FONCTIONS D'UNE VARIABLE
LIMITES – CONTINUITÉ

Définition : Soit A un sous-ensemble, non vide de $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in A$. On dit que f est **continue** en x_o si $\forall\, \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q

$$\text{si } x \in A \text{ et } |x - x_o| < \delta \text{ alors } |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon.$$

Exemples :

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. On va montrer que f est continue pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|f(x) - f(x_o)| = |x - x_o|$ ça suffit de choisir $\delta = \varepsilon$. Dans ce cas on a :

$$|x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| = |x - x_o| < \delta = \varepsilon.$$

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = 2x^2 - 1$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$. On va montrer que f est continue pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ t.q. si $x \in \mathbb{R}$ et $|x - x_o| < \delta$, alors $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f(x) - f(x_o)| = |(2x^2 - 1) - (2x_0^2 - 1)| = |2x^2 - 2x_0^2| = 2|x + x_0|\cdot|x - x_0|.$$

On cherche alors $\delta > 0$ t.q. si $|x - x_o| < \delta$, alors $2|x + x_0|\cdot|x - x_0| < \varepsilon$. Etant donné que c'est nous qui allons choisir le δ, on peut supposer que $\delta < 1$. Alors on aura $|x - x_o| < 1$ et par conséquence

$$|x + x_0| \leq |x - x_0 + 2x_0| \leq |x - x_0| + 2|x_0| < 1 + 2|x_0|.$$

Si en plus $\delta < \frac{\varepsilon}{2(2|x_0|+1)}$, alors $\forall\, x \in \mathbb{R}$ pour lequel $|x - x_0| < \delta$ on a

$$|f(x) - f(x_o)| = 2|x + x_0|\cdot|x - x_0| \leq 2(2|x_0| + 1)\,|x - x_0| < 2(2|x_0| + 1)\delta < \varepsilon.$$

Donc si on choisit $0 < \delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2(2|x_0|+1)}\right\}$, on a : $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

La négation de la définition : La fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est **discontinue** en $x_0 \in A$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel : $\forall\, \delta > 0$ il existe $x \in A$ avec $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - f(x_o)| \geq \varepsilon$.

Exemple : La fonction de Dirichlet, $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ est discontinue pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}$. On choisit $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. Si $x_0 \in \mathbb{Q}$ dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ on peut trouver un nombre irrationnel a. Par la définition de f on a : $|f(a) - f(x_o)| = |0 - 1| = 1 \geq \frac{1}{2}$.

Théorème (caractérisation séquentielle de la continuité) : La fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in A$ si et seulement si : pour toute suite (x_n) de A avec $x_n \to x_0$, la suite $(f(x_n)) \to f(x_0)$.

On utilise de théorème surtout pour montrer que la fonction n'est pas continue en x_0. On trouve deux suites $x_n \to x_0$ et $y_n \to x_0$ telles que $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$.

Théorème : Soit $f, g : A \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in A$. Si f et g sont continues en x_0, alors :

i) Les fonctions $f + g$ et $f \cdot g$ sont continues en x_0.

ii) Si en plus $g(x) \neq 0 \ \forall\, x \in A$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est définie sur A et continue en x_0.

Proposition : Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ avec $f(A) \subseteq B$: Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ est continue en x_0.

Proposition :

i) Les fonctions sin, cos : $\mathbb{R} \to [-1, 1]$ sont continues.

ii) Soit $a > 0$. La fonction f : $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$ avec $f(x) = a^x$ est continue.

Proposition : Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in A$. Si f continue en x_0 et $f(x_0) \neq 0$.

i) Si $f(x_0) > 0$ alors il existe $\delta > 0$ t.q. $f(x) > 0 \ \forall\, x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

ii) Si $f(x_0) < 0$ alors il existe $\delta > 0$ t.q. $f(x) < 0 \ \forall\, x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Théorème : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Il existe m , M $\in \mathbb{R}$ t.q $\forall\, x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue . Si $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ alors il existe c $\in]a, b[$ t.q. : $f(c) = 0$

Théorème des valeurs intermédiaires : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Si $f(a) < f(b)$ et $f(a) < \rho < f(b)$, alors il existe c $\in]a, b[$ t.q. $f(c) = \rho$.

Théorème : Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

Définition : Soit A sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que x_0 est **un point d'accumulation de A** si $\forall\, \delta > 0$ on peut trouver $x \in A$ t.q $0 < |x - x_0| < \delta$.

Exemples :

i) Si A = $[a, b]$, alors tous les points de A sont points d'accumulation. Si A = $]a, b]$ alors les p.a. sont les points de A et en plus le a.

ii) Si A = $[0,1] \cup \{2\}$, alors $2 \in A$ mais 2 n'est pas un p.a.

iii) N n'a aucun point d'accumulation.

iv) Si A = $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$, alors 0 est le seul p.a de A bien que $0 \notin A$.

Proposition : Soit A sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Les suivants sont équivalents :

i) x_0 est un point d'accumulation de A.

ii) $\forall\, \delta > 0$ il existe une infinité de points de A dans l' intervalle $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

iii) Il existe une suite (x_n) de points de A, différents par deux et différents de x_0, qui converge vers x_0.

Définition (limite) : Soit f : A → ℝ et x_0 un point d'accumulation de A.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que : si $x \in A$ et $0 < |x - x_0| < \delta$, alors $|f(x) - l| < \varepsilon$.

La limite, si elle existe, est unique.

Définition : Soit f : A → ℝ et x_0 un point d'accumulation de A.

i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ si : $\forall\, M > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q. si $x \in A$ et $0 < |x - x_0| < \delta$ alors $f(x) > M$.

ii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ si : $\forall\, M > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q. si $x \in A$ et $0 < |x - x_0| < \delta$ alors $f(x) < -M$.

Définition : Soit f : A → ℝ et $+\infty$ point d'accumulation de A.

i) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ si $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe $M > 0$ t.q. si $x \in A$ et $x > M$ alors $|f(x) - l| < \varepsilon$.

ii) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ si $\forall\, M_1 > 0$ il existe $M_2 > 0$ t.q. si $x \in A$ et $x > M_2$ alors $f(x) > M_1$.

iii) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ si $\forall\, M_1 > 0$ il existe $M_2 > 0$ t.q. si $x \in A$ et $x > M_2$ alors $f(x) < -M_1$.

Pareillement on peut définir la limite si $x \to -\infty$.

Théorème (caractérisation séquentielle de la limite). Soit f : A → ℝ et x_0 un p.a. de A. Alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \text{pour toute suite } (x_n) \text{ de A avec } x_n \neq x_0 \text{ et } x_n \to x_0, \text{ la suite } (f(x_n)) \to l.$$

Exemples :

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. On a vu que $\sin x < x < \tan x$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Puisque cos est continue $\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$. Alors $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ aussi.

ii) Les limites $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ n'existent pas.

On considère les suites $x_n = \frac{1}{\pi n}$ et $y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$. On a $\lim_{x\to 0} x_n = 0 = \lim_{x\to 0} y_n$. Mais $\sin\frac{1}{x_n} = \sin(n\pi) = 0 \to 0$ et $\sin\frac{1}{y_n} = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1 \to 1$. Donc $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ n'existe pas.

Proposition : Soit f : A → ℝ et $x_0 \in A$ un p.a de A. Alors f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Proposition : Soit f : I → ℝ continue et injective. Alors f est strictement monotone en I.