SERIES NUMÉRIQUES

Définition : Soit (x_n) une suite. La **suite des sommes partielles** de (x_n) est définie comme :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + \ldots x_n.$$

Si $s_n \to s \in \mathbb{R}$ on écris : $s = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$. Si $s_n \to \infty$ on écris $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \infty$ et on dit que la série diverge.

Proposition : Si on supprime un nombre défini de premiers termes d'une série la convergence de la série n'est pas affectée : $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + \ldots + x_{m-1} + \sum_{k=m}^{\infty} x_k$.

Proposition

i) Si $\sum_{k=0}^{n} x_k = s \Rightarrow x_k \to 0$.

ii) Si $\sum_{k=0}^{n} x_k$ converge alors $\forall\ \varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall\ n \geq n_0$, $|\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k| < \varepsilon$.

Exemples :

i) **La série géométrique** : $\sum_{k=0}^{n} x^k$.

- Si $x = 1$ alors $s_n = n + 1$,
- Si $x \neq 1$ on a $s_n = 1 + x + x_2 + \ldots + x_n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

On a deux cas :

- Si $|x| \geq 1$ alors $|x_k| = |x|^k \geq 1$ et $x_k \nrightarrow 0$. Donc la série diverge.
- Si $|x| < 1$ alors $x^{n+1} \to 0$ et $s_n \to \frac{1}{x-1}$, ou autrement $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{x-1}$.

ii) Séries télescopiques.

Soit la suite (x_k) telle que : $x_k = b_k - b_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$, b_k une autre suite.

Alors la série $\sum_{k=1}^{n} x^k$ converge $\Leftrightarrow$ b_k converge.

En fait, $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = (b_1 - b_2) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$. Alors $b_n \to b \Leftrightarrow s_n \to b_1 - b$.

Ex : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Alors $x_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = b_k - b_{k+1}$, où $b_k = \frac{1}{k}$.

Donc $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = (1 - \frac{1}{2}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$. On conclure que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Théorème de Cauchy

La série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge $\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. si $n_0 \leq m \leq n$ on a :

$$|\sum_{k=m+1}^{n} x_k| = |x_{m+1} + \cdots + x_n| < \varepsilon$$

Exemple : La série harmonique $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ qui diverge.

Séries avec des termes non négatifs.

Théorème : Soit (x_k) suite avec $x_k \geq 0$ ∀ k ∈ ℕ. La série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge ⇔ la suite (s_n) des sommes partielles est majorée. Si (s_n) n'est pas bornée alors $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \infty$.

Exemple : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

Théorème : Soit (x_k) suite avec $x_k > 0$, $a_k \to 0$ et a_k décroissante. La série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge ⇔ la série $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k}$ converge.

Exemples :

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ où p > 0. On a $x_k = \frac{1}{k^p}$. Comme p > 0 (a_k) ↘ et $a_k \to 0$. Soit la série $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$. La dernière est une série géométrique avec $x_p = \frac{1}{2^{p-1}}$.

- Si $x_p = \frac{1}{2^{p-1}} < 1 \overset{p>1}{\Longrightarrow}$ la serie converge.
- Si $x_p = \frac{1}{2^{p-1}} \geq 1 \overset{p\leq 1}{\Longrightarrow}$ la serie diverge.

Alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge si p > 1 et diverge si 0 < p ≤ 1.

ii) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$, p > 0. La série converge si p > 1 et diverge si 0 < p ≤ 1.

Critères Generals

Définition : On dit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ **converge absolument** si la série $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ converge.

Proposition : Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge absolument alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge.

Exemples

i) La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ converge car $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ qui est convergente ($\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ avec p = 2 > 1)

ii) La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ne converge pas absolument car $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (série harmonique) diverge. Cependant la série converge mais pas absolument.

Théorème (critère de comparaison)

Soit les séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ avec $b_k > 0$ ∀ k ∈ ℕ. On suppose qu'il existe M > 0 tel que $|a_k| \leq M \cdot bk$ ∀ k ∈ ℕ et que la série $\sum b_k$ converge. Alors la série $\sum a_k$ converge absolument.

Théorème (comportement équivalente)

Soit les séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ avec a_k, $b_k > 0$ ∀ k ∈ ℕ. On suppose que $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l > 0$. Alors la série $\sum b_k$ converge ⇔ $\sum a_k$ converge.

Exemples

i) La série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k^2}$, $x\in\mathbb{R}$. On a $\left|\frac{\sin(kx)}{k^2}\right|\le\frac{1}{k^2}$. Puisque la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ converge, la série donnée converge absolument.

ii) Soit la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^4+k^2+3}$. Si $a_k=\frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ et $b_k=\frac{1}{k^3}$ on a $\frac{a_k}{b_k}=\frac{k^4+k^3}{k^4+k^2+3}\to 1>0$. Comme la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ converge on a que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ converge aussi.

iii) Soit la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^2+2}$. Si $b_k=\frac{k+1}{k^2+2}$, $a_k=\frac{1}{k}$ alors $\frac{a_k}{b_k}=\frac{k^2+2}{k^2+k}\to 1>0$. Comme la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverge, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^2+2}$ diverge aussi.

Théorème (Critère d'Alembert)

Soit $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ avec des termes non nuls.

i) Si $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|<1\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ converge absolument.

ii) Si $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|>1\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ diverge.

Si $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=1$ on n'a pas de conclusion par le théorème.

Exemple :

i) La série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverge et $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{k}{k+1}\right|=1$ mais la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ converge et $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{k^2}{(k+1)^2}\right|=1$.

ii) Soit la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$. On a $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\frac{k!}{(k+1)!}=\frac{1}{k+1}\to 0<1$. Alors la série converge.

Proposition : Soit $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ avec $a_k\neq 0$.

i) Si $\lim\limits_{k\to\infty}sup\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|<1\Rightarrow$ la série $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ converge absolument.

ii) Si $\lim\limits_{k\to\infty}inf\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|>1\Rightarrow$ la série $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ diverge.

Théorème (critère de Cauchy) . Soit $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ une serie.

i) $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}<1\Rightarrow$ la série converge absolument.

ii) $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}>1\Rightarrow$la série diverge.

Si $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=1$ on ne peut pas utiliser le théorème.

Exemple. Soit la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$, $x \in \mathbb{R}$. On a $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{k}} \to |x|$.

- Si $|x| < 1$ alors $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = |x| < 1 \Rightarrow$ la série converge absolument.
- Si $|x| > 1 \Rightarrow$ la série diverge.
- Si $|x| = 1$ on a deux cas :
  - Si x = 1 on a la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ qui diverge.
  - Si x = -1 on obtient la série alternée $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ qui converge.

Théorème (Dirichlet). Soit (a_k) et (b_k) deux suites telles que :

i) $b_k > 0$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$ et (b_k) décroissante avec $b_k \to 0$.

ii) La suite des sommes partielles $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ de la suite (a_k) est bornée.

Alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ converge.

Exemple (*critère de Leibniz*)

Série alternée $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ avec (b_k) décroissante et $b_k \to 0$. La série $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ converge.