

ALGÈBRE LINÉAIRE

Chapitre 4 : Calcul matriciel et matrices inversibles

1. Tailles et opérations de base

Une **matrice** $A \in M_m \times_n(\mathbb{R})$ possède **m** lignes et **n** colonnes.

Son coefficient a_{ij} est situé à la ligne i et à la colonne j .

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}).$$

A possède **2 lignes et 3 colonnes**. Par exemple, $a_{23} = 6$

- Deux matrices sont **égales** si leurs tailles et tous leurs coefficients sont égaux.
- On **additionne** uniquement des matrices de même taille, coefficient par coefficient.

Exemple

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

On additionne les coefficients situés à la même position.

- Multiplier une matrice **par un scalaire** revient à multiplier chacun de ses coefficients.

Exemple

$$B = 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Chaque coefficient est multiplié par 3.

- La **matrice nulle** a tous ses coefficients nuls. $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

1.1 Produit de matrices

Si A est $m \times n$ et B est $n \times p$, alors AB est défini et sa taille est $m \times p$. Le nombre de colonnes du premier facteur doit évaluer le nombre de lignes du second facteur.

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Pour chaque coefficient, on fait le produit scalaire de la ligne i de A avec la colonne j de B . Si $B = [b_1 \dots b_p]$, alors $AB = [Ab_1 \dots Ab_p]$. Les colonnes de AB sont donc des images des colonnes de B par l'application $x \mapsto Ax$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Chaque coefficient est obtenu en multipliant une **ligne de A** par une **colonne de B**

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}.$$

On constate que $BA \neq AB$: l'ordre des facteurs compte.

2. Propriétés du produit et pièges

Lorsque les tailles sont compatibles, le produit est

- *associatif* : $(AB)C = A(BC)$.
- *distributif* : $A(B+C) = AB+AC$ et $(A+B)C = AC+BC$.
- Les scalaires peuvent se déplacer : $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.
- **L'identité I_n** est la matrice carrée avec des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

Par exemple $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Pour A de taille $m \times n$, $I_m A = A = A I_n$.

2.1 Ordre des facteurs

Le produit n'est pas commutatif en général. Même si AB existe, BA peut ne pas être défini. Exemple: une matrice 2×3 peut multiplier une matrice 3×4 , mais le produit en sens inverse n'existe pas.

Si A est $m \times n$, on peut la multiplier à gauche par une matrice $p \times m$, et à droite par une matrice $n \times q$.

2.2 Produit nul avec facteurs non nuls

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N \neq 0$, mais $N^2=0$. Donc $AB=0$ n'implique pas $A=0$ ou $B=0$. On appelle **nilpotente** une matrice carrée dont une puissance est nulle.

2.3 Construire B tel que $AB=0$

Écrire $B=[b_1 \dots b_p]$. Alors $AB=0$ équivaut à $Ab_j=0$ pour chaque colonne. Toutes les colonnes de B doivent appartenir à $\text{Ker}(A)$. Un B non nul existe exactement lorsque $\text{Ker}(A)$ contient un vecteur non nul, pour $p \geq 1$.

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ Un choix non nul de $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

En effet, $\text{Ker}(A)=\text{Vect}\{(-2,1)\}$. Si A est inversible, $AB=0$ impose $B=0$.

2.4 Simplifier une égalité

De $AC=BC$, on ne déduit $A=B$ que si une condition permet de simplifier le facteur C à droite ; en particulier

Si C est inversible :

$$AC = BC \Rightarrow (AC)C^{-1} = (BC)C^{-1} \Rightarrow A(CC^{-1}) = B(CC^{-1}) \Rightarrow AI = BI \Rightarrow A = B.$$

Le fait que A soit inversible ne suffit pas.

Exemple: $A=I_2$, $B=0$, $C=0$.

Contre-exemple, même avec A inversible :

$$A = I_2, \quad B = 0_{2 \times 2}, \quad C = 0_{2 \times 2}.$$

$$AC = I_2 0_{2 \times 2} = 0_{2 \times 2} = 0_{2 \times 2} 0_{2 \times 2} = BC, \quad A \neq B.$$

3. Transposition et matrices particulières

La transposée A^T échange lignes et colonnes. Si A est $m \times n$, A^T est $n \times m$ et $(A^T)_{ij} = a_{ji}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^T \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R}).$$

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}, \quad (A^T)^T = A.$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T$$

L'ordre des facteurs est inversé. Les dimensions le confirment : si AB est $m \times p$, $B^T A^T$ est $p \times m$.

3.1 Symétrique diagonale et scalaire

Une matrice **symétrique** est carrée et vérifie $A^T = A$.

Une matrice **diagonale** a tous ses coefficients hors diagonale nuls.

Exemple

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \text{diag}(2, -3, 5).$$

$$i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0.$$

Les coefficients diagonaux peuvent aussi être nuls

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ est également diagonale.}$$

Une matrice **scalaire** est de la forme λI .

Toute matrice scalaire est diagonale, et toute matrice diagonale est symétrique.

Les réciproques sont fausses.

Symétrique mais non diagonale : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

- Si A et B sont symétriques, $(AB)^T = BA$. Donc AB est symétrique exactement lorsque $AB = BA$.

3.2 Matrices triangulaires

Une matrice carrée est **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, et **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$. Les coefficients diagonaux peuvent être nuls. Son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux ; elle est inversible exactement lorsque tous ces coefficients sont non nuls.

Exemple

$$\text{Triangulaire inférieure } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Triangulaire supérieure } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\text{Det}(A) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ donc A est singulière. $\text{Det}(B) = 2 \cdot (-1) \cdot 5 = -10$ donc B est inversible

3.3 Trace

Pour une matrice carrée, $\text{Tr}(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$. La trace est linéaire. On a $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, mais cela n'implique pas $AB = BA$.

$$\text{Tr}(AB) = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} = \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} = \text{Tr}(BA)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

La trace est la **somme des coefficients diagonaux** :

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 2 + (-3) + 6 = 5.$$

Elle est définie pour les matrices **carrées**.

4. Matrices inversibles

Une matrice carrée A de taille n est **inversible** s'il existe une matrice A^{-1} telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Une matrice non inversible est appelée **singulière**. L'inverse est unique

4.1 Critères équivalents

Pour A carrée $n \times n$:

A est inversible $\Leftrightarrow$ A a n pivots $\Leftrightarrow$ sa forme échelonnée réduite est $I_n \Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{0\} \Leftrightarrow$ ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow Ax=b$ possède une unique solution pour tout $b \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow x \mapsto Ax$ est bijective.

Le déterminant constitue un autre critère :

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Pour les calculs 3×3 ci-dessous, la formule sera explicitée.

4.2 Calcul dans le cas 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = ad - bc$$

Si $\det(A) \neq 0$, A^{-1} est le produit de $1/\det(A)$ par la matrice suivante. Si $\det(A) = 0$, il n'existe pas d'inverse.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. On calcule $D = 2 \times 4 - 2 \times 2 = 4$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

4.3 Résoudre un système

Si A est inversible, $Ax=b$ donne $x=A^{-1}b$. Il faut multiplier à gauche : l'ordre est imposé. Pour un système unique, une réduction de la matrice augmentée $[A|b]$ peut être plus directe que calculer tout A^{-1} .

Exemple

Résolvons le système

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4, \\ 2x + 4y = 6. \end{cases}$$

On l'écrit sous la forme $AX = b$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(A) = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4 \neq 0$, la matrice est inversible :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On multiplie à gauche par A^{-1} :

$$AX = b \Rightarrow X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3 \\ -2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $x=1$, $y=1$.

4.4 Formule générale

Pour une matrice carrée A telle que $\det(A) \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [(-1)^{i+j} M_{ij}]^T,$$

où M_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j de A

Exemple

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient les mineurs suivants

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = -30, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = 20, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 11.$$

Le déterminant vaut :

$$\det(A) = 1 \cdot 6 - (-2) \cdot (-2) + 0 \cdot (-30) = 2.$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +6 & -(-2) & +(-30) \\ -(-4) & +2 & -20 \\ +(-2) & -1 & +11 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -30 & -20 & 11 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -15 & -10 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

5. Calcul de l'inverse par réduction

Former $[A|I_n]$, puis effectuer les mêmes opérations élémentaires sur les deux blocs. Si le bloc gauche devient I_n , le bloc droit est A^{-1} . Si le bloc gauche ne peut pas devenir I_n , A n'est pas inversible.

Exemple 2×2

$$[A|I_2] = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \text{ puis } L_1 \leftarrow L_1/2 \text{ et } L_2 \leftarrow L_2/2 :$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2 : [I_2|A^{-1}] = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Exemple 3×3

Pour calculer B^{-1} on réduit la matrice augmentée $[B | I_3]$

$$[B | I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue les opérations : $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$.

La matrice devient : $[B \mid I_3] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right).$

Puis,

$$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2,$$

d'où

$$[B \mid I_3] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array} \right).$$

On divise la troisième ligne par 2 : $L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3$

Ainsi,

$$[B \mid I_3] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Enfin, on effectue

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3, \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3.$$

On obtient :

$$[B \mid I_3] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) = [I_3 \mid B^{-1}]$$

Donc,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

6. Règles sur les inverses et matrices élémentaires

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Si $\lambda \neq 0$ et A est inversible, $(\lambda A)^{-1} = (1/\lambda)A^{-1}$.

- Pour des matrices carrées de même taille, AB est inversible si et seulement si A et B sont toutes deux inversibles.
- Si A ou B est singulière, le produit est singulier.
- En revanche, la somme de deux matrices inversibles peut être singulière : $I + (-I) = 0$.

7. Exemples

Exemple Inversibilité d'une matrice 3×3 avec paramètre

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -2 & -4 & a \\ 1 & -a & 2 \end{pmatrix}$$

Pour une matrice de lignes (u,v,w) , (r,s,t) , (ℓ,m,n) , le développement selon la première ligne donne $\det(A) = u(sn - tm) - v(rn - t\ell) + w(rm - s\ell)$.

$$\det(A) = -a^2 - 11a - 24 = -(a + 3)(a + 8)$$

Ainsi A est inversible exactement lorsque $a \neq -3$ et $a \neq -8$. Aux deux valeurs exclues, le déterminant est nul.

Exemple Puissances et identité

I commute avec A , ce qui donne $(A - I)(A + I) = A^2 - I$ et $(A + I)^2 = A^2 + 2A + I$. Pour un scalaire λ , $(\lambda A)^2 = \lambda^2 A^2$.

Si $A^3 = 0$, développer le produit :

$$(I - A)(I + A + A^2) = I - A^3 = I$$

Le produit en sens inverse vaut aussi I . Donc $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

Plus généralement, si $A^k = 0$, l'inverse de $I - A$ est $I + A + \dots + A^{k-1}$.

Exemple Commutation avec paramètre

Pour A de lignes (3, -4), (-5, 1), et B de lignes (7, 4), (5, k), on calcule AB puis BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 12 - 4k \\ -30 & k - 20 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 15 - 5k & k - 20 \end{pmatrix}$$

L'égalité des coefficients impose $12 - 4k = -24$ et $-30 = 15 - 5k$. Les deux équations donnent $k = 9$.

8. Vrai ou faux et méthode de travail

Affirmation	Réponse	Justification
$AB = BA$ pour toutes matrices carrées de même taille	Faux	Le produit n'est pas commutatif. Par exemple, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ donnent $AB = B$ et $BA = 0$.
$(AB)^T = A^T B^T$	Faux en général	La formule correcte est $(AB)^T = B^T A^T$. L'ordre des facteurs est inversé.
$(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$	Faux en général	Pour A et B inversibles, $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
$A^T = A$ implique A diagonale	Faux	A est symétrique. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ est symétrique mais non diagonale.
A et B symétriques impliquent AB symétrique	Faux en général	$(AB)^T = BA$. Le produit AB est donc symétrique si et seulement si $AB = BA$.
$AB = 0$ implique un facteur nul	Faux	$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est non nulle, mais $N^2 = 0$.
$AC = BC$ et C inversible impliquent $A = B$	Vrai	Multiplier les deux membres à droite par C^{-1} : $ACC^{-1} = BCC^{-1}$, donc $A = B$.
$AC = BC$ et C symétrique impliquent $A = B$	Faux	Prendre $C = 0$, $A = I$ et $B = 0$. Alors C est symétrique et $AC = BC$, mais $A \neq B$.
Si $C = C^{-1}$, la simplification par C est permise	Vrai	C est inversible et $C^2 = I$. Multiplier par C^{-1} du côté où se trouve le facteur à simplifier.
A inversible implique $Ax = b$ compatible pour tout b	Vrai	Le système possède une unique solution $x = A^{-1}b$.

Affirmation	Réponse	Justification
Le produit de matrices inversibles de même taille est inversible	Vrai	Pour A et B inversibles, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
La somme de deux matrices inversibles est toujours inversible	Faux	I et $-I$ sont inversibles, mais $I + (-I) = 0$ est singulière.
$A + I$ est toujours inversible	Faux	Prendre $A = -I$: $A + I = 0$ est singulière.
$AB + AC = (B + C)A$	Faux	La distributivité donne $A(B + C)$.
Une matrice triangulaire carrée dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls est inversible	Vrai	Son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux.

9. La factorisation LU

La factorisation LU permet de réutiliser une même élimination de Gauss pour résoudre plusieurs systèmes ayant la même matrice de coefficients.

9.1 Pourquoi factoriser une matrice

$$Ax = b_1, Ax = b_2, \dots, Ax = b_p$$

Si A est inversible, on pourrait calculer A^{-1} , puis chaque solution $A^{-1}b_j$. Une autre méthode consiste à effectuer l'élimination une seule fois pour construire L et U, puis à résoudre deux systèmes simples pour chaque nouveau second membre. L'intérêt est surtout de réutiliser la factorisation.

9.2 Définition et dimensions

Supposons que A, de taille $m \times n$, puisse être réduite à une forme échelonnée par des opérations d'élimination sans échange de lignes. On peut alors écrire $A = LU$.

Matrice	Taille	Propriété
A	$m \times n$	Matrice à factoriser
L	$m \times m$	Triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale

Matrice	Taille	Propriété
U	$m \times n$	Forme échelonnée de A

L est une *matrice triangulaire inférieure unitaire* : « unitaire » signifie ici que ses coefficients diagonaux valent 1. Elle est *inversible*. Si A est rectangulaire, U est une matrice échelonnée rectangulaire ; elle n'est pas nécessairement carrée.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} p_1 & * & * & * & * \\ 0 & p_2 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les p_i représentent les pivots non nuls ; les étoiles représentent des coefficients quelconques. Les pivots ne sont pas nécessairement tous sur la diagonale, comme le montre l'exemple rectangulaire.

9.3 Résoudre $Ax = b$ avec LU

$$Ax = b \Leftrightarrow L(Ux) = b$$

En posant $y = Ux$, on résout successivement :

Étape	Système	Méthode
1	$Ly = b$	Substitution avant pour trouver y
2	$Ux = y$	Substitution arrière pour trouver x

L'application $x \mapsto Ax$ est la composition de $x \mapsto Ux$ puis $y \mapsto Ly$. Pour une matrice carrée inversible, les deux systèmes triangulaires possèdent chacun une solution unique.

Exemple 1 Résoudre un système avec une factorisation donnée

On donne la factorisation suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} ; \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = LU, \quad b = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

- **Résolution de Ly égale b**

$$[L | b] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 8 & 3 & 1 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [I | y]$$

Équation	Calcul	Résultat
$y_1 = -9$	La première ligne donne directement y_1 .	$y_1 = -9$
$-y_1 + y_2 = 5$	$y_2 = 5 + y_1 = 5 - 9$	$y_2 = -4$
$2y_1 - 5y_2 + y_3 = 7$	$y_3 = 7 - 2(-9) + 5(-4)$	$y_3 = 5$
$-3y_1 + 8y_2 + 3y_3 + y_4 = 11$	$y_4 = 11 + 3(-9) - 8(-4) - 3(5)$	$y_4 = 1$

$$y = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La réduction de la matrice augmentée $[L | b]$ donne $[I | y]$. Seul le second membre nécessite les calculs de substitution ; la diagonale de L est constituée de 1.

- **Résolution de Ux égale y**

$$[U | y] = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Équation	Calcul	Résultat
$-x_4 = 1$	$x_4 = -1$	$x_4 = -1$
$-x_3 + x_4 = 5$	$x_3 = x_4 - 5 = -1 - 5$	$x_3 = -6$
$-2x_2 - x_3 + 2x_4 = -4$	$-2x_2 + 6 - 2 = -4$	$x_2 = 4$
$3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -9$	$3x_1 - 28 + 12 - 2 = -9$	$x_1 = 3$

$$[I | x] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vérification : $Ax = (-9, 5, 7, 11)^T = b$.

- **Nombre d'opérations dans cet exemple**

Calcul	Opérations comptées
$Ly = b$	6 multiplications et 6 additions ou soustractions
$Ux = y$	4 divisions, 6 multiplications et 6 additions ou soustractions
Total après factorisation	28 opérations arithmétiques

Le support fourni compare ces 28 opérations à 62 opérations pour une réduction directe de $[A | b]$ en $[I | x]$, avec son mode de comptage. Ce total dépend de l'algorithme et ne comprend pas le coût de construction de L et U . Une « flop » désigne une opération arithmétique en virgule flottante.

- **Justification à l'aide des matrices élémentaires**

Si A est réduite à U uniquement en ajoutant à une ligne un multiple d'une ligne située au-dessus, les matrices élémentaires correspondantes $E_1, \dots, E_p$ sont triangulaires inférieures unitaires.

$$E_p \cdots E_1 A = U$$

$$A = (E_p \cdots E_1)^{-1} U = LU$$

$$L = (E_p \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_p^{-1}$$

Les produits et les inverses de matrices triangulaires inférieures unitaires ont la même propriété. Ainsi L est triangulaire inférieure unitaire. Les mêmes opérations qui transforment A en U transforment L en I :

$$(E_p \cdots E_1)L = I$$

9.4 Algorithme de construction de L et U

Étape	Action
1	Réduire A en une forme échelonnée U par élimination, sans échange de lignes et sans normaliser les pivots.
2	À chaque pivot, calculer les multiplicateurs utilisés pour annuler les coefficients situés en dessous.
3	Placer les multiplicateurs dans L sous la diagonale, et mettre des 1 sur sa diagonale.
4	Vérifier que $LU = A$.

Si l'on utilise $R_i \leftarrow R_i - m_{ij}R_j$, on place m_{ij} dans L . Le signe dans L est donc opposé à celui du coefficient ajouté lors de l'opération. R_i désigne une ligne, pour éviter de la confondre avec la matrice L .

Exemple 2 Factoriser une matrice rectangulaire

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

A possède quatre lignes et cinq colonnes. L aura donc la taille 4×4 , et U la taille 4×5 .

• Premier pivot

Le premier pivot vaut 2. Les multiplicateurs sont les coefficients de la première colonne divisés par 2.

Ligne	Multiplicateur	Opération
2	$-4/2 = -2$	$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$
3	$2/2 = 1$	$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$
4	$-6/2 = -3$	$R_4 \leftarrow R_4 + 3R_1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

La première colonne de L est $(1, -2, 1, -3)^T$. Les autres coefficients sous la diagonale seront déterminés aux étapes suivantes.

- **Deuxième pivot**

Le deuxième pivot vaut 3 dans A_1 . Il faut utiliser la colonne de la matrice déjà transformée, et non celle de A initiale.

Ligne	Multiplicateur	Opération
3	$-9/3 = -3$	$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$
4	$12/3 = 4$	$R_4 \leftarrow R_4 - 4R_2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

On obtient $m_{32} = -3$ et $m_{42} = 4$. La troisième colonne n'a pas de pivot : on passe à la quatrième colonne.

- **Troisième pivot et dernier pivot**

Le troisième pivot se trouve à la ligne 3 et à la colonne 4 ; il vaut 2. Le coefficient 4 placé sous ce pivot donne le multiplicateur $m_{43} = 4/2 = 2$.

$$R_4 \leftarrow R_4 - 2R_3$$

La dernière ligne devient $(0, 0, 0, 0, 5)$. Le dernier pivot vaut 5 ; aucun coefficient ne se trouve en dessous.

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- Construction finale de L

Étape de pivot	Coefficients divisés par le pivot	Colonne de L à partir de la diagonale
1	$(2, -4, 2, -6) \div 2$	$(1, -2, 1, -3)^T$
2	$(3, -9, 12) \div 3$	$(1, -3, 4)^T$
3	$(2, 4) \div 2$	$(1, 2)^T$
4	$5 \div 5$	1

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Le multiplicateur 2 est placé à la position (4, 3) de L, car la ligne de pivot est la troisième, même si le pivot de U se situe dans la quatrième colonne.

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} & [5] \\ \div 2 & \div 3 & \div 2 & \div 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & [1] \end{array}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Vérification** du produit

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A$$

La factorisation est donc correcte. U est échelonnée et contient quatre pivots ; A a le rang 4. Comme A possède cinq colonnes, un système $Ax = b$ possède ici une variable libre. La substitution arrière doit en tenir compte.

9.5 Lorsque des échanges de lignes sont nécessaires

La construction précédente suppose que l'élimination peut être menée sans échange de lignes. Cette hypothèse n'est pas toujours satisfaite. En calcul numérique, on utilise souvent le pivotement partiel : parmi les lignes encore disponibles, on choisit un coefficient de plus grande valeur absolue dans la colonne du pivot.

On représente les échanges de lignes par une matrice de permutation P. Une écriture courante de la factorisation est alors :

$$PA = LU$$

Pour résoudre $Ax = b$, le second membre doit subir les mêmes permutations :

$$Ly = Pb, \text{ puis } Ux = y$$

Le support décrit aussi une convention équivalente où le facteur de gauche est une matrice triangulaire inférieure permutée. En effet, $PA = LU$ implique $A = P^{-1}LU$: le facteur $P^{-1}L$ devient triangulaire inférieur après une permutation de ses lignes. Il faut donc vérifier la convention utilisée pour P et L.

9.6 Points à retenir

Point	À retenir
Dimensions	Si A est $m \times n$, alors L est $m \times m$ et U est $m \times n$.
Diagonale de L	Elle est constituée de 1.
Multiplicateurs	Ils sont calculés à partir des matrices successivement transformées.
Ordre de résolution	D'abord $Ly = b$, puis $Ux = y$; avec permutation, utiliser Pb .
Plusieurs seconds membres	On calcule L et U une seule fois puis on les réutilise.
Matrice rectangulaire	Les pivots de U ne sont pas nécessairement sur sa diagonale.
Vérification	Contrôler le produit $LU = A$, ou $PA = LU$ avec pivotement.