

ANALYSE I

Relations et fonctions

1 Relations

Soient X et Y deux ensembles. Une **relation** entre X et Y est un sous-ensemble du produit cartésien $X \times Y$.

$$R \subset X \times Y$$

Dire que $(x, y) \in R$ signifie que x et y sont reliés par la relation R . Lorsque $X = Y$, on parle d'une relation sur X .

Exemple

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, \quad Y = \{2, 4, 8\}$$

$$R = \{(x, y) \in X \times Y : x + y \text{ est pair}\}$$

$$R = \{(2,2), (2,4), (2,8), (4,2), (4,4), (4,8)\}.$$

2 Relations d'équivalence

Soit R une relation sur un ensemble X . On dit que R est une **relation d'équivalence** si elle possède les trois propriétés suivantes :

- Réflexivité : pour tout $x \in X$, $x \sim x$.
- Symétrie : si $x \sim y$, alors $y \sim x$.
- Transitivité : si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x \sim z$.

La notation $x \sim y$ signifie que x et y sont en relation.

Méthode — montrer qu'une relation est une relation d'équivalence

1. Vérifier la réflexivité : partir d'un $x \in X$ quelconque et montrer $x \sim x$.
2. Vérifier la symétrie : supposer $x \sim y$ et montrer $y \sim x$.
3. Vérifier la transitivité : supposer $x \sim y$ et $y \sim z$, puis montrer $x \sim z$.

Exemple

Sur $\mathbb{Z}$, on définit $x \sim y$ si $x - y$ est pair.

Réflexive : $x - x = 0$ est pair.

Symétrique : si $x - y$ est pair, alors $y - x = -(x - y)$ est pair.

Transitive : si $x - y$ et $y - z$ sont pairs, alors $x - z = (x - y) + (y - z)$ est pair.

Donc $\sim$ est une relation d'équivalence.

3 Classes d'équivalence et ensemble quotient

Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur X , la classe d'équivalence d'un élément $x \in X$ est l'ensemble de tous les éléments de X équivalents à x :

$$C_x = \{y \in X : y \sim x\}.$$

L'ensemble quotient, noté $X/\sim$, est l'ensemble de toutes les classes d'équivalence.

$$X/\sim = \{\text{classes d'équivalence de } X\}.$$

Exemple — parité dans $\mathbb{Z}$

Pour $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ est pair, il existe deux classes :

$C_0 = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ (entiers pairs)

$C_1 = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ (entiers impairs)

Ainsi, $\mathbb{Z}/\sim = \{C_0, C_1\}$.

Deux classes d'équivalence sont soit identiques, soit disjointes. Plus précisément :

$$C_x = C_y \Leftrightarrow x \sim y, \text{ et } x \not\sim y \Rightarrow C_x \cap C_y = \emptyset.$$

4 Fonctions : ensemble de départ, ensemble d'arrivée et graphe

Une fonction $f : X \rightarrow Y$ associe à chaque élément $x \in X$ un unique élément $y \in Y$, noté $f(x)$.

$$f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$$

- X est le domaine de f (ou domaine de définition).
- Y est le ensemble d'arrivée de f .
- $f(x)$ est l'image de x par f .

Le graphe d'une fonction f est le sous-ensemble de $X \times Y$ constitué des couples $(x, f(x))$:

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Attention

Une relation n 'est une fonction que si chaque x du domaine possède exactement une image.

Un même x ne peut pas être associé à deux valeurs différentes de y .

Page | 3

5 Ensemble des images et préimage

Soit $f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$ et $B \subset Y$.

L'image de A par f est : $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$.

L'ensemble des images de f est : $\text{Im}(f) = f(X) = \{y \in Y : \exists x \in X \text{ tel que } f(x) = y\}$.

La préimage de B par f est : $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

Piège fréquent

La notation $f^{-1}(B)$ désigne la préimage d'un ensemble B et existe pour toute fonction.

Elle ne signifie pas nécessairement que la fonction réciproque f^{-1} existe.

La fonction réciproque n 'existe que lorsque f est bijective.

6 Injectivité, surjectivité et bijectivité

Soit $f: X \rightarrow Y$.

La fonction f est **injective** si deux éléments différents du domaine ont des images différentes :

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Une formulation équivalente, souvent plus pratique pour les démonstrations, est

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

La fonction f est **surjective** si tout élément du ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent :

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tel que } f(x) = y.$$

Autrement dit, f surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = Y$.

La fonction f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Exemple essentiel — $f(x) = x^2$

$f: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, $f(x) = x^2$ est bijective.

$f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est injective mais pas surjective.

$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ est surjective mais pas injective.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est ni injective ni surjective.

Page | 4

À retenir

L'injectivité dépend du domaine.

La surjectivité dépend du ensemble d'arrivée.

La même formule peut donc définir des fonctions ayant des propriétés différentes.

7 Composition de fonctions

Soient $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$. La **composée** de g avec f est la fonction

$$g \circ f: X \rightarrow Z, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Attention à l'ordre

Dans $g \circ f$, on applique d'abord f , puis g . En général, $g \circ f \neq f \circ g$.

Conséquences utiles :

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

8 Fonction réciproque

Une fonction $f: X \rightarrow Y$ possède une fonction réciproque si et seulement si elle est bijective.

$$f \text{ inversible} \Leftrightarrow f \text{ bijective.}$$

La fonction réciproque est notée

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$

et elle vérifie :

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_X \text{ et } f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y.$$

Méthode — déterminer f^{-1}

1. Vérifier que f est bijective sur les ensembles considérés.
2. Poser $y = f(x)$.
3. Résoudre l'équation pour x .
4. Écrire $x = f^{-1}(y)$, puis remplacer y par x dans l'expression finale.
5. Vérifier le domaine et le ensemble d'arrivée de f^{-1} .

Exemple

$$f: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, \quad f(x) = x^2.$$

$$y = x^2 \text{ avec } x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

$$\text{Donc } f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

9 Restriction et prolongement

Soient $X \subset Y \subset Z$ et des fonctions $f: X \rightarrow E$, $g: Y \rightarrow E$, $h: Z \rightarrow E$.

La fonction f est la **restriction** de g à X si elles coïncident sur X :

$$f = g|_X, \text{ c'est-à-dire } f(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in X.$$

La fonction h est un **prolongement** de g à Z si h coïncide avec g sur Y .

Pourquoi c'est utile ?

Restreindre le domaine peut transformer une fonction non injective en une fonction injective, voire bijective.

Exemple : $x \mapsto x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, mais sa restriction à $[0, +\infty[$ est bijective vers $[0, +\infty[$.

10 Fonctions réelles et domaine de définition

Pour une fonction réelle donnée par une formule, le domaine de définition est l'ensemble des réels pour lesquels toutes les opérations de la formule ont un sens.

- Un dénominateur doit être non nul.
- Le radicand d'une racine carrée doit être supérieur ou égal à zéro.

- L'argument d'un logarithme doit être strictement positif.

Exemple — domaine de définition

Déterminer le domaine de

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2-1}.$$

$$4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4, \quad x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq 1.$$

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, 4].$$

Page | 6

11 Ensemble des images et lecture d'un graphe

L'ensemble des images est l'ensemble des valeurs effectivement prises par la fonction. Pour le déterminer par le calcul, on fixe y et on cherche pour quelles valeurs de y l'équation $f(x)=y$ possède au moins une solution x dans le domaine.

$$\text{Im}(f) = \{y \in Y : \text{l'équation } f(x)=y \text{ possède au moins une solution } x \in D_f\}.$$

Exemple — calcul de l'image

$$f : [2,3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3x-4}{2}.$$

$$y = \frac{3x-4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2y+4}{3}.$$

$$2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{5}{2}.$$

$$\text{Im}(f) = [1, \frac{5}{2}].$$

Sur le graphe, $f(a)$ est l'ordonnée du point d'abscisse a . Les solutions de $f(x)=b$ sont les abscisses des intersections avec la droite horizontale $y=b$. Les zéros sont les abscisses des intersections avec l'axe des x .

12 Critères graphiques

Pour une fonction réelle $f : A \rightarrow B$, le test des droites horizontales permet de lire l'injectivité et la surjectivité.

- f est injective si toute droite $y=b$ coupe son graphe en au plus un point.

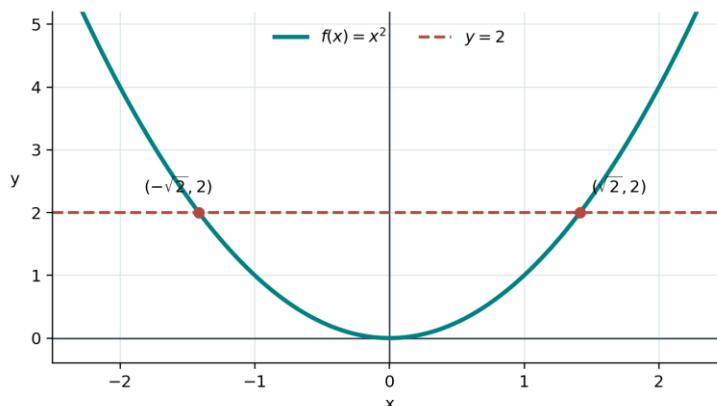
- f est surjective sur B si, pour tout $b \in B$, la droite $y=b$ coupe son graphe en au moins un point.
- f est bijective si chaque droite $y=b$, avec $b \in B$, coupe son graphe en exactement un point.

Exemple

Page | 7

La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, car une droite $y=b>0$ coupe la parabole en deux points.

Sa restriction à $[0, +\infty[$ est injective et devient bijective vers $[0, +\infty[$.



La droite $y=2$ coupe la parabole en deux points : f n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

13 Transformations de graphes

À partir du graphe de $y=f(x)$, on obtient les graphes suivants par des transformations géométriques.

Expression	Transformation
$y=f(x)+k$	translation verticale de k
$y=f(x-h)$	translation horizontale de h vers la droite
$y=-f(x)$	symétrie par rapport à l'axe des x
$y=f(-x)$	symétrie par rapport à l'axe des y
$y=a f(x)$	dilatation verticale de facteur $ a $, avec symétrie si $a<0$

Exemple

$$g(x) = (x - 2)^3 + 3$$

s 'obtient à partir de $y=x^3$ par une translation de 2 unités vers la droite, puis de 3 unités vers le haut.

14 Fonctions définies par morceaux

Une fonction définie par morceaux utilise une formule différente selon la partie du domaine où se trouve x . Pour calculer une valeur, on commence toujours par identifier le morceau applicable.

Page | 8

$$f(x) = 1 - x^2 \text{ si } x \leq 0, \text{ et } f(x) = 2x + 1 \text{ si } x > 0.$$

Exemple

$$f(-2) = 1 - (-2)^2 = -3,$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

Pour tracer le graphe, on dessine chaque formule uniquement sur l'intervalle qui lui correspond et on indique correctement les extrémités incluses ou exclues.

15 Fonctions paires et impaires

On suppose que le domaine D est symétrique par rapport à zéro : $x \in D$ implique $-x \in D$.

$$f \text{ paire} \Leftrightarrow \forall x \in D, f(-x) = f(x).$$

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des y .

$$f \text{ impaire} \Leftrightarrow \forall x \in D, f(-x) = -f(x).$$

Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple

x^2 et $\cos(x)$ sont paires.

x^3 et $\sin(x)$ sont impaires.

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective et impaire, alors sa fonction réciproque f^{-1} est également impaire.

16 Graphe de la fonction réciproque

Si f est bijective, un point (x, y) appartient au graphe de f si et seulement si le point (y, x) appartient au graphe de f^{-1} . Les deux graphes sont donc symétriques par rapport à la droite $y=x$.

$$(x, y) \in G(f) \Leftrightarrow (y, x) \in G(f^{-1}).$$

Attention : la fonction réciproque ne doit pas être confondue avec l'inverse multiplicatif.

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} \text{ en général.}$$

Page | 9

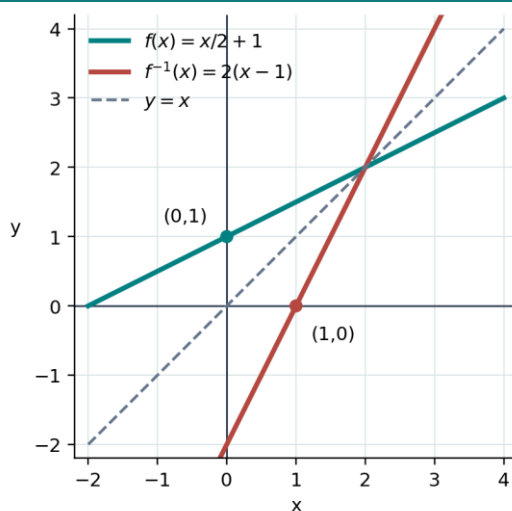
Exemple

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{2} + 1.$$

$$y = \frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow x = 2(y - 1).$$

$$f^{-1}(x) = 2(x - 1).$$

Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à $y=x$.



Les points $(x, f(x))$ et $(f(x), x)$ sont symétriques par rapport à la droite $y=x$.

17 Composition et domaines

Lorsque les fonctions sont données par des formules, il faut aussi vérifier que $f(x)$ appartient au domaine de g .

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\}.$$

Exemple

$$f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad g(x) = 2x - 3.$$

$$(f \circ g)(x) = f(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 2(2x - 3) - 1 = 4x^2 - 8x + 2,$$

$$(g \circ f)(x) = 2(x^2 + 2x - 1) - 3 = 2x^2 + 4x - 5.$$

En général, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont donc différentes.

18 Quotient différentiel

Avant l'introduction formelle de la dérivée, on rencontre le quotient différentiel suivant, défini pour $h \neq 0$ et lorsque x et $x+h$ appartiennent au domaine de f .

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Exemple

$$f(x) = x^3,$$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^3 - 8}{h}$$

$$= \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} = 12 + 6h + h^2, \quad h \neq 0.$$

À retenir

Synthèse

Une fonction associe à chaque élément du domaine une unique image.

Toujours distinguer ensemble d'arrivée, ensemble des images et préimage.

Bijective = injective + surjective ; f^{-1} existe exactement lorsque f est bijective.

Le domaine d'une formule se trouve en combinant tous ses critères d'existence.

Le graphe permet de lire les valeurs, les zéros, l'image et le nombre d'antécédents.

Le graphe de f^{-1} est le symétrique de celui de f par rapport à $y=x$.

Dans $g \circ f$, on applique d'abord f , puis g , et on contrôle le domaine de la composée.