FONCTIONS D' UNE VARIABLE

Définition : Soit X et Y deux ensembles non vides. On considère le **produit cartésien** de X et Y :

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Définition : **Fonction** de X a Y s'appelle chaque sous-ensemble f de X x Y qui vérifie les suivants :

i) Pour tout $x \in$ X il existe $y \in$ Y tel que $(x, y) \in f$. C.à.d. que pour chaque $x \in$ X il existe un $y \in$ Y.

ii) Si $(x_1, y_1) \in f$ et $(x_2, y_2) \in f$, alors $y_1 = y_2$. C.à.d. que chaque x a une image unique dans Y.

Soit f: X $\to$ une fonction. On appelle le X **domaine de définition** de f et le Y ensemble d'arrivé. L'ensemble des images de f est l'ensemble : $f(X) = \{y \in Y : \text{il existe } x \in X \text{ tel que } f(x) = y\} = \{ f(x) : x \in X\}$.

Soit f : X $\to$ Y une fonction. Elle s'appelle **surjective** si $f(X) = Y$, C.à.d. que pour tout $y \in$ Y il existe $x \in$ X tel que $f(x) = y$.

La fonction f s'appelle **injective** si :

Pour tous $x_1, x_2 \in$ X avec $x_1 \neq x_2$ on a : $f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow$ si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$.

Définition : Soit f: X $\to$ Y et g : W $\to$ Z deux fonctions. On suppose $f(X) \subseteq W$. Alors on peut définir une fonction ***gof*** : X $\to$ Z, en posant : $(gof)\ (x) = g(f(x))$. La fonction gof s'appelle la **composition de *g* avec *f***.

Définition : Soit f : X $\to$ Y une fonction.

i) Pour tout A $\subseteq$ X, l'image de A par f est l'ensemble $f(A) = \{y \in Y : \text{il existe } x \in A \text{ tel que } f(x) = y\}$

ii) Pour B $\subseteq$ Y, le pré-image de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$

Proposition : Soit f : X $\to$ Y une fonction.

i) Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, alors $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

ii) Si $A_1, A_2 \subseteq X$, alors $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

iii) Si $A_1, A_2 \subseteq X$, alors $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. On a l'égalité si f est injective.

iv) Si $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$ alors $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

v) Si $B_1, B_2 \subseteq Y$, alors $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

vi) Si $B_1, B_2 \subseteq Y$ alors $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

vii) Si $B \subseteq Y$ alors $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

viii) Si $A \subseteq X$ alors $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. On a l'égalité si f est injective.

ix) Si $B \subseteq Y$ alors $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. On a l'égalité si f est surjective.

Définition : Soit f : $X \to Y$ une fonction injective. Alors la fonction $f : X \to f(X)$ est bijective. On peut alors définir une fonction $f^{-1} : f(X) \to X$, appelle la fonction **inverse** ou **réciproque** de f avec

$f^{-1}(y) = x$, où x est le unique $x \in X$ pour le quel $f(x) = y$. Autrement $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Définition : Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

i) f est **croissante** (**strictement croissante**) si pour tous $x, y \in A$ avec $x < y$ on a : $f(x) \leq f(y)$ ($f(x) < f(y)$).

ii) f est **décroissante** (**strictement décroissante**) si pour tous $x, y \in A$ avec $x<y$: $f(x) \geq f(y)$ ($f(x) > f(y)$).

Définition : Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

i) f est **majorée** si il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q pout tout $x \in A$ on a : $f(x) \leq M$.

ii) f est **minorée** si il existe $m \in \mathbb{R}$ t.q pout tout $x \in A$ on a : $f(x) \geq M$.

iii) f est **bornée** si elle est majorée et minorée ou autrement il existe $M > 0$ t.q pout tout $x \in A$: $|f(x)| \leq M$.

Définition : Une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **paire** si $g(-x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et **impaire** si $g(-x) = - g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Exemples : $g(x) = x^2$, $g(x) = \cos(x)$, $g(x) = |x|$ sont paires et $g(x) = x^3$, $g(x) = \sin(x)$ sont impaires.

Définition : Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **périodique** (période **T**) si il existe $T \neq 0$ t.q $f(x + T) = f(x)$ $\forall \in \mathbb{R}$.