Algèbre Linéaire — Quiz : Systèmes linéaires

Quiz

Question 1

Parmi les systèmes d'équations ci-dessous, lesquels sont des systèmes linéaires ? Pour chacun, cocher Vrai ou Faux.

1. ☐ Vrai ☐ Faux

$$\begin{cases} \sin(x_1) + x_2 = 0 \\ x_1 + \cos(x_2) = 1 \end{cases}$$

2. ☐ Vrai ☐ Faux

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 7 \end{cases}$$

3. ☐ Vrai ☐ Faux

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 = 2 \\ x_1 = 3 \\ x_1 = 4 \\ x_1 = 5 \end{cases}$$

4. ☐ Vrai ☐ Faux

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 5x_2 + x_1 = -1 \\ -2x_2 + x_1 + x_3 = x_4 \\ 9x_1 - x_2 + x_4 = 3x_1 \end{cases}$$

5. ☐ Vrai ☐ Faux

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_4 = -2 \\ x_1 + x_4x_2 + x_3 + x_4^2 = 1 \end{cases}$$

Question 2

Vrai ou faux ?

1. ☐ Vrai ☐ Faux

Si un système m × n possède une infinité de solutions, et si on rajoute une équation, on obtient un système (m+1)×n qui possède aussi une infinité de solutions.

2. ☐ Vrai ☐ Faux

Si un système $m \times n$ possède une infinité de solutions, et si on rajoute une équation, on obtient un système $(m+1)\times n$ qui est incompatible.

3. ☐ Vrai ☐ Faux

Si un système $m \times n$ $(m \geq 2)$ possède une infinité de solutions, et si on supprime une des m contraintes, alors on obtient un système $(m-1) \times n$ qui possède toujours une infinité de solutions.

4. ☐ Vrai ☐ Faux

Si un système $m \times n$ possède plus d'une solution, alors il en possède une infinité.

5. ☐ Vrai ☐ Faux

Si un système $m \times n$ possède moins de deux solutions, alors il est incompatible.

Question 3

Vrai ou faux ?

1. ☐ Vrai ☐ Faux

Si un système est obtenu à partir d'un autre par une suite infinie d'opérations élémentaires, alors ces deux systèmes ont le même ensemble de solutions.

2. ☐ Vrai ☐ Faux

La composition de deux opérations élémentaires est une opération élémentaire.

3. ☐ Vrai ☐ Faux

Si un système $(*)'$ a été obtenu à partir de $(*)$ en faisant $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, alors on peut récupérer le système $(*)$ en appliquant $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ à $(*)'$.

4. ☐ Vrai ☐ Faux

Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_i$ est une opération élémentaire.

Question 4

Soit $(*)$ un système linéaire $m \times n$. Vrai ou faux ?

1. ☐ Vrai ☐ Faux

Si $m > n$, alors $(*)$ ne possède aucune solution.

2. ☐ Vrai ☐ Faux

Si $m = n$, alors $(*)$ possède exactement une solution.

3. ☐ Vrai ☐ Faux Si $m < n$, alors $(*)$ possède une infinité de solutions.

Question 5

Soit A une matrice $m \times n$. Vrai ou faux ?

1. ☐ Vrai ☐ Faux

Si $Ax = b$ possède plus d'une solution, alors il possède une infinité de solutions.

2. ☐ Vrai ☐ Faux

Si 0 est solution de $Ax = b$, alors $b = 0$.

3. ☐ Vrai ☐ Faux

Le système $Ax = 0$ possède toujours exactement une solution.

4. ☐ Vrai ☐ Faux

Soient b_1 et b_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^m$. Si $Ax = b_1$ possède exactement une solution x_1, si $Ax = b_2$ possède exactement une solution x_2, et si $x_1 \neq x_2$, alors le système $Ax = b_1 + b_2$ possède exactement deux solutions.

Question 6

On considère un système $m \times n$ de la forme $Ax = b$. Vrai ou faux ?

1. ☐ Vrai ☐ Faux

Si une des composantes de b est nulle, alors le système est homogène.

2. ☐ Vrai ☐ Faux

Une solution particulière, c'est un vecteur quelconque quelconque.

3. ☐ Vrai ☐ Faux

Si $b = 0$, et si x est solution du problème homogène $Ax = 0$, alors soit A est la matrice identiquement nulle, soit $x = 0$, soit les deux.

4. ☐ Vrai ☐ Faux

Si x_1 et x_2 sont deux solutions particulières, alors $x_1 + x_2$ est aussi une solution particulière.

5. ☐ Vrai ☐ Faux

Si x_1 et x_2 sont deux solutions particulières, alors $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ est aussi une solution particulière.

6. ☐ Vrai ☐ Faux

Si x est une solution particulière, et si y est une solution du problème homogène associé, alors $x + y$ est une solution particulière.

7. ☐ Vrai ☐ Faux

Si $b = 0$, et si x_1 et x_2 sont deux solutions, alors toute combinaison linéaire de x_1 et x_2 est aussi une solution.

Question 7

Parmi les équations aux inconnues x_1, x_2, x_3 suivantes, cochez celle(s) qui vous semble(nt) linéaire(s).

1. $4x_1 + 2x_2 - x_3 = -3$
2. $\sin^3(\alpha)x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est arbitraire
3. $1/x_1 - x_2 + 3x_3 = -2$
4. $(\sqrt{5}/2)x_1 + x_2 - \pi x_3 = 3$
5. $-x_1 + x_2x_3 = -2$
6. $x_1^2 + x_2^2 = 1$
7. $(\int_1^2 p(t)dt)x_1 - x_2 = 0$, où $p(t)$ désigne un polynôme arbitraire

Question 8

Soit S le système d'équations linéaires aux inconnues x, y : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + y = -5 \end{cases}$

Parmi les possibilités pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, où $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, cochez celle(s) qui sont solutions de S.

1. $\alpha = (1, -1)$
2. $\alpha = (-1, 3)$
3. $\alpha = (2, -3)$

Question 9

Soit S le système d'équations linéaires aux inconnues x, y, z : $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + \frac{72}{y} - 3z = 4 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

Parmi les possibilités pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, cochez celle(s) qui sont solutions de S.

1. $\alpha = (0, 2, 1)$
2. $\alpha = (2, -1, 0)$
3. $\alpha = (-1, 0, -2)$

Question 10

Soit $r \in \mathbb{R}$ un nombre réel non nul et considérons le système d'équations : $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \qquad r \in \mathbb{R}^*$

Supposons que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ soient deux solutions distinctes de S, où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sont des nombres réels. Alors le système S admet une infinité de solutions.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 11

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le système d'équations linéaires aux inconnues x, y donné par

$$\begin{cases} ax + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Parmi les affirmations suivantes, cochez celle(s) qui vous semble(nt) correcte(s). Indication : on peut utiliser la géométrie de deux droites du plan.

☐ Le système S admet toujours une solution, ceci quelle que soit la valeur de $a \in \mathbb{R}$.

☐ Si a = 2, alors le système S n'admet aucune solution.

☐ Il n'existe qu'une seule valeur de $a \in \mathbb{R}$ pour laquelle le système S admet une infinité de solutions.

Question 12

On considère les deux systèmes d'équations linéaires S et S′ donnés par

$$S : \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ -x + z = 0 \\ y - z = -1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad S' : \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ -7x + 7z = 0 \\ -x + y = -1 \end{cases}$$

Alors $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est une solution de S si et seulement si elle est solution de S′ ; autrement dit, S et S′ possèdent le même ensemble de solutions.

1. ☐ Vrai.
2. ☐ Faux.

Question 13

Soient S un système d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et S′ obtenu en multipliant une des équations de S par λ. Pour $\lambda \neq 0$, S et S′ ont le même ensemble de solutions. Qu'en est-il pour $\lambda = 0$?

1. ☐ Les systèmes S et S′ possèdent forcément des ensembles de solutions différents.
2. ☐ Il se peut que S et S′ possèdent les mêmes solutions, mais ce n'est pas toujours le cas.
3. ☐ Les systèmes S et S′ possèdent toujours le même ensemble de solutions.

Question 14

On considère le système d'équations linéaires S suivant. On désigne par A la matrice des coefficients associée à S. Parmi les possibilités suivantes, cochez celle qui vous paraît correcte.

$$\begin{cases} 2x - y - 3z + 6t = 4 \\ 3x - 2y - t = -2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

1. ☐ La matrice A est une matrice de taille 3×5.
2. ☐ La matrice A est une matrice de taille 5×3.
3. ☐ La matrice A est une matrice de taille 3×4.
4. ☐ La matrice A est une matrice de taille 4×3.

Question 15

On considère le système d'équations linéaires de l'exercice précédent. On désigne par B sa matrice augmentée. Parmi les affirmations suivantes, cochez celle qui vous semble correcte.

$$\begin{cases} 2x - y - 3z + 6t = 4 \\ 3x - 2y - t = -2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

1. ☐ Le coefficient B_{23} vaut 1.
2. ☐ Le coefficient B_{23} vaut 0.
3. ☐ Le coefficient B_{23} vaut -1.

Question 16

Soit $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ donnée ci-dessous. Désignons par B la matrice obtenue après avoir échangé les deux lignes de A, puis ajouté la première ligne de A à la deuxième ; par C celle obtenue après avoir ajouté à la première ligne de cette nouvelle matrice la première ligne de A multipliée par -1, puis multiplié la dernière ligne par -1. Alors B=C. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

1. ☐ Vrai.
2. ☐ Faux.

Question 17

On considère A ∈ $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Parmi les possibilités suivantes, cocher celle qui vous semble correcte.

1. ☐ La matrice A est échelonnée, mais elle n'est pas échelonnée réduite.
2. ☐ La matrice A est échelonnée réduite.
3. ☐ La matrice A n'est pas échelonnée (et donc ne peut être échelonnée réduite).

Question 18

On considère B ∈ $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cocher l'affirmation correcte.

1. ☐ La matrice B est échelonnée, mais elle n'est pas échelonnée réduite.
2. ☐ La matrice B est échelonnée réduite.
3. ☐ La matrice B n'est pas échelonnée (et donc ne peut être échelonnée réduite).

Question 19

On considère C ∈ $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Cocher l'affirmation correcte.

1. ☐ La matrice C est échelonnée, mais elle n'est pas échelonnée réduite.
2. ☐ La matrice C est échelonnée réduite.
3. ☐ La matrice C n'est pas échelonnée (et donc ne peut être échelonnée réduite).

Question 20

Soit A ∈ $M_{3\times 5}(\mathbb{R})$, matrice échelonnée définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On considère un système S admettant A comme matrice augmentée. Cocher l'affirmation correcte.

1. ☐ A contient exactement 2 pivots et S admet une unique solution.
2. ☐ A contient exactement 2 pivots et S admet une infinité de solutions.
3. ☐ A contient exactement 2 pivots et S n'admet aucune solution.
4. ☐ A contient exactement 3 pivots et S admet une unique solution.
5. ☐ A contient exactement 3 pivots et S admet une infinité de solutions.
6. ☐ A contient exactement 3 pivots et S n'admet aucune solution.

Question 21

Soient A et B deux matrices 3 × 4 définies par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors A et B sont ligne-équivalentes. Cocher Vrai ou Faux.

1. ☐ Vrai.
2. ☐ Faux.

Question 22

Soient A et B deux matrices 3 × 4 définies par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On dit que B est une forme échelonnée de A; A et B peuvent être ligne-équivalentes. Cocher la proposition correcte.

1. ☐ Vrai.
2. ☐ Faux, car B n'est pas échelonnée.
3. ☐ Faux, car A et B ne sont pas ligne-équivalentes.
4. ☐ Faux, pour une raison différente.

Question 23

Soit S un système d'équations linéaires aux inconnues x, y, z, t et à coefficients réels dont la matrice augmentée est ligne-équivalente à la matrice échelonnée A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En ne vous aidant que de la matrice A, veuillez cocher l'affirmation qui vous paraît correcte.

1. ☐ Le système S n'admet aucune solution.
2. ☐ Le système S admet au moins une solution.

Question 24

On considère le même système d'équations linéaires que dans le quiz précédent, c'est-à-dire un système linéaire aux inconnues x, y, z, t et à coefficients réels dont la matrice augmentée est ligne-équivalente à la matrice échelonnée

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En ne vous aidant que de la matrice A, veuillez cocher les affirmations qui vous paraissent correctes. (Aide : il y en a plus d'une.)

1. ☐ La variable x est une variable libre.

2. ☐ La variable y est une variable libre.
3. ☐ La variable z est une variable principale.
4. ☐ La variable t est une variable principale.
5. ☐ On ne peut pas parler de variables libres/principales dans cette situation.

Question 25

Soient S un système linéaire aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$, A la matrice augmentée associée au système. Si A est échelonnée et contient n pivots, alors le système admet une unique solution.

1. ☐ En effet, c'est toujours le cas.
2. ☐ Parfois oui, parfois non.
3. ☐ Non, ce n'est pas possible.

Question 26

Soient S un système d'équations linéaires à n inconnues (à coefficients réels), $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une solution de S et $c \in \mathbb{R}$ un scalaire non-nul. Parmi les possibilités suivantes, cochez celle(s) qui vous semble(nt) correcte(s).

1. ☐ $c\alpha$ est une solution de S, quelle que soit la nature de ce dernier (homogène ou non).
2. ☐ $c\alpha$ est une solution de S si ce dernier est homogène.
3. ☐ $c\alpha$ est une solution de S si et seulement si ce dernier est homogène.

Question 27

Dans $\mathbb{R}^3$, l'équation $3x + 2y + 4z = 1$ représente :

1. ☐ un plan.
2. ☐ une droite.
3. ☐ un cercle.

Question 28

Parmi les équations suivantes, cochez celle(s) décrivant la droite dans $\mathbb{R}^2$ passant par les points (2, 3) et (4, 4).

1. ☐ $\frac{1}{2}x - y + 2 = 0$.
2. ☐ $-2x + y + 2 = 0$.
3. ☐ $x - 2y = -4$.

Question 29

Énoncé original :

On considère le système linéaire S défini par : $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = t \\ z = 2t + 1 \end{cases}$

Que représente géométriquement le système S dans $\mathbb{R}^3$? Cochez toutes les possibilités valables.

1. ☐ une droite passant par l'origine.
2. ☐ une droite passant par le point (1, 0, 1).
3. ☐ un plan passant par le point (3, 1, 2).
4. ☐ un plan passant par le point (1, 0, 1).

Question 30

Énoncé original :

Le système linéaire aux inconnues x, y, z défini par :

$$\begin{cases} 3x + 4y - \frac{1}{2}z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ \frac{4}{3}y - z = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

possède :

1. ☐ aucune solution.
2. ☐ une unique solution.
3. ☐ une infinité de solutions.

Question 31

Énoncé original :

On considère le système linéaire aux inconnues x, y, z, t défini par :

$$\begin{cases} x + y - 3z - t = -2 \\ 2x - y + t = -7 \\ y - 2z - t = 1 \end{cases}$$

Parmi les possibilités suivantes, cochez toutes les possibilités valables.

1. ☐ Le système S n'admet aucune solution.
2. ☐ Le système S admet une unique solution.
3. ☐ Le système S admet une infinité de solutions.
4. ☐ Le système S admet une solution donnée par (1, 1, 1, 1).
5. ☐ Le système S admet une solution donnée par (−3, 1, 0, 0).
6. ☐ Le système S admet une solution donnée par (−2, 4, 1, 1).

Question 32

Soit a ∈ $\mathbb{R}$ un paramètre. On considère le système S aux inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + ay + 4z = -4 \\ -x + y + az = 2 \end{cases}$$

Cochez l'affirmation correcte.

1. ☐ S ne possède aucune solution si et seulement si a = −2 ou a = 3.

2. ☐ S ne possède aucune solution si et seulement si a = 3.
3. ☐ S ne possède aucune solution si et seulement si a = −2.
4. ☐ S ne possède aucune solution si et seulement si a ∈ $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.

Question 33

Soit A la matrice ci-dessous, et soit B une matrice échelonnée et ligne-équivalente à A. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Cochez l'affirmation correcte.

1. ☐ B ne possède aucune ligne de zéros.
2. ☐ B possède exactement une ligne de zéros.
3. ☐ B possède exactement deux lignes de zéros.
4. ☐ B possède exactement trois lignes de zéros.

Question 34

Énoncé original :

Le système associé à la matrice augmentée A ci-dessous possède : $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 11 & -10 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

1. ☐ une infinité de solutions.
2. ☐ une unique solution.
3. ☐ aucune solution.

De plus, ce système possède :

4. ☐ aucune inconnue libre.
5. ☐ une inconnue libre.
6. ☐ deux inconnues libres.
7. ☐ trois inconnues libres.

Question 35

La forme échelonnée réduite de la matrice A est laquelle des matrices suivantes ?

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{5} \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \end{pmatrix}$

Question 36

Soient $A \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ et $b \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$ définis par : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Sans effectuer un seul calcul, il est possible de déterminer si le système AX = b admet une solution. Cochez la proposition correcte.

1. ☐ Vrai. Le système admet (au moins) une solution.

2. ☐ Vrai. Le système n'admet aucune solution.

3. ☐ Faux. Nous n'avons pas assez d'information pour conclure quoi que ce soit ici.

Question 37

Soit A une matrice de taille 2 × 4. Alors, pour tout vecteur $b \in \mathbb{R}^2$, le système AX = b admet une solution.

1. ☐ Vrai.

2. ☐ Faux.

Question 38

Le système suivant possède-t-il une solution réelle ?

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y = 3 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

1. ☐ Oui.

2. ☐ Non.

Question 39

Le système suivant possède-t-il une solution réelle ? $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y = 3 \\ x + z = 3 \end{cases}$

1. ☐ Oui.

2. ☐ Non.