^8.$$

Les exposants sont 1, 2, 4, 8, On conjecture et on prouve par récurrence que

$$u_n = a^{2^n}.$$

Pour $n \geq 1$, l'exposant 2^n est pair, donc : $u_n = |a|^{2^n}$.

On peut ainsi étudier la limite à partir de $|a|$, même lorsque $a < 0$.

- Étudier le cas $|a| < 1$

Si $a = 0$, tous les termes sont nuls, donc $u_n \rightarrow 0$.

Si $0 < |a| < 1$, on a $\ln |a| < 0$.

On écrit $u_n = |a|^{2^n} = \exp(2^n \ln |a|) (n \geq 1)$.

Comme $2^n \rightarrow +\infty$ et que $\ln |a|$ est une constante négative,

$$2^n \ln |a| \rightarrow -\infty. \text{ Par conséquent,}$$

$$u_n = \exp(2^n \ln |a|) \rightarrow 0. \text{ Ainsi,}$$

$$|a| < 1 \implies u_n \rightarrow 0.$$

- Étudier le cas $|a| = 1$

Deux valeurs sont possibles : $a = 1$ et $a = -1$

Pour $a = 1$,

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1, \dots \text{Donc}$$

$$u_n \longrightarrow 1. \text{ Pour } a = -1,$$

$$u_0 = -1, u_1 = (-1)^2 = 1. \text{ Ensuite, le carré de 1 vaut toujours 1, donc}$$

$$u_n = 1 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Ainsi,

$u_n \longrightarrow 1$. Le premier terme -1 ne change pas la limite : celle-ci dépend du comportement des termes lorsque n devient grand.

- Étudier le cas $|a| > 1$

Dans ce cas,

$$\ln |a| > 0. \text{ Pour } n \geq 1,$$

$$u_n = \exp(2^n \ln |a|). \text{ Comme } 2^n \rightarrow +\infty \text{ et que } \ln |a| \text{ est une constante positive,}$$

$$2^n \ln |a| \longrightarrow +\infty. \text{ Donc}$$

$$u_n \longrightarrow +\infty. \text{ Cela reste vrai si } a < -1, \text{ car tous les termes à partir de } u_1 = a^2 \text{ sont positifs.}$$

- Résultat :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ 1, & |a| = 1, \\ +\infty, & |a| > 1. \end{cases}$$

❖ Limite d'une suite définie par une récurrence affine

Soit (u_n) définie par

$$u_{n+1} = q u_n + b, u_0 \in \mathbb{R}. 1. \text{ Cas } q \neq 1.$$

Posons

$$l = \frac{b}{1-q}. \text{ La formule explicite est}$$

$$u_n = l + q^n (u_0 - l).$$

Les propriétés des suites géométriques donnent alors :

Condition	Comportement de (u_n)
$u_0 = l$	$u_n = l$
$ q < 1$	La suite converge vers l .
$q > 1$ et $u_0 > l$	$u_n \rightarrow +\infty$
$q > 1$ et $u_0 < l$	$u_n \rightarrow -\infty$
$q = -1$ et $u_0 \neq l$	La suite alterne entre deux valeurs distinctes et n'a pas de limite
$q < -1$ et $u_0 \neq l$	Les termes oscillent et leur valeur absolue tend vers $+\infty$. La suite n'a ni limite réelle ni limite infinie

2. Cas $q = 1$.

La relation devient $u_{n+1} = u_n + b$. La suite est arithmétique :

$$u_n = u_0 + nb. \text{ Ainsi,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty, & b > 0, \\ -\infty, & b < 0, \\ u_0, & b = 0. \end{cases}$$

Exemple

Pour

$$u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n - 3}{2},$$

on a $q = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{3}{2}$. Puisque $\|q\| < 1$, la suite converge vers

$$l = \frac{-3/2}{1 - 1/2} = -3. \text{ Donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3.$$