Algèbre Linéaire — Quiz : Espaces vectoriels

Quiz

Question 1

Parmi les ensembles de vecteurs suivants, lesquels sont des espaces vectoriels ?

1. $V = \{0\}$ (ne contient que le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$).

☐ Vrai ☐ Faux

2. V est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont la norme est égale à 1.

☐ Vrai ☐ Faux

3. V est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ colinéaires à $x = (1, 1, \ldots, 1)^T$.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 2

Parmi les ensembles de fonctions suivants, lesquels sont des espaces vectoriels ?

1. V est l'ensemble des fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que $f(a) = 0$.

☐ Vrai ☐ Faux

2. V est l'ensemble des fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que $f(a) = -1$.

☐ Vrai ☐ Faux

3. V est l'ensemble des fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que $f(a) = -f(b)$.

☐ Vrai ☐ Faux

4. V est l'ensemble des fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que $f(a)f(b) = 0$.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 3

Vrai ou faux ?

1. Si V est un espace vectoriel dont les éléments sont des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors, pour tout $f \in V$, on a $f(\alpha s + \beta t) = \alpha f(s) + \beta f(t)$, pour tous $\alpha, \beta, s, t \in \mathbb{R}$.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 4

Vrai ou faux ?

1. Soit V l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $f, g \in V$ sont colinéaires, c'est qu'il existe une fonction $h \in V$ telle que $f = hg$.

☐ Vrai ☐ Faux

2. Si deux matrices réelles sont colinéaires, alors elles sont de mêmes dimensions.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 5

Soit $\mathscr{F} = \{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel V. Vrai ou faux ?

1. Si $\mathscr{F}$ est libre alors aucun des v_j n'est le vecteur nul.

☐ Vrai ☐ Faux

2. $\mathscr{F}$ est liée si et seulement si un des vecteurs de $\mathscr{F}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 6

Soit V l'espace de toutes les fonctions réelles sur $\mathbb{R}$, et W le sous-espace vectoriel de V engendré par $f_1(t) = \sin(t)$ et $f_2(t) = \cos(t)$. Vrai ou faux ?

1. Toute fonction $f \in W$ est périodique.

☐ Vrai ☐ Faux

2. Toute fonction $f \in W$ est bornée.

☐ Vrai ☐ Faux

3. Il existe $f \in W$ telle que $\lim(t \to +\infty) f(t)$ existe.

☐ Vrai ☐ Faux

4. Il existe $f \in W$ telle que $f(\sqrt{2}) = \pi$.

☐ Vrai ☐ Faux

5. Il existe $f \in W$ telle que $f(\pi/4) = 0$.

☐ Vrai ☐ Faux

6. Si $f \in W$, alors $f' \in W$ (f' : dérivée de f).

☐ Vrai ☐ Faux

Question 7

Soit V l'espace de toutes les fonctions réelles sur $\mathbb{R}$, et soit $\mathbb{P}_2$ le sous-espace de V des polynômes de degré au plus égal à deux. Vrai ou faux ?

1. Tout $p \in \mathbb{P}_2$ est de degré 2.

☐ Vrai ☐ Faux

2. Si $p \in \mathbb{P}_2$, alors $t \mapsto p(t)$ est une fonction paire.

☐ Vrai ☐ Faux

3. Il existe une infinité de polynômes $p \in \mathbb{P}_2$ qui sont bornés.

☐ Vrai ☐ Faux

4. Il existe $p \in \mathbb{P}_2$ tel que $p(-1) = p(1) = 1$ et $p(2) = 0$.

☐ Vrai ☐ Faux

5. Il existe $p \in \mathbb{P}_2$ tel que $p(1) = p(2) = p(3) = 0$.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 8

Vrai ou faux ?

1. La dimension d'un espace vectoriel V, c'est le plus grand entier n pour lequel il existe une famille libre de vecteurs de V, contenant n vecteurs.

☐ Vrai ☐ Faux

2. $\dim(\mathbb{R}^n) = p \dim(\mathbb{R}^{n-p})$.

☐ Vrai ☐ Faux

3. Si $\dim(V) = n$ et si $v \in V$, $v \neq 0$, alors $\dim(V \setminus \{v\}) = n - 1$.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 9

Soit A une matrice $m \times n$, et soit $\tilde{A}$ sa réduite. Vrai ou faux ?

1. Pour trouver une base de Im(A), on prend les colonnes de $\tilde{A}$ qui contiennent un pivot.

☐ Vrai ☐ Faux

2. Si $A = [a_1 \cdots a_n]$, et si $\tilde{A}$ contient k pivots, alors $\{a_1, \ldots, a_k\}$ est une base de Im(A).

☐ Vrai ☐ Faux

3. La dimension de Im(A) est égale au nombre de colonnes de $\tilde{A}$ contenant un pivot.

☐ Vrai ☐ Faux

4. $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(\tilde{A})$.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 10

Soit A une matrice $m \times n$ et soit $\tilde{A}$ sa réduite. Vrai ou faux ?

1. $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\tilde{A})$.

☐ Vrai ☐ Faux

2. $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A^T)$.

☐ Vrai ☐ Faux

3. $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(\tilde{A})$.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 11

Soit $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $(a_n)_n \in \mathbb{N}$. On définit $(a+b)_n = a_n + b_n$ et $(\lambda a)_n = \lambda a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$, muni de ces opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 12

Soient V un espace vectoriel, $U \subset V$ un sous-espace vectoriel de V et $u \in U$. Alors $-u$ appartient également à U.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 13

Soit $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. Parmi les sous-ensembles suivants, cochez ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.

1. $W_1 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}) : f(x)=f(y) \text{ pour tous } x,y \in \mathbb{R}\}$ (fonctions constantes).

☐ Vrai ☐ Faux

2. $W_2 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}) : f(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$ (fonctions positives).

☐ Vrai ☐ Faux

3. $W_3 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}) : f(-x)=f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$ (fonctions paires).

☐ Vrai ☐ Faux

4. $W_4 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}) : f(-x)=-f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$ (fonctions impaires).

☐ Vrai ☐ Faux

Question 14

Soit $V=\mathbb{P}(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Alors $2x^2-10 \in \mathrm{Vect}\{x^2+2x-3, x+1\}$.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 15

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\{v_1,\ldots,v_k\} \subset V$ une liste de vecteurs. Si $w \in V$ est un vecteur non nul et différent de $v_1,\ldots,v_k$, alors $\text{Vect}\{v_1,\ldots,v_k\} \subsetneq \text{Vect}\{v_1,\ldots,v_k,w\}$.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 16

Soit $V=\mathbb{R}^2$ et W le sous-espace de V engendré par $\{(2,1)\}$. Alors $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=2y\}$.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 17

Soient $W_1=\text{Vect}\{x^2+2x+1, 4\}$ et $W_2=\text{Vect}\{x^2+1, 2\}$, deux sous-espaces vectoriels de $V=\mathbb{P}(\mathbb{R})$. Alors $W_1+W_2=\text{Vect}\{x^2,x,1\}$.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 18

Soit $V=\mathbb{P}(\mathbb{R})$ et considérons les sous-espaces $W_1=\text{Vect}\{x+3\}$ et $W_2=\text{Vect}\{x^2,x+7,2\}$. Alors $W_1+W_2=W_1 \oplus W_2$.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 19

L'espace-colonne de la matrice A = ((1,0,2),(−1,1,0),(1,1,4)) est égal à $\mathbb{R}^3$ tout entier. Les triplets indiquent successivement les lignes de A.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 20

L'espace-ligne de la matrice A = ((1,0,2),(−1,1,0),(1,1,4)) est égal à $\text{Vect}\{(1,1,4),(0,1,2)\}$. Les triplets indiquent successivement les lignes de A.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 21

Soient V un espace vectoriel et $S \subset V$ une collection de vecteurs. Parmi les possibilités suivantes, cochez toutes celles où S est une famille libre de V.

1. ☐ $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(-2, 2, 0), (5, 5, 5), (2, 0, 1)\}$.

2. ☐ $V = P_7(\mathbb{R})$, $S = \{(x + 1)(x - 1), x + 1, 1\}$.

3. ☐ $V = \mathscr{F}(\mathbb{R})$, $S = \{\sin, f, \ln, 0\}$, où $f(x) = x^2 + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. ☐ $V = \mathscr{F}(\mathbb{R})$, $S = \{3\sin^2, 2\cos^2, 9\}$.

Question 22

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $S_1, S_2 \subset V$ deux listes finies linéairement indépendantes telles que $S_1 \cup S_2$ est liée. Alors la somme $\text{Vect}(S_1) + \text{Vect}(S_2)$ ne peut pas être directe.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 23

Plus généralement, si $S_1, S_2 \subset V$ sont deux familles quelconques telles que $S_1 \cup S_2$ est liée, alors la somme $\text{Vect}(S_1) + \text{Vect}(S_2)$ ne peut pas être directe.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 24

Soient V un espace vectoriel et $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ une famille liée. Parmi les affirmations suivantes, cochez celle qui vous semble correcte.

1. ☐ Si l'on retire $k - 1$ vecteurs de S, la famille restante est liée.

2. ☐ Si l'on retire $k - 1$ vecteurs de S, la famille restante est libre.

3. ☐ Aucune des possibilités citées ci-dessus.

Question 25

Soit $V = \mathbb{R}$. Parmi les possibilités suivantes, cochez celles qui vous semblent correctes.

1. ☐ La liste $\{0\}$ est une base de V.

2. ☐ La liste $\{1\}$ est une base de V.

3. ☐ La liste $\{37\}$ est une base de V.

Question 26

Soient $S = \{\cos^2, \sin^2, 1\}$ et $V = \text{Vect}(S) \subset \mathscr{F}(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel engendré par la liste S. Parmi les affirmations suivantes, cochez celle qui vous semble correcte.

1. ☐ La dimension de V est égale à 0.

2. ☐ La dimension de V est égale à 1.

3. ☐ La dimension de V est égale à 2.

4. ☐ La dimension de V est égale à 3.

5. ☐ La dimension de V est plus grande ou égale à 4.

Question 27

Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 28

Soit $V = P_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 3. Considérons cinq polynômes $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \in V$. Cochez toutes les affirmations correctes.

1. ☐ Il se peut que $S_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ engendre V.

2. ☐ Si $S_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ engendre V, alors cette dernière est une base de V.

3. ☐ Si $S_3 = \{p_1, p_2, p_3\}$ est linéairement indépendante, alors cette dernière est une base de V.

4. ☐ La liste $S_4 = \{p_1, p_3, p_4, p_5\}$ est libre si et seulement si elle est une base de V.

Question 29

On considère le système homogène S à trois inconnues x, y, z :

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ -2x + 4z &= 0 \\ 2y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

Quelle est la dimension de l'espace des solutions de S ?

1. ☐ 0.

2. ☐ 1.

3. ☐ 2.

4. ☐ 3.

5. ☐ Elle est supérieure ou égale à 4.

Question 30

Soient V un espace vectoriel et U, W $\subset$ V deux sous-espaces avec dim U = 3 et dim W = 2. Cochez toutes les affirmations correctes.

1. ☐ Le sous-espace $U \cap W$ satisfait $\dim(U \cap W) \leq 3$.

2. ☐ Le sous-espace $U \cap W$ satisfait $\dim(U \cap W) \leq 2$.

3. ☐ Il est possible d'avoir $U \cap W = U$.

4. ☐ Il est possible d'avoir $U \cap W = W$.

Question 31

Soit $V = \mathbb{R}^3$. Lesquels des sous-ensembles S suivants sont libres ? Donnez toutes les réponses correctes.

1. ☐ $S = \{(1, -3, 5), (2, 2, 4), (4, -4, 14)\}$.

2. ☐ $S = \{(1, 7, 7), (2, 7, 7), (3, 7, 7)\}$.

3. ☐ $S = \{(0, 0, -1), (1, 0, 4)\}$.

4. ☐ $S = \{(9, 9, 0), (2, 0, 1), (3, 5, -4), (12, 12, -1)\}$.

Question 32

Soit $V = \mathbb{R}[x]$. Lesquels de ces sous-ensembles S de V sont libres ? Donnez toutes les réponses correctes.

1. ☐ $S = \{9x^2 - x + 3, 3x^2 - 6x + 5, -5x^2 + x + 1\}$.

2. ☐ $S = \{4x^2 + 1, -x^2\}$.

3. ☐ $S = \{1, 1 + x, 1 - x\}$.

4. ☐ $S = \{7x^2 + x + 2, 2x^2 - x + 3, -3x^2 + 4\}$.

5. ☐ $S = \{3x^2 + 3x + 8, 2x^2 + x, 2x^2 + 2x + 2\}$.

6. ☐ $S = \{3x^2 + 3x + 8, 2x^2 + x, 2x^2 + 2x + 2, 5x^2 - 2x + 8\}$.

Question 33

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Cochez les affirmations correctes.

1. ☐ $S = \emptyset$ est une famille libre de V.

2. ☐ S = V est une famille libre de V.

Question 34

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie m, et S et T deux sous-ensembles finis de V. Cochez toutes les affirmations correctes.

1. ☐ Si $\text{Vect}(S) = V$, alors $|S| \geq m$.

2. ☐ Si $|S| = \dim V$, alors S est une base de V.

3. ☐ Si S et T sont libres, alors $S \cup T$ est libre.

4. ☐ Si S et T sont libres, alors $S \cap T$ est libre.

5. ☐ Si S est liée, alors $S \cup T$ est liée.

6. ☐ Si S et T sont liées, alors $S \cap T$ est liée.

7. ☐ Si $0 \neq v \in V$ et $1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, alors v et αv sont linéairement dépendants.

8. ☐ Si $V = M_{p \times q}(\mathbb{R})$ et $2a_{11} = b_{11}$ et $a_{22} = 2b_{22}$, alors $\{A, B\}$ est libre.

Question 35

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Est-ce qu'une base de V peut contenir l'élément trivial 0 ?

1. ☐ Oui.

2. ☐ Non.

Question 36

Soit $V = P_3(\mathbb{R})$ et $S = \{x^3 - x, x^3 + x, x^2, x^2 + \pi\} \subset V$. Cochez toutes les affirmations correctes.

1. ☐ S est liée.

2. ☐ Vect(S) = V.

3. ☐ $(x, x^2, x^3, 1 + x + x^2 + x^3)$ est une base de Vect(S).

Question 37

Soient $V = \mathbb{R}^3$ et $S = \{(1, 1, 3), (-1, 2, 0), (1, 4, 6)\}$. Donnez toutes les réponses correctes.

1. ☐ Vect(S) = V.

2. ☐ dim Vect(S) = 2.

3. ☐ ((2, 5, 9), (0, 1, 1)) est une base de Vect(S).

4. ☐ ((1, 1, 3), (−1, 2, 0), (1, 1, 1)) est une base de V.

Question 38

Soient $V = \mathbb{R}^3$ et $S = \{(1, -3, 2), (4, 1, 0), (0, 2, -1)\}$. Donnez toutes les réponses correctes.

1. ☐ dim Vect(S) = 2.

2. ☐ dim Vect(S) ≤ 3.

3. ☐ Vect(S) = V.

4. ☐ S est une base de V.

5. ☐ S est une famille libre de V.

Question 39

On considère AX = 0 avec A = ((1, 0, −1/2, 0, 0), (0, 1, 1/3, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0)) et $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Soit W l'espace des solutions. Cochez toutes les affirmations correctes.

1. ☐ dim W < 2.

2. ☐ dim W > 2.

3. ☐ ((−1/2, 1/3, −1, 1, 0)) est une base de W.

4. ☐ Aucune des trois possibilités ci-dessus n'est correcte.

5. ☐ ((0, 0, 0, 0, 1)) est une base de W.

6. ☐ ((3, −2, 6, −6, 0), (0, 0, 0, 0, 1)) est une base de W.

7. ☐ ((3, 2, 6, −6, 0), (0, 0, 0, 0, 2)) est une base de W.

8. ☐ Aucune des trois possibilités ci-dessus n'est correcte.

Question 40

Soit $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(d_{11}, \ldots, d_{nn})$ une matrice diagonale. Cochez toutes les affirmations correctes.

1. ☐ La dimension de l'espace ligne de D est égale à celle de l'espace colonne de D.

2. ☐ La dimension de l'espace ligne de D est égale au nombre de i tels que $d_{ii} = 0$.

3. ☐ La dimension de l'espace ligne de D est égale au nombre de i tels que $d_{ii} \neq 0$.

Question 41

Soit $V = P_7(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 7. Soient $W_1 = \text{Vect}\{x^2 - 2, x + 3\}$ et $W_2 = \text{Vect}\{x^3 - 7x^2 + 2x - 1, 3x^2 - 2x - 12\}$. Entrez la dimension de $W = W_1 + W_2$.

Réponse : .....

Question 42

Soit $V = M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Les sous-espaces W_1 et W_2 sont définis par les matrices ci-dessous. Entrez $\dim(W_1 + W_2)$.

$W_1 = \{aE_{11} + bE_{12} + cE_{23} + dE_{33} : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$, où E_{ij} désigne la matrice élémentaire.

$W_2 = \{xE_{11} + yE_{22} + zE_{31} : x,y,z \in \mathbb{R}\}$.

Réponse : .....

Question 43

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Si B est une matrice échelonnée telle que A est ligne-équivalente à B, alors le rang-ligne de A est égal au nombre de pivots de B.

☐ Vrai ☐ Faux

Question 44

Soit $V = P_5(\mathbb{R})$, avec la base ordonnée $\mathcal{B}=(1,t,t^2,t^3,t^4,t^5)$. On considère $S=(t^5+2t+1, t^4-t^2+7t+3, 2t^3+2t^2-t)$ et la matrice A dont les lignes sont les coordonnées des éléments de S dans $\mathcal{B}$. En

n'utilisant que des opérations élémentaires de type III, on applique la méthode de la vidéo 4.11. Cochez la seule proposition correcte.

1. ☐ La matrice obtenue est échelonnée et sa diagonale est égale à I_6.

2. ☐ La matrice obtenue est échelonnée et sa diagonale n'est pas égale à I_6.

3. ☐ La matrice obtenue n'est pas échelonnée.

Question 45

On considère $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Soient $v_1=(1,-1,1)$, $v_2=(1,1,1)$ et $v_3=(0,1,1)$. Soit C l'espace colonne de A. Lesquelles des propositions suivantes sont correctes ?

1. ☐ $v_1 \in C$.

2. ☐ $v_2 \in C$.

3. ☐ $v_3 \in C$.

Question 46

Soit $A \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Que vaut son espace ligne L ? Cochez toutes les réponses correctes.

1. ☐ $L = \mathbb{R}^4$.

2. ☐ $L = \{(t,u,u,v) : t,u,v \in \mathbb{R}\}$.

3. ☐ $L = \{(\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\delta, \delta) : \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}\}$.

Question 47

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $M \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & m & m-1 \\ 1 & 3 & m \\ 1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$$

On note L l'espace ligne de M. Cochez toutes les réponses correctes.

1. ☐ Quelle que soit la valeur de m, on a L = $\mathbb{R}^3$.

2. ☐ Si m = −9/2, alors L = {0}.

3. ☐ Si m ≠ −9/2, alors L = $\mathbb{R}^3$.

4. ☐ Si m = −9/2, alors L = Vect{(4,−9,−11),(0,3,−1)}.

Question 48

Soit V=$P_3(\mathbb{R})$, v=$2x^2+x$, et $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1=(1,x,x^2,x^3)$. Cochez la proposition correcte relative à $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$. Puis répondez pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}_2=(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3)$.

1. ☐ Dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$, [v] = (0,1,2,0).

2. ☐ Dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$, [v] = (0,2,1,0).

3. ☐ Dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}_2$, [v] = (−1,−1,2,0).

4. ☐ Dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}_2$, [v] = (1,2,−1,0).

Question 49

Soit V = $\mathbb{R}^4$ et v=(1,−1,2,3). Les vecteurs des bases ordonnées $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}_2$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}_3$ sont les colonnes des matrices ci-dessous :

$\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$: $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{\mathcal{B}}_2$: $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{\mathcal{B}}_3$: $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cochez toutes les propositions correctes.

1. ☐ Les coordonnées de v par rapport à $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$ sont (1,−1,2,3).

2. ☐ Les coordonnées de v par rapport à $\mathcal{B}_2$ sont $(2,-3,-1,3)$.

3. ☐ Les coordonnées de v par rapport à $\mathcal{B}_3$ sont $(-2,6,-1,3)$.

Question 50

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soient U,W deux sous-espaces de V tels que dim U = 4, dim W = 5 et dim(U+W)=5. Cochez toutes les réponses correctes dans chacune des deux séries.

1. ☐ On a obligatoirement dim V = 5.

2. ☐ On a obligatoirement dim V ≤ 5.

3. ☐ On a obligatoirement dim V ≥ 5.

4. ☐ On a obligatoirement $\dim(U \cap W) \geq 0$.

5. ☐ On a obligatoirement $U \subset W$.

6. ☐ On a obligatoirement $W \subset U$.

Question 51

Soit $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. La collection S des cinq matrices suivantes est-elle une base de V ?

$A1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

$A3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$A5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. ☐ Oui.

2. ☐ Non.

Question 52

Soit $D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Parmi les affirmations suivantes, cochez celle(s) qui est (sont) correcte(s).

1. ☐ La dimension de l'espace ligne de D est égale à la dimension de l'espace colonne de D.

2. ☐ La dimension de l'espace ligne de D est égale au nombre de $1 \leq i \leq n$ tels que $d_{ii} = 0$.

3. ☐ La dimension de l'espace ligne de D est égale au nombre de $1 \leq i \leq n$ tels que $d_{ii} \neq 0$.

Question 53

Soit $A \in M_{4\times5}(\mathbb{R})$ la matrice dont les lignes sont :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

On désigne par L son espace ligne et on pose $v_1=(0,2,4,2,2)$, $v_2=(4,4,4,8,0)$, $v_3=(8,2,0,10,2)$, $v_4=(6,3,2,9,1)$.

Groupe A — Cochez toutes les propositions correctes.

1. ☐ $L = \mathbb{R}^5$.

2. ☐ $L = \text{Vect}\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.

3. ☐ Le rang ligne de A vaut 3.

Groupe B — Cochez toutes les propositions correctes.

1. ☐ $\dim L \leq 5$.

2. ☐ $\dim L \leq 4$.

3. ☐ $\dim L = 4$.

4. ☐ $\dim L = 3$.

Groupe C — Cochez toutes les propositions correctes.

1. ☐ $(1,0,0,0,0) \in L$.

2. ☐ $(0,0,1,0,2) \in L$.

3. ☐ $(1,0,0,1,1) \in L$.

Groupe D — Cochez toutes les propositions correctes.

1. ☐ $\{(1,0,0,1,1),(0,1,0,1,-3),(0,0,1,0,2)\}$ est une base de L.

2. ☐ $\{(1,0,0,1,1),(0,1,0,1,-3),(0,0,1,0,0)\}$ est une base de L.

3. ☐ $\{(1,0,0,1,1),(0,1,0,1,-3),(0,0,1,0,2),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$ est une base de L.

Question 54

$S = \{(2,5,3),(1,0,2)\}$, $T = \{(2,0,5),(3,5,5)\} \subset \mathbb{R}^3$. Que vaut $\text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T)$?

1. ☐ $\text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T) = \{0\}$.

2. ☐ $\text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T) = \text{Vect}\{(3,5,5)\}$.

3. ☐ $\text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T) = \text{Vect}\{(6,10,10)\}$.

4. ☐ $\text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T) = \text{Vect}\{(3,5,5),(1,0,2)\}$.

Question 55

Soit $S = \{x - 3, x(x - 3), x^2(x - 3)\} \subset P_3(\mathbb{R})$. Que vaut Vect(S) ?

1. ☐ $\text{Vect}(S) = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(0) = p(3) = 0\}$.

2. ☐ $\text{Vect}(S) = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(3) = 0\}$.

3. ☐ Aucune des deux réponses ci-dessus.

Question 56

Soit $S = \{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, où E_{ij} est la matrice canonique. Est-il vrai que $\text{Vect}(S) = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

1. ☐ Non.

2. ☐ Oui.

Question 57

Soient $S = \{(2,5,3)\}$ et $T = \{(2,0,5)\} \subset \mathbb{R}^3$. Que vaut $\text{Vect}(S) + \text{Vect}(T)$?

1. ☐ $\text{Vect}\{(4,10,6),(1,0,5/2)\}$.

2. ☐ $\text{Vect}\{(4,5,8),(1,0,5/2)\}$.

3. ☐ $\text{Vect}\{(4,5,8),(2,5/2,4)\}$.

4. ☐ $\text{Vect}\{(4,5,8)\}$.

Question 58

Soient S = {(2,5,5,1)} et T = {(2,0,5,2)} ⊂ $\mathbb{R}^4$. La somme Vect(S) + Vect(T) est-elle directe ?

1. ☐ Oui.

2. ☐ Non.

Question 59

Soient S = {(2,5,3),(1,0,2)} et T = {(2,0,5),(3,5,5)} ⊂ $\mathbb{R}^3$. La somme Vect(S) + Vect(T) est-elle directe ?

1. ☐ Oui.

2. ☐ Non.

Question 60

S = {(2,5,3),(1,0,2)}, T = {(2,0,5),(3,5,5)} ⊂ $\mathbb{R}^3$. Que vaut Vect(S) + Vect(T) ?

1. ☐ Vect{(2,5,3),(1,0,2),(3,5,5)}.

2. ☐ Vect{(2,5,3),(1,0,2),(2,0,5)}.

3. ☐ $\mathbb{R}^3$.

Question 61

Soient U et W des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V. Déterminer tous les triplets (V,U,W) suivants tels que U+W=V.

1. ☐ V=$\mathbb{R}^3$, U={(x,y,z):x=y}, W={(x,y,z):x=0}.

2. ☐ V=$\mathbb{R}^3$, U={(x,y,z):x=y,z=0}, W={(x,y,z):x=0}.

3. ☐ V=$\mathbb{R}^3$, U={(x,y,z):y=z=0}, W={(x,y,z):z=0}.

4. ☐ V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque et U=W=V.

5. ☐ V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque, U=V et W={0}.

6. ☐ V=P($\mathbb{R}$), U l'ensemble des fonctions polynomiales constantes et W={f∈V:f(0)=0}.

Question 62

Soient U et W des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V. Déterminer tous les triplets (V,U,W) suivants tels que U+W soit une somme directe.

1. ☐ $V=\mathbb{R}^3$, $U=\{(x,y,z):x=y\}$, $W=\{(x,y,z):x=0\}$.

2. ☐ $V=\mathbb{R}^3$, $U=\{(x,y,z):x=y,z=0\}$, $W=\{(x,y,z):x=0\}$.

3. ☐ $V=\mathbb{R}^3$, $U=\{(x,y,z):y=z=0\}$, $W=\{(x,y,z):z=0\}$.

4. ☐ V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque et U=W=V.

5. ☐ V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque, U=V et $W=\{0\}$.

6. ☐ $V=P(\mathbb{R})$, $U=\{f\in V:f(x)=f(y)$ pour tous $x,y\in\mathbb{R}\}$, $W=\{f\in V:f(0)=0\}$.

Question 63

Soient $S = \{x-3,\ x(x-3),\ x^2(x-3)\} \subset P_3(\mathbb{R})$ et $T = \{x-5,\ x(x-5),\ x^2(x-5)\}$. On pose U=Vect(S) et W=Vect(T). Cochez toutes les affirmations correctes.

1. ☐ La somme U+W est directe.

2. ☐ On a $U\cap W=\{0\}$.

3. ☐ On a $U+W=P_3(\mathbb{R})$.

Question 64

Soit $A \in M_{4\times5}(\mathbb{R})$ la matrice suivante, et C son espace colonne. Cochez toutes les affirmations correctes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \\ -4 & -8 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. ☐ C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.

2. ☐ C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3. ☐ $C = \mathbb{R}^5$.

4. ☐ $C = \mathbb{R}^4$.

5. ☐ $C = Vect\{(1,2,3,-4),(0,1,2,1),(0,0,2,7)\}$.

6. ☐ $C = \text{Vect}\{(1,2,3,-4),(0,1,2,1),(0,-2,-2,5),(0,0,0,0)\}$.

7. ☐ $(1,4,13,18) \in C$.

8. ☐ $(3,8,11,-17) \in C$.

9. ☐ $C = \{(s,2s+t,3s+2t+2u,-4s+t+7u) : s,t,u \in \mathbb{R}\}$.