

ANALYSE I

Rappels et notions de base

Ensembles

1 Définition et notations

Un **ensemble** est une collection d'objets appelés éléments.

Par exemple, l'ensemble $A = \{1, 3, 5, 7\}$ contient les nombres 1, 3, 5 et 7. L'ordre dans lequel les éléments sont écrits n'a pas d'importance : $\{1, 3, 5, 7\} = \{7, 1, 5, 3\}$.

Un ensemble peut également être défini à l'aide d'une propriété. Par exemple, $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est impair et } n < 8\}$ désigne le même ensemble $A = \{1, 3, 5, 7\}$.

Si x appartient à un ensemble A , on écrit $x \in A$.

Si x n'appartient pas à A , on écrit $x \notin A$.

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3\}$, alors $2 \in A$, mais $5 \notin A$.

2 Sous-ensembles

On dit que A est un **sous-ensemble** de B si tout élément de A appartient également à B . On écrit $A \subset B$.

Dans ce cours, le symbole $\subset$ signifie « est un sous-ensemble de ». En particulier, pour tout ensemble A , $A \subset A$.

Exemple

Si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$, alors $A \subset B$.

Deux ensembles sont égaux s'ils possèdent exactement les mêmes éléments. Une caractérisation très utile est

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

3 Ensemble vide et ensemble des parties

L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément. Pour tout ensemble A , $\emptyset \subset A$.

On appelle **ensemble des parties de A** , noté $\wp(A)$, l'ensemble de tous les sous-ensembles de A :

$$\wp(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

Exemple

Si $A = \{a, b\}$, alors $\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

4 Union, intersection et différence

Soient A et B deux ensembles.

L'union de A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

L'intersection de A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B :

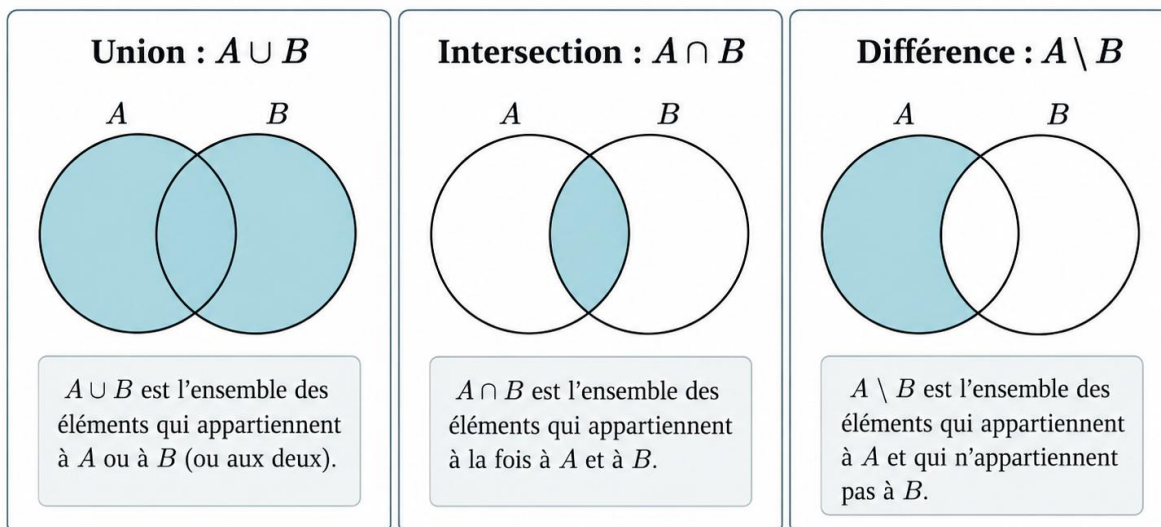
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

La différence de A et B , notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais pas à B :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$, alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \setminus B = \{1, 2\}$, tandis que $B \setminus A = \{4, 5\}$.



5 Produit cartésien

Soient A et B deux ensembles. Le **produit cartésien** $A \times B$ est l'ensemble de tous les couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$:

Page | 3

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Dans un couple, l'ordre est important. En général, $(a, b) \neq (b, a)$ et donc, en général, $A \times B \neq B \times A$.

Exemple

Si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b\}$, alors $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$.

Le produit cartésien permet notamment de définir le plan : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Il se généralise à plus de deux ensembles, par exemple $A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$.

Enfin, pour tout ensemble A , $A \times \emptyset = \emptyset$.

6 Élément, sous-ensemble et ensemble des parties

Il faut distinguer soigneusement l'appartenance et l'inclusion. La notation $x \in A$ signifie que x est un élément de A , tandis que $B \subset A$ signifie que tout élément de B appartient à A .

$$x \in A \quad \text{et} \quad B \subset A$$

Par définition de l'ensemble des parties, on a l'équivalence fondamentale

$$B \in \wp(A) \Leftrightarrow B \subset A.$$

Exemple

Soit $A = \{0, 1\}$. Alors $0 \in A$, $\{0\} \subset A$, $\{0\} \in \wp(A)$ et $A \in \wp(A)$.

En revanche, $0 \notin \wp(A)$, car 0 n'est pas un sous-ensemble de A .

Il faut également distinguer l'ensemble vide de l'ensemble qui contient l'ensemble vide :

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}, \quad |\emptyset| = 0 \quad \text{et} \quad |\{\emptyset\}| = 1.$$

7 Cardinal d'un ensemble fini

Le **cardinal** d'un ensemble fini A , noté $|A|$, est son nombre d'éléments.

Si A possède n éléments, chaque élément peut être choisi ou non pour former un sous-ensemble. Il y a donc

$$|A| = n \Rightarrow |\wp(A)| = 2^n.$$

Exemple

Si $A = \{a, b, c, d\}$, alors $|A| = 4$ et $|\wp(A)| = 2^4 = 16$.

Page | 4

Pour deux ensembles finis A et B , $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Exemple

Si $|A| = 3$ et $|B| = 5$, alors $|A \times B| = 3 \cdot 5 = 15$.

Enfin, si $A \subset B$, tout sous-ensemble de A est aussi un sous-ensemble de B :

$$A \subset B \Rightarrow \wp(A) \subset \wp(B).$$

8 Complémentaire et lois de De Morgan

Soit X un ensemble de référence et $A \subset X$. Le **complémentaire** de A dans X est l'ensemble des éléments de X qui n'appartiennent pas à A :

$$A^c = X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

Exemple

Soient $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{1, 3\}$. Alors

$$A^c = X \setminus A = \{2, 4, 5\}.$$

Les lois de De Morgan relient le complémentaire, l'union et l'intersection :

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B),$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

Exemple

Soient $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$. On obtient

$$X \setminus (A \cup B) = \{4\}$$

Et

$$(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = \{3, 4\} \cap \{1, 4\} = \{4\}.$$

9 Identités utiles sur les ensembles

Page | 5

Pour tous ensembles A , B et C , on dispose notamment des propriétés suivantes.

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

!! Pour démontrer une égalité $A = B$, la méthode la plus générale consiste à montrer les deux inclusions :

$$A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A.$$

10 Propriétés du produit cartésien

Le produit cartésien se distribue sur l'union et sur l'intersection :

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

En revanche, il n'est généralement pas associatif. Les objets suivants n'ont pas la même structure :

$$((a, b), c) \neq (a, (b, c)).$$

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C) \quad \text{en général.}$$

Exemple

Si $A = B = C = \{0, 1\}$, alors $((0, 1), 0) \in (A \times B) \times C$,

Mais $((0, 1), 0) \notin A \times (B \times C)$.

Dans $A \times (B \times C)$, l'élément correspondant est $(0, (1, 0))$.

11 Forme explicite et forme conditionnelle

Page | 6

Un ensemble peut être décrit en donnant la liste de ses éléments ou une propriété qui les caractérise.

Exemple

L'ensemble des entiers naturels pairs peut s'écrire sous forme explicite $E = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

ou sous forme conditionnelle $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair}\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

L'ensemble de référence doit toujours être précisé. Par exemple,

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0\} \neq \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}.$$

À retenir

$x \in A$	x appartient à A
$x \notin A$	x n'appartient pas à A
$A \subset B$	tout élément de A appartient à B
$A \cup B$	éléments appartenant à A ou à B
$A \cap B$	éléments communs à A et B
$A \setminus B$	éléments de A qui ne sont pas dans B
$A \times B$	couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$
$B \in \wp(A)$	B est un sous-ensemble de A
$ A $	nombre d'éléments de A
A^c	complémentaire de A dans l'ensemble de référence