Algèbre Linéaire — Quiz : Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Quiz

Question 1

Soient $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $W = \text{Vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$. Vrai ou faux ?

1. W contient le vecteur nul 0.

   ☐ Vrai ☐ Faux

2. Si $p = 2$, alors W est un plan.

   ☐ Vrai ☐ Faux

3. Si $p > 2$, alors W n'est pas un plan.

   ☐ Vrai ☐ Faux

4. Si $w_1, w_2 \in W$, alors $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in W$, quels que soient les scalaires α_1, α_2.

   ☐ Vrai ☐ Faux

Question 2

Soit $F = \{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Vrai ou faux ?

1. Si F n'est pas libre, alors elle est liée.

   ☐ Vrai ☐ Faux

2. Si F n'est pas liée, alors elle est libre.

   ☐ Vrai ☐ Faux

3. Si F est libre, alors aucun des vecteurs v_k n'est nul.

   ☐ Vrai ☐ Faux

4. Si F est liée, alors au moins un vecteur v_k est nul.

   ☐ Vrai ☐ Faux

5. Si F est libre, alors si on lui rajoute un vecteur, elle devient liée.

☐ Vrai ☐ Faux

6. Si F est libre, alors toute sous-famille $F' \subset F$ est aussi libre.

☐ Vrai ☐ Faux

7. S'il existe une sous-famille $F' \subset F$ libre, alors F est libre.

☐ Vrai ☐ Faux

8. S'il existe une sous-famille $F' \subset F$ liée, alors F est liée.

☐ Vrai ☐ Faux

9. Si $p = 1$ et si le seul vecteur de F est non nul, alors F est libre.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 3

Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Vrai ou faux ?

1. $v_1 + \cdots + v_p \neq 0$.

☐ Vrai ☐ Faux

2. Il n'existe aucun $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ tel que $v_j = 0$.

☐ Vrai ☐ Faux

3. Chaque v_j a toutes ses composantes positives ou nulles.

☐ Vrai ☐ Faux

4. Les v_j sont perpendiculaires deux à deux.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 4

Vrai ou faux ?

1. Si $A = [a_1 \cdots a_n]$ est une matrice $m \times n$, alors $Ax \in \text{Vect}\{a_1, \ldots, a_n\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

☐ Vrai ☐ Faux

2. Si $Ax \in \text{Vect}\{v_1, \ldots, v_n\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors $A = [v_1 \cdots v_n]$.

☐ Vrai ☐ Faux

3. Il existe une matrice A de taille $m \times n$ telle que $A0 \neq 0$.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 5

Vrai ou faux ?

1. Un système $Ax = 0$ ne possède que la solution triviale si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

☐ Vrai ☐ Faux

2. S'il existe un vecteur $b \neq 0$ tel que le système homogène $Ax = b$ possède des solutions non triviales, alors les colonnes de A sont linéairement dépendantes.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 6

Parmi les ensembles suivants (tous munis de la loi évidente d'addition), cochez ceux qui, munis de la loi de multiplication donnée, sont des espaces vectoriels.

1. ☐ $V_1 = \mathbb{R}^2$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, -\lambda y)$, pour $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$.
2. ☐ $V_2 = \mathbb{R}^2$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda^2 y)$, pour $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$.
3. ☐ $V_3 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}) : f(a) = 0\}$, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé et la multiplication scalaire usuelle.
4. ☐ $V_4 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}) : f(0) \in \mathbb{Q}\}$, pour la multiplication scalaire usuelle.

Question 7

Soient $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $u, v \in V$ deux vecteurs non nuls et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda u + \mu v = \mu u + \lambda v$ si et seulement si $\lambda = \mu$.

1. ☐ Vrai.
2. ☐ Faux.

Question 8

On considère u = (1, 2), v = (−6, 3) et w = (−1, −1) dans $\mathbb{R}^2$. Entrez le produit $\sqrt{2} \cdot \|u\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|$ (à deux décimales près si nécessaire).

Réponse : .....

Question 9

On considère u = (1, 2), v = (−6, 3), w = (−1, −1). Parmi les affirmations suivantes, cochez celles qui vous semblent correctes.

1. ☐ On peut écrire v à l'aide de u et w comme suit : v = 9u + 15w.
2. ☐ La norme de v satisfait l'équation $\|v\| = 9\|u\| + 15\|w\|$.
3. ☐ L'extrémité du vecteur u + w se trouve sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine.
4. ☐ L'égalité $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ est satisfaite.

Question 10

Soit $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $(a_n)_n \in \mathbb{N}$. Pour a, b $\in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $(a+b)_n = a_n + b_n$ et $(\lambda a)_n = \lambda a_n$, pour tout n $\in \mathbb{N}$. Alors $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, muni de ces opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. ☐ Vrai.
2. ☐ Faux.