
Algèbre Linéaire — Quiz : Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Quiz — Corrigé

Question 1

Soient $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $W = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$. Vrai ou faux ?

1. W contient le vecteur nul 0 .

☐ Vrai ☐ Faux

2. Si $p = 2$, alors W est un plan.

☐ Vrai ☐ Faux

3. Si $p > 2$, alors W n'est pas un plan.

☐ Vrai ☐ Faux

4. Si $w_1, w_2 \in W$, alors $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in W$, quels que soient les scalaires α_1, α_2 .

☐ Vrai ☐ Faux

Question 1 réponse

1. **Vrai.** Une combinaison linéaire dont tous les coefficients valent 0 fournit 0.

2. **Faux.** Deux vecteurs peuvent être colinéaires ou nuls : leur espace engendré n'est alors pas un plan.

3. **Faux.** Trois vecteurs peuvent engendrer un plan : par exemple e_1, e_2 et $e_1 + e_2$.

4. **Vrai.** La stabilité par combinaison linéaire découle de la définition de W .

Question 2

Soit $F = \{v_1, \dots, v_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Vrai ou faux ?

1. Si F n'est pas libre, alors elle est liée.

☐ Vrai ☐ Faux

2. Si F n'est pas liée, alors elle est libre.

☐ Vrai ☐ Faux

3. Si F est libre, alors aucun des vecteurs v_k n'est nul.

☐ Vrai ☐ Faux

4. Si F est liée, alors au moins un vecteur v_k est nul.

☐ Vrai ☐ Faux

5. Si F est libre, alors si on lui rajoute un vecteur, elle devient liée.

☐ Vrai ☐ Faux

6. Si F est libre, alors toute sous-famille $F' \subset F$ est aussi libre.

☐ Vrai ☐ Faux

7. S'il existe une sous-famille $F' \subset F$ libre, alors F est libre.

☐ Vrai ☐ Faux

8. S'il existe une sous-famille $F' \subset F$ liée, alors F est liée.

☐ Vrai ☐ Faux

9. Si $p = 1$ et si le seul vecteur de F est non nul, alors F est libre.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 2 réponse

1. **Vrai.** « Non libre » et « liée » sont équivalents.

2. **Vrai.** « Non liée » signifie libre.

3. **Vrai.** Une famille contenant 0 est liée.

4. **Faux.** Exemple : $(e_1, e_2, e_1 + e_2)$ est liée sans vecteur nul.

5. **Faux.** Dans $\mathbb{R}^3$, ajouter e_3 à (e_1, e_2) conserve une famille libre.

6. **Vrai.** Toute relation dans une sous-famille serait aussi une relation dans F .

7. **Faux.** Une famille liée peut contenir une sous-famille libre.

8. **Vrai.** Une relation de dépendance subsiste quand on ajoute des vecteurs.

9. **Vrai.** Si $\lambda v_1 = 0$ avec $v_1 \neq 0$, alors $\lambda = 0$.

Question 3

Soit $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Vrai ou faux ?

1. $v_1 + \dots + v_p \neq 0$.

☐ Vrai ☐ Faux

2. Il n'existe aucun $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $v_j = 0$.

☐ Vrai ☐ Faux

3. Chaque v_j a toutes ses composantes positives ou nulles.

☐ Vrai ☐ Faux

4. Les v_j sont perpendiculaires deux à deux.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 3 réponse

1. **Vrai.** Une somme nulle produirait une relation non triviale avec tous les coefficients égaux à 1 ($p \geq 1$).

2. **Vrai.** La présence du vecteur nul rendrait la famille liée.

3. **Faux.** Un vecteur libre peut posséder des coordonnées négatives, par exemple $(-1, 0)$.

4. **Faux.** Indépendance linéaire et orthogonalité sont des notions différentes.

Question 4

Vrai ou faux ?

1. Si $A = [a_1 \dots a_n]$ est une matrice $m \times n$, alors $Ax \in \text{Vect}\{a_1, \dots, a_n\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

☐ Vrai ☐ Faux

2. Si $Ax \in \text{Vect}\{v_1, \dots, v_n\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors $A = [v_1 \dots v_n]$.

☐ Vrai ☐ Faux

3. Il existe une matrice A de taille $m \times n$ telle que $A0 \neq 0$.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 4 réponse

1. **Vrai.** On a $Ax = x_1a_1 + \dots + x_na_n$.

2. **Faux.** Une appartenance à un espace engendré ne permet pas de retrouver une famille précise de colonnes.

3. **Faux.** Pour toute matrice A , $A0 = 0$.

Question 5

Vrai ou faux ?

1. Un système $Ax = 0$ ne possède que la solution triviale si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

☐ Vrai ☐ Faux

2. S'il existe un vecteur $b \neq 0$ tel que le système homogène $Ax = b$ possède des solutions non triviales, alors les colonnes de A sont linéairement dépendantes.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 5 réponse

1. **Vrai.** Les solutions de $Ax = 0$ correspondent aux relations entre les colonnes de A .

2. **Faux.** La proposition mélange les expressions « système homogène » et $Ax = b$ avec $b \neq 0$; comme indiqué par la correction de l'enseignant, l'énoncé est faux. On peut prendre $A = I_2$ et $b \neq 0$.

Question 6

Parmi les ensembles suivants (tous munis de la loi évidente d'addition), cochez ceux qui, munis de la loi de multiplication donnée, sont des espaces vectoriels.

1. ☐ $V_1 = \mathbb{R}^2$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, -\lambda y)$, pour $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$.

2. ☐ $V_2 = \mathbb{R}^2$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda^2 y)$, pour $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$.

3. ☐ $V_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(a) = 0\}$, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé et la multiplication scalaire usuelle.

4. ☐ $V_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(0) \in \mathbb{Q}\}$, pour la multiplication scalaire usuelle.

Question 6 réponse

Faux. La compatibilité de la multiplication scalaire avec l'identité 1 échoue dès que $y \neq 0$.

Faux. La distributivité par rapport aux scalaires ne vaut pas pour le carré λ^2 .

Vrai. La somme de deux fonctions qui s'annulent en a s'annule en a , ainsi que leurs multiples réels.

Faux. Une fonction constante égale à 1 appartient à V_4 , mais son multiple par $\sqrt{2}$ n'y appartient pas.

Question 7

Soient $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, $u, v \in V$ deux vecteurs non nuls et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda u + \mu v = \mu u + \lambda v$ si et seulement si $\lambda = \mu$.

1. ☐ Vrai.
2. ☐ Faux.

Question 7 réponse

Faux. Si $u = v$, l'égalité est vérifiée pour tous λ et μ .

Question 8

On considère $u = (1, 2)$, $v = (-6, 3)$ et $w = (-1, -1)$ dans $\mathbb{R}^2$. Entrez le produit $\sqrt{2} \cdot \|u\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|$ (à deux décimales près si nécessaire).

Réponse :

Question 8 réponse

30. $\|u\| = \sqrt{5}$, $\|v\| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $\|w\| = \sqrt{2}$. Le produit vaut $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 30$.

Question 9

On considère $u = (1, 2)$, $v = (-6, 3)$, $w = (-1, -1)$. Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui vous semblent correctes.

1. ☐ On peut écrire v à l'aide de u et w comme suit : $v = 9u + 15w$.
2. ☐ La norme de v satisfait l'équation $\|v\| = 9\|u\| + 15\|w\|$.
3. ☐ L'extrémité du vecteur $u + w$ se trouve sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine.
4. ☐ L'égalité $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ est satisfaite.

Question 9 réponse

Vrai. $9(1, 2) + 15(-1, -1) = (-6, 3) = v$.

Faux. La norme est sous-additive, pas linéaire ; ici $\sqrt{45} \neq 9\sqrt{5} + 15\sqrt{2}$.

Vrai. $u + w = (0, 1)$, dont la norme vaut 1.

Vrai. $u \cdot v = (1)(-6) + (2)(3) = 0$, donc les vecteurs sont orthogonaux et l'égalité de Pythagore est satisfaite.

Question 10

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour $a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $(a+b)_n = a_n + b_n$ et $(\lambda a)_n = \lambda a_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{S}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, muni de ces opérations, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1. ☐ Vrai.
2. ☐ Faux.

Question 10 réponse

Vrai. Les axiomes d'espace vectoriel s'obtiennent terme à terme des axiomes de $\mathbb{R}$.