

ANALYSE I

Ensembles de nombres et propriétés de $\mathbb{R}$

Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Notation: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Le symbole * signifie ici que l'on retire 0 de l'ensemble.

1 Les nombres entiers naturels $\mathbb{N}$

L'ensemble des nombres **entiers naturels** est $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Par convention, 0 est un nombre pair. Les opérations d'addition et de multiplication restent dans $\mathbb{N}$: si $x, y \in \mathbb{N}$, alors $x + y \in \mathbb{N}$ et $xy \in \mathbb{N}$.

En revanche, *la soustraction et la division ne donnent pas toujours un nombre naturel.*

Exemples

$$3 + 5 = 8 \in \mathbb{N}, 3 - 5 = -2 \notin \mathbb{N}, \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

2 Les nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$

L'ensemble des nombres **entiers** relatifs est $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Dans $\mathbb{Z}$, chaque entier x possède un opposé $-x$ tel que $x + (-x) = 0$.

Ainsi, contrairement à $\mathbb{N}$, *la soustraction de deux entiers reste toujours dans $\mathbb{Z}$* . La division, en revanche, ne reste pas toujours dans $\mathbb{Z}$.

Exemples

$$-7 \in \mathbb{Z} \text{ mais } -7 \notin \mathbb{N}, 5 - 12 = -7 \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

3 Les nombres rationnels $\mathbb{Q}$

Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire comme quotient de deux entiers :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ et } b \neq 0 \right\}.$$

Deux fractions représentent le même nombre rationnel lorsque

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Tout entier est rationnel, car pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on peut écrire $x = \frac{x}{1}$. Ainsi, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Page | 2

Pour $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, l'opposé $-x$ appartient encore à $\mathbb{Q}$. Si $x \neq 0$, son inverse multiplicatif $x^{-1} = \frac{b}{a}$ appartient également à $\mathbb{Q}$.

Un même rationnel admet plusieurs écritures sous forme de fraction. Lorsqu'on impose un dénominateur positif et que le numérateur et le dénominateur n 'ont pas de diviseur commun autre que 1, on obtient la fraction irréductible.

Exemples

$$\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}, -5 = \frac{-5}{1} \in \mathbb{Q}, \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$$

4 Réels et nombres irrationnels

L'ensemble $\mathbb{R}$ contient les nombres rationnels mais aussi des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$. Ces nombres sont appelés **irrationnels**.

Nombres irrationnels = $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Un exemple fondamental est $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, donc $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

À retenir

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\sqrt{2}$ est réel mais irrationnel. « Irrationnel » ne signifie pas « non réel ».

5 Symboles de somme $\sum$ et de produit $\prod$

Lorsque plusieurs termes sont additionnés, on utilise le symbole $\sum$. Pour des nombres $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$,

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

De même, le symbole $\prod$ représente un produit :

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n.$$

Par convention, si $m > n$, la somme vide vaut 0 et le produit vide vaut 1.

Exemples

$$\sum_{k=0}^n (2k + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

$$\prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

6 Propriétés utiles des sommes

Page | 3

Les propriétés suivantes seront utilisées régulièrement dans les suites, les séries et les démonstrations par récurrence.

$$\sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$$

La dernière identité est une **somme télescopique** : la plupart des termes intermédiaires s'annulent.

L'indice de sommation est un indice muet : son nom n n'a pas d'importance.

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{i=m}^n a_i.$$

7 Pièges fréquents

- Dans ce cours, $0 \in \mathbb{N}$. Il faut vérifier cette convention, car elle peut varier selon les ouvrages.
- $\mathbb{N}^*$ signifie $\mathbb{N}$ sans 0 ; de même pour $\mathbb{Z}^*$ et $\mathbb{Q}^*$.
- Un entier est toujours rationnel, mais un rationnel n n'est pas nécessairement entier.
- $\sqrt{2}$ est un nombre réel irrationnel : $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

8 Calculs avec les rationnels et les irrationnels

Les rationnels sont stables par addition, soustraction et multiplication. Ils sont également stables par division lorsque le diviseur est non nul.

$$p, q \in \mathbb{Q} \Rightarrow p + q, p - q, pq \in \mathbb{Q},$$

$$p, q \in \mathbb{Q}, q \neq 0 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Si q est rationnel et α irrationnel, alors $q + \alpha$ est irrationnel. Si, en plus, $q \neq 0$, alors $q\alpha$ est irrationnel.

Exemple

Les règles « irrationnel + irrationnel » et « irrationnel $\times$ irrationnel » ne donnent pas toujours un irrationnel :

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q},$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q},$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on dit que n est pair s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$, et impair s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$.

$$n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}.$$

Cette dernière implication se démontre souvent par contraposée : si n est impair, alors n^2 est impair.

9 Factorielle et coefficients binomiaux

Pour $n \in \mathbb{N}$, la factorielle de n est définie par

$$0! = 1, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad \text{si } n \geq 1.$$

Pour $0 \leq k \leq n$, le coefficient binomial est

$$\binom{n}{k} = C(n, k) = \frac{n!}{[k! (n - k)!]}$$

Il compte le nombre de façons de choisir k objets parmi n objets distincts, sans tenir compte de l'ordre.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Exemple

Le nombre de façons de choisir 2 étudiants parmi 5 est $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$.

10 Binôme de Newton

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, le binôme de Newton permet de développer une puissance de la forme $(a + b)^n$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Les coefficients $C(n,k)$ sont les coefficients binomiaux. Dans chaque terme, la somme des exposants de a et de b est égale à n .

Si l'un des deux termes est négatif, son signe doit être conservé dans la puissance.

Page | 5

Exemple

Développons $(2x - 3)^4$. On applique la formule avec $a = 2x$, $b = -3$ et $n = 4$:

$$\begin{aligned}(2x - 3)^4 &= \sum_{k=0}^4 C(4, k)(2x)^{4-k}(-3)^k \\ &= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81.\end{aligned}$$

11 Ordre et inégalités dans $\mathbb{R}$

L'ordre sur $\mathbb{R}$ est total : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, une et une seule des situations $x < y$, $x = y$ ou $x > y$ est réalisée.

L'addition conserve l'ordre :

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z.$$

La multiplication dépend du signe du facteur :

$$x \leq y, z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz,$$

$$x \leq y, z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz.$$

En particulier, le passage à l'opposé inverse l'inégalité et, pour des nombres strictement positifs, le passage à l'inverse l'inverse également :

$$x \leq y \Rightarrow -y \leq -x,$$

$$0 < x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}.$$

Exemple

On ne peut pas multiplier deux inégalités membre à membre sans connaître les signes. Par exemple,

$$-3 \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq 1, \quad \text{mais} \quad (-3)(-1) = 3 > 1 = 1 \cdot 1.$$

Contrairement à $\mathbb{N}$ et à $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ne possède ni plus petit réel strictement positif ni successeur immédiat : entre deux réels distincts, il existe toujours un autre réel.

12 Intervalles de $\mathbb{R}$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Les principaux intervalles sont

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \quad]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

Page | 6 Les symboles $\pm\infty$ ne sont pas des nombres réels et ne sont donc jamais inclus :

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}, \quad]b, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > b\}.$$

Exemple

L'ensemble défini par $-1 < x \leq 3$ s'écrit $] -1, 3]$.

L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 4\}$ s'écrit $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

13 Valeur absolue et distance

La valeur absolue d'un réel x est sa distance à 0 :

$$|x| \geq 0, \quad |-x| = |x|, \quad -|x| \leq x \leq |x|,$$

$$|xy| = |x||y|, \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Pour $a > 0$,

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a,$$

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a,$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a.$$

Exemple

Résoudre $|2x - 1| \leq 1$:

$-1 \leq 2x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$. L'ensemble solution est donc $[0, 1]$.

La distance entre deux réels x et y est

$$\text{dist}(x, y) = |x - y|.$$

$$\text{dist}(x, y) \geq 0, \quad \text{dist}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$\text{dist}(x, z) \leq \text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, z).$$

Ainsi, $|x - a| < r$ signifie que x se trouve à une distance strictement inférieure à r du centre a :

$$|x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r.$$

14 Minimum, maximum et ensembles bornés

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. Un élément $m \in A$ est le minimum de A si $m \leq x$ pour tout $x \in A$. Un élément $M \in A$ est le maximum de A si $x \leq M$ pour tout $x \in A$.

Page | 7

$$m = \min A \Leftrightarrow m \in A \text{ et } \forall x \in A, m \leq x,$$

$$M = \max A \Leftrightarrow M \in A \text{ et } \forall x \in A, x \leq M.$$

Un réel α est un minorant de A si $\alpha \leq x$ pour tout $x \in A$. Un réel β est un majorant de A si $x \leq \beta$ pour tout $x \in A$.

$$A \text{ borné} \Leftrightarrow \exists K > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, |x| \leq K$$

Exemple

Pour $A =]0,1]$, le nombre 0 est un minorant et 1 est un majorant. $\max A = 1$, mais A n'a pas de minimum, car $0 \notin A$.

15 Supremum, infimum et complétude de $\mathbb{R}$

Le **supremum** de A est son plus petit majorant. L'**infimum** de A est son plus grand minorant.

$$s = \sup A \Leftrightarrow s \text{ majore } A \text{ et tout majorant } M \text{ de } A \text{ vérifie } s \leq M,$$

$$i = \inf A \Leftrightarrow i \text{ minore } A \text{ et tout minorant } m \text{ de } A \text{ vérifie } m \leq i.$$

Caractérisation pratique avec ε :

$$s = \sup A \Leftrightarrow [\forall x \in A, x \leq s] \text{ et } [\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : s - \varepsilon < x],$$

$$i = \inf A \Leftrightarrow [\forall x \in A, i \leq x] \text{ et } [\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < i + \varepsilon].$$

La propriété de complétude distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$: *tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ qui est majoré possède un supremum réel; tout sous-ensemble non vide qui est minoré possède un infimum réel.*

Exemple

Pour $A =]0,1[$, on a $\inf A = 0$ et $\sup A = 1$, mais A ne possède ni minimum ni maximum, car $0 \notin A$ et $1 \notin A$.

Si $A \subset B$ et si A et B sont non vides et bornés, alors

$$\sup A \leq \sup B \quad \text{et} \quad \inf A \geq \inf B.$$

16 Propriété archimédienne de $\mathbb{R}$ et applications

Pour tout réel x , il existe un entier naturel n strictement supérieur à x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$

Page | 8 Autrement dit, $\mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$. Même si un réel est très grand, on peut toujours trouver un entier naturel plus grand.

Une formulation équivalente est :

$$\forall a > 0, \forall b > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}^* : na > b$$

En effet, il suffit de choisir un entier $n > \frac{b}{a}$.

Démonstration à partir de la complétude

Supposons, par contradiction, que $\mathbb{N}$ soit majoré. Comme $\mathbb{N}$ est non vide, il possède alors un supremum réel s . Le nombre $s-1 < s$ ne peut pas être un majorant de $\mathbb{N}$, puisque s est le plus petit majorant. Il existe donc un entier n tel que :

$$s - 1 < n \Rightarrow s < n + 1$$

Or $n+1$ appartient à $\mathbb{N}$, ce qui contredit le fait que s majore $\mathbb{N}$. Ainsi, $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

Application 1 Rendre une fraction aussi petite que souhaité

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que :

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Pour obtenir cette inégalité, on choisit, grâce à la propriété archimédienne :

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Les deux membres étant strictement positifs, le passage à l'inverse renverse l'inégalité et donne le résultat.

Exemple : pour obtenir $\frac{1}{n} < 0,001$, il suffit de prendre $n > 1000$, par exemple $n = 1001$. Plus généralement, pour $c > 0$:

$$n > \frac{c}{\varepsilon} \Rightarrow 0 < \frac{c}{n} < \varepsilon$$

Application 2 Satisfaire plusieurs conditions simultanément

Lorsque plusieurs inégalités doivent être satisfaites, on choisit un entier supérieur à tous les seuils nécessaires, donc supérieur à leur maximum.

Exemple lié à la série 4 : soit $y > 0$ avec $y^2 > 2$. On souhaite obtenir :

$$0 < y - \frac{1}{n} < y, \quad \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$$

Choisissons un entier $n \geq 1$ tel que :

$$n > \max\left\{\frac{1}{y}, \frac{2y}{y^2 - 2}\right\}$$

La première condition donne :

$$\frac{1}{n} < y \Rightarrow 0 < y - \frac{1}{n} < y$$

La seconde condition donne :

$$\frac{2y}{n} < y^2 - 2$$

En développant le carré, on obtient :

$$\left(y - \frac{1}{n}\right)^2 = y^2 - \frac{2y}{n} + \frac{1}{n^2} > y^2 - \frac{2y}{n} > 2$$

Comme $0 < y - \frac{1}{n} < y$, le passage au carré donne également une valeur strictement inférieure à y^2 .

Finalement :

$$2 < \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 < y^2$$

Application 3 Déterminer un infimum non atteint

Considérons :

$$A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Tous les éléments de A sont positifs : 0 est donc un minorant. Pour montrer que 0 est le plus grand minorant, prenons un réel $m > 0$. La propriété archimédienne permet de choisir :

$$n > \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{1}{n} < m$$

Ainsi, m ne peut pas être un minorant de A , puisqu'un élément de A est strictement inférieur à m . On conclut que :

$$\inf A = 0$$

Cependant, 0 n'appartient pas à A . L'ensemble ne possède donc pas de minimum.

Application 4 Justifier une convergence

La propriété archimédienne permet de démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Page | 10

Pour tout $\varepsilon > 0$, choisissons un entier $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Pour tout $n \geq N$:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

C'est exactement la condition exprimant la convergence vers 0. Trouver un seul entier répond à une condition d'existence ; démontrer une convergence exige que l'inégalité soit vraie pour tous les indices suffisamment grands.

Application 5 Trouver un rationnel entre deux réels

Soient $a < b$. Choisissons un entier $n \geq 1$ tel que :

$$n > \frac{1}{b-a}$$

Alors :

$$\frac{1}{n} < b-a, \quad n(b-a) > 1$$

Notons k le plus petit entier strictement supérieur à na . Il vérifie $na < k \leq na+1$. Son existence peut être justifiée sans supposer la partie entière déjà connue : choisir un entier naturel $M > |na|$, puis le plus petit entier naturel $j > na+M$. Par minimalité, $j-1 \leq na+M < j$. L'entier $k = j-M$ convient.

Comme $1 < n(b-a)$, on obtient :

$$na < k \leq na+1 < nb$$

En divisant par $n > 0$:

$$a < \frac{k}{n} < b$$

Le nombre $\frac{k}{n}$ étant rationnel, tout intervalle ouvert non vide contient un rationnel. Ainsi, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

À retenir : la propriété archimédienne permet de choisir un entier suffisamment grand, de rendre une fraction suffisamment petite et de justifier rigoureusement les expressions « aussi proche que l'on veut » et « pour un indice suffisamment grand ».

Page | 11 17 Partie entière et applications

La partie entière permet d'associer à chaque réel un entier qui l'encadre par dessous. Elle donne notamment des choix explicites d'entiers et des approximations rationnelles.

Définition

Pour tout réel x , il existe un unique entier k tel que :

$$k \leq x < k + 1$$

Cet entier, noté $[x]$, est appelé la partie entière de x . C'est le plus grand entier inférieur ou égal à x :

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

Exemples :

$$[3,7] = 3, \quad [5] = 5, \quad [-2,3] = -3$$

Attention : pour les nombres négatifs, supprimer les chiffres après la virgule ne donne pas toujours la partie entière. En effet, $-2 > -2,3$, tandis que $-3 \leq -2,3 < -2$.

Existence et unicité

Par la propriété archimédienne, choisissons un entier naturel $M > |x|$. L'ensemble des entiers naturels j strictement supérieurs à $x+M$ est non vide. Il possède un plus petit élément j . Comme $x+M > 0$, on a $j \geq 1$; par minimalité :

$$j - 1 \leq x + M < j$$

En posant $k = j-M-1$, on obtient $k \leq x < k+1$. Pour l'unicité, si deux entiers k et ℓ vérifiaient cet encadrement et $k < \ell$, alors $\ell \geq k+1 > x$, ce qui contredirait $\ell \leq x$. Le cas $\ell < k$ est analogue.

Application 1 Encadrer un réel entre deux entiers consécutifs

La définition donne immédiatement un encadrement de largeur 1. Par exemple :

$$[-2,3] = -3 \Rightarrow -3 \leq -2,3 < -2$$

La partie fractionnaire $x - [x]$ appartient toujours à $[0,1[$, même si x est négatif : $0 \leq x - [x] < 1$

Application 2 Choisir un entier strictement supérieur à un réel

Le plus petit entier strictement supérieur à x est :

$$n = [x] + 1, \quad x < n \leq x + 1$$

Page | 12 Si $x = 4,7$, cet entier vaut 5 ; si $x = 4$, il vaut également 5. L'ajout de 1 garantit donc une inégalité stricte même lorsque x est entier.

Pour $\varepsilon > 0$, on obtient un choix explicite dans la propriété archimédienne :

$$n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Application 3 Construire un rationnel entre deux réels

Soient $a < b$. Choisissons un entier $n > \frac{1}{b-a}$, puis posons :

$$k = [na] + 1$$

La propriété de la partie entière et le choix de n donnent :

$$na < k \leq na + 1 < nb$$

En divisant par $n > 0$, on obtient :

$$a < \frac{k}{n} < b$$

Cette construction explicite redonne la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Exemple : pour $a = 1,41$ et $b = 1,42$, choisissons $n = 200 > 100$. Alors :

$$k = [200 \cdot 1,41] + 1 = 283, \quad 1,41 < \frac{283}{200} = 1,415 < 1,42$$

Application 4 Obtenir une approximation décimale par défaut

Pour un réel x et un entier naturel p , définissons :

$$q_p = \frac{[10^p x]}{10^p}$$

On applique la définition de la partie entière à $10^p x$: $[10^p x] \leq 10^p x < [10^p x] + 1$

Comme $10^p > 0$, la division par 10^p donne : $q_p \leq x < q_p + \frac{1}{10^p}$

L'erreur est donc contrôlée par :

$$0 \leq x - q_p < \frac{1}{10^p}$$

Ainsi, q_p est une approximation décimale par défaut à p chiffres après la virgule. Exemple : $x = 3,14159$ et $p = 2$:

$$q_2 = \frac{[100 \cdot 3,14159]}{100} = \frac{314}{100} = 3,14$$

$$0 \leq 3,14159 - 3,14 = 0,00159 < 0,01$$

La construction vaut aussi pour les réels négatifs : pour $x = -2,345$ et $p = 2$, $q_2 = -2,35$, qui reste inférieur à x .

18 Racines carrées et irrationalité

Pour tout $y \geq 0$, $\sqrt{y}$ désigne l'unique réel $x \geq 0$ tel que $x^2 = y$.

$$\sqrt{y} \geq 0 \quad \text{et} \quad (\sqrt{y})^2 = y.$$

Attention : le symbole $\sqrt{}$ donne toujours la racine non négative.

$$\sqrt{9} = 3, \quad \text{et non } \pm 3,$$

$$\sqrt{(x^2)} = |x| \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Exemple

Preuve classique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux. Alors $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est pair, puis p est pair : $p = 2k$. On obtient $q^2 = 2k^2$, donc q est également pair. Cela contredit le fait que $\frac{p}{q}$ était irréductible. Ainsi $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

19 Densité dans $\mathbb{R}$

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert non vide contient au moins un élément de E :

$$E \text{ dense dans } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \Rightarrow \exists x \in E : a < x < b.$$

Les rationnels et les irrationnels sont tous deux denses dans $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{Q} \text{ dense dans } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ dense dans } \mathbb{R}.$$

Exemple

Entre deux réels distincts $a < b$, il existe une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels. En particulier, $\mathbb{R}$ n'a pas de successeur immédiat.

20 Ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}$

Un ensemble $G \subset \mathbb{R}$ est ouvert si chaque point $x \in G$ possède un petit intervalle centré en x entièrement contenu dans G :

$$G \text{ ouvert} \Leftrightarrow \forall x \in G, \exists \varepsilon > 0 :]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset G.$$

Un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ est fermé si son complémentaire $\mathbb{R} \setminus F$ est ouvert.

Exemple

$]a, b[$ est ouvert, $[a, b]$ est fermé.

$\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

$[a, b[$ n'est en général ni ouvert ni fermé.

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne sont ni ouverts ni fermés.

Toute union d'ouverts est ouverte et toute intersection finie d'ouverts est ouverte. Par complémentarité, toute intersection de fermés est fermée et toute union finie de fermés est fermée.

Ne pas être ouvert ne signifie pas nécessairement être fermé.

À retenir

Ensemble	Description	Exemple
$\mathbb{N}$	entiers naturels	0, 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}$	entiers relatifs	..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
$\mathbb{Q}$	fractions $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$	$\frac{3}{5}$, -7, 0,25
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	irrationnels	$\sqrt{2}$
$[a, b]$	intervalle fermé	$a \leq x \leq b$
$]a, b[$	intervalle ouvert	$a < x < b$
$ x $	distance de x à 0	$ -3 = 3$
$\text{dist}(x, y)$	distance entre x et y	$ x - y $
$\sup A$	plus petit majorant de A	$\sup]0, 1[= 1$
$\inf A$	plus grand minorant de A	$\inf]0, 1[= 0$