

ALGÈBRE LINÉAIRE

Chapitre 2 : Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

1. Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Définition. Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est une colonne de n nombres réels. Deux vecteurs sont égaux si toutes leurs composantes correspondantes sont égales.

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1.1 Addition et multiplication par un scalaire

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)^T, \quad \lambda \mathbf{u} = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)^T$$

- Le vecteur nul $\mathbf{0}$ appartient à $\mathbb{R}^n$ et vérifie $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.
- L'opposé $-\mathbf{u}$ vérifie $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
- Une combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_p$ est tout vecteur $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$.

2. Équation matricielle et combinaison de colonnes

Correspondance fondamentale. Si $A = [a_1 \dots a_p]$ et $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T$, alors le produit $A\mathbf{x}$ est la combinaison linéaire des colonnes de A .

$$A\mathbf{x} = x_1 a_1 + \dots + x_p a_p$$

Critère de compatibilité. L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est compatible si et seulement si $\mathbf{b}$ appartient à $\text{Vect}\{a_1, \dots, a_p\}$.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_p a_p = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b} \in \text{Vect}\{a_1, \dots, a_p\}$$

Méthode. Former la matrice augmentée $[A \mid \mathbf{b}]$, la réduire, puis vérifier l'absence de ligne contradictoire. Les valeurs des inconnues donnent les coefficients de la combinaison linéaire.

Exemple.

Déterminer si $b = (2, 1, 0)^T$ appartient à $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$, avec $v_1 = (1, 2, -1)^T$ et $v_2 = (3, 1, 2)^T$.

$$[v_1 \ v_2 \ | \ b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Réduction. On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.

Matrice après les premières opérations

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{array} \right]$$

Contradiction. En effectuant ensuite $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, on obtient

Forme échelonnée

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Conclusion. La dernière ligne représente l'équation $0 = -1$, qui est impossible. Le système est incompatible : il n'existe donc aucun coefficient α, β tel que $\alpha v_1 + \beta v_2 = b$.

$$b \notin \text{Vect}\{v_1, v_2\}$$

3. Espace engendré

Définition. $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, aussi noté $\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$, est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs.

$$\text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\} = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p : \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R} \}$$

- 0 appartient toujours à $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, en choisissant tous les coefficients égaux à 0.
- Si w_1 et w_2 appartiennent à $W = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, alors $\alpha w_1 + \beta w_2$ appartient encore à W .

- Ajouter un vecteur déjà engendré ne change pas l'espace engendré.

3.1. Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^3$

Principe. Soit A la matrice dont les vecteurs considérés sont les colonnes. La forme géométrique de l'espace engendré dépend du nombre de pivots de A .

Nombre de pivots de A	Propriété des vecteurs	Espace engendré
0	tous les vecteurs sont nuls	$\{0\}$
1	au moins un vecteur est non nul et tous les vecteurs sont colinéaires	une droite passant par l'origine
2	il existe deux vecteurs non colinéaires, mais les vecteurs n'engendrent pas tout $\mathbb{R}^3$	un plan passant par l'origine
3	les colonnes de A engendrent trois directions indépendantes	tout $\mathbb{R}^3$

Piège du quiz. Deux vecteurs n'engendrent pas automatiquement un plan : ils peuvent être nuls ou colinéaires. De même, plus de deux vecteurs peuvent tous rester dans un même plan.

4. Indépendance et dépendance linéaires

Définition. Soient $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La famille $(v_1, \dots, v_p)$ est dite **linéairement indépendante**, ou **libre**, lorsque l'équation

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = 0$$

admettre uniquement la solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$.

$(v_1, \dots, v_p)$ est libre $\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_p)$ est linéairement indépendante

Dépendance linéaire. La famille est dite **linéairement dépendante**, ou **liée**, s'il existe des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ qui ne sont pas tous nuls et qui vérifient

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = 0$$

$(v_1, \dots, v_p)$ est liée $\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_p)$ est linéairement dépendante

4.1. Critère matriciel

Construction. On forme la matrice A dont les vecteurs sont les colonnes.

$$A = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_p]$$

Critère fondamental. La nature des solutions du système homogène $Ax = 0$ permet de décider si les vecteurs sont linéairement indépendants ou dépendants.

- $Ax = 0$ possède uniquement $x = 0 \Leftrightarrow$ les vecteurs sont linéairement indépendants
- $Ax = 0$ possède une solution non triviale $\Leftrightarrow$ les vecteurs sont linéairement dépendants

Lien avec les pivots. La famille est linéairement indépendante si et seulement si chaque colonne de A est une colonne pivot. Une colonne sans pivot donne une variable libre et donc une solution non triviale de $Ax = 0$.

- Une famille contenant le vecteur nul est toujours liée.
- Une famille d'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
- Deux vecteurs sont liés si et seulement si l'un est un multiple de l'autre.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute famille contenant une sous-famille liée est liée.
- Dans $\mathbb{R}^n$, toute famille de plus de n vecteurs est liée.

4.2. Ajouter ou retirer un vecteur

- Ajouter un vecteur à une famille libre peut conserver la liberté ou rendre la famille liée.
- Si v appartient déjà à $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, alors $(v_1, \dots, v_p, v)$ est liée.
- Retirer un vecteur d'une famille libre conserve la liberté.
- Retirer un vecteur d'une famille liée peut donner une famille libre ou encore liée.

5. Liens avec les pivots

Information sur A	Conséquence
pivot dans chaque colonne	colonnes libres et $Ax = 0$ seulement triviale

Information sur A	Conséquence
colonne sans pivot	variable libre et colonnes liées
pivot dans chaque ligne	les colonnes engendrent $\mathbb{R}^m$
pas de pivot dans une ligne	certaines b de $\mathbb{R}^m$ ne sont pas atteints
A carrée avec pivot partout	colonnes libres et génératrices

Attention. Une colonne pivot de la forme échelonnée indique quelle colonne de la matrice initiale participe à une base des colonnes. On ne remplace pas les générateurs demandés par les colonnes modifiées de la RREF.

6. Méthodes types

6.1. Vérifier si b appartient à un espace engendré

- Mettre les générateurs en colonnes dans A.
- Former $[A \mid b]$.
- Réduire la matrice.
- Conclure : contradiction signifie $b \notin \text{Vect}$; sinon $b \in \text{Vect}$ et les solutions donnent les coefficients.

6.2. Tester l'indépendance

- Mettre les vecteurs en colonnes dans A.
- Résoudre $Ax = 0$.
- Uniquement $x = 0$: famille libre.
- Au moins une variable libre : famille liée; une solution non triviale fournit une relation de dépendance.

7. Vrai ou faux à maîtriser

Affirmation	Réponse	Justification
$\text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ contient 0	Vrai	prendre tous les coefficients nuls
Deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ engendrent toujours un plan	Faux	ils peuvent être nuls ou colinéaires
Une famille non libre est liée	Vrai	ce sont les deux possibilités
Une famille libre ne contient pas 0	Vrai	sinon une relation non triviale existe
Toute famille liée contient un vecteur nul	Faux	deux vecteurs proportionnels non nuls suffisent
Toute sous-famille d'une famille libre est libre	Vrai	une relation dans la sous-famille serait aussi une relation dans la famille
Ajouter un vecteur à une famille libre la rend toujours liée	Faux	elle peut rester libre
Une famille libre est formée de vecteurs deux à deux perpendiculaires	Faux	libre ne signifie pas orthogonale
Si les colonnes de A sont liées, $Ax=0$ a une solution non triviale	Vrai	critère fondamental
Cinq vecteurs de $\mathbb{R}^4$ sont liés	Vrai	il y a plus de vecteurs que la dimension

8. Exercices ciblés corrigés

Exercice 1 Appartenance à un espace engendré

Question. Déterminer si $b = (-5, -3, -6)^T$ appartient au plan engendré par $v_1 = (3, 1, -2)^T$ et $v_2 = (5, 1, -8)^T$.

$$[v_1 \ v_2 \ | \ b] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -8 & -6 \end{array} \right]$$

Solution. Le système $3\alpha + 5\beta = -5$, $\alpha + \beta = -3$, $-2\alpha - 8\beta = -6$ donne $\alpha = -5$ et $\beta = 2$. Ainsi $b = -5v_1 + 2v_2$, donc b appartient au plan engendré.

Exercice 2. Famille libre

Question. Tester la liberté de $v_1 = (1, 2, 1)^T$, $v_2 = (1, 0, 0)^T$ et $v_3 = (0, 1, 0)^T$.

$$A = [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution. La réduction fournit trois pivots $\text{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le système $Ax = 0$ ne possède que

la solution triviale; la famille est donc libre et engendre $\mathbb{R}^3$

Exercice 3. Lecture géométrique

Question. Que représente $\text{Vect}\{(1, 1, -2)^T, (-2, 3, 0)^T\}$?

Solution. Les deux vecteurs sont non nuls et non proportionnels. Ils sont donc indépendants et engendrent un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Équation cartésienne du plan

Pour obtenir une équation de la forme

$$ax + by + cz = 0,$$

on cherche un vecteur normal au plan. Ce vecteur doit être perpendiculaire à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$.

On calcule donc le produit vectoriel :

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2.$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En développant,

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - (-2) \cdot 3 \\ (-2)(-2) - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 3 - 1(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur normal au plan est donc $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Comme le plan est un espace vectoriel, il passe par l'origine. Son équation cartésienne est donc

$$\boxed{6x + 4y + 5z = 0.}$$

9. Synthèse à mémoriser

Question	Critère
$b \in \text{Vect}\{a_1, \dots, a_p\}$?	$Ax = b$ compatible
Colonnes de A libres ?	$Ax = 0$ seulement triviale
Les colonnes engendrent $\mathbb{R}^m$?	pivot dans chaque ligne
Famille avec 0	toujours liée
Plus de n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$	toujours liée
Deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$	plan seulement s'ils sont indépendants

Réflexe final. Transformer toute question de combinaison, d'appartenance ou d'indépendance en un système matriciel, réduire, puis interpréter les pivots et les variables libres.