

PROBABILITÉS

PERMUTATIONS

- SIMPLE : classer n éléments distincts dans un ordre particulier.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \quad (0! = 1)$$

Exemple : nombre d'anagramme du mot "PROB" = $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

- AVEC RÉPÉTITIONS : classer n éléments (dont certains se répètent) dans un ordre particulier.

$$\frac{n!}{p! \cdot k! \cdot \dots} \quad (n = \text{nombre total ; } p = \text{1 des choses qui se répètent, } k = \text{1 autre, } \dots)$$

Exemple : nombre d'anagramme du mot "Mississippi" = $\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34'650$

ARRANGEMENT / TIRAGE

 = "Parmi tant, on tire tant"

- SIMPLE : parmi n éléments, on en tire k .

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Exemple : nombre de mains de 5 cartes possibles au poker (52 cartes)

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5! \cdot 47!} = 2'598'960$$

- AVEC SÉLECTION : parmi n éléments, il y en a n_1 semblables. On en obtient k_1 sur les k qu'on tire au total.

$$\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n-n_1}{k-k_1}$$

Exemple : nombre de mains possibles au poker, avec exactement 3 rois.

4 rois possibles $\rightarrow \binom{4}{3}$ $\cdot$ $\binom{48}{2}$ $= 4'512$

3 rois tirés $\rightarrow \binom{4}{3}$ $\cdot$ $\binom{48}{2}$ $= 4'512$

48 cartes "non-roi" $\rightarrow \binom{48}{2}$ $= 1'128$

2 cartes restantes à tirer $\rightarrow \binom{48}{2}$ $= 1'128$

- AVEC REMISE : parmi n éléments, il y en a n_1 semblables. On en obtient k_1 sur les k qu'on tire au total, en remettant la carte tirée à chaque fois.

$$\underbrace{n_1 \cdot n_1 \cdot \dots}_{k_1 \text{ fois}} \cdot \underbrace{(n-n_1) \cdot (n-n_1) \cdot \dots}_{k-k_1 \text{ fois}} \cdot \binom{k}{k_1}$$

Exemple : nombre de possibilités de tirer 3 fois un roi, en tirant 5 cartes qu'on remet à chaque fois.

4 rois possibles 48 cartes "non-roi"

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 48 \cdot 48 \cdot \binom{5}{3}$$

on tire 3 fois le roi 2 tirages restants

CONCEPT DE PROBABILITÉ :
CAS FAVORABLES / CAS POSSIBLES

- De manière générale, quand on associe la même valeur à tous les éléments

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple : Probabilité d'obtenir 10 en lançant 3 dés.

- nombre de cas possible = $6^3 = 216$

- nombre de cas favorables =

$$\begin{aligned} \{1, 3, 6\} &\Rightarrow 3! = 6 & \{2, 3, 5\} &\Rightarrow 3! = 6 \\ \{1, 4, 5\} &\Rightarrow 3! = 6 & \{2, 4, 4\} &\Rightarrow 3!/2! = 3 \\ \{2, 2, 6\} &\Rightarrow 3!/2! = 3 & \{3, 3, 4\} &\Rightarrow 3!/2! = 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{6+6+3+6+3+3}{216} = \frac{27}{216} = 0,127 = 12,7\%$$

EXEMPLE SIMPLE DE PROBABILITÉ

2 urnes, 2 boules blanches et 2 boules noires. Comment répartir les boules pour avoir le plus de chances possibles d'en tirer une blanche?

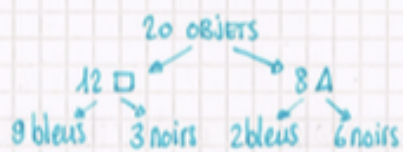
CAS POSSIBLES :	urne 1	urne 2	PROBABILITÉ
B	BNN	$\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$ ←
N	NBB	$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
BB	NN	$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0$	$\frac{1}{2}$
BN	BN	$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
-	BBNN	$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE → FORMULE DE BAYES

- On ajoute une condition à notre probabilité : $P(A|B)$ = probabilité que A se réalise, sachant que B est réalisé.
- FORMULE DE BAYES : fait le lien entre $P(A|B)$ et $P(B|A)$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Exemple:



• Formule de Bayes:

$$P(\square|\text{noir}) = \frac{P(\text{noir}|\square) \cdot P(\square)}{P(\text{noir})}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{9}{20}} = \frac{3}{20} \cdot \frac{20}{9} = \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} P(\square) &= \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \\ P(\square|\text{noir}) &= \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \\ P(\text{noir}|\square) &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\ P(\text{noir}) &= \frac{9}{20} \end{aligned}$$

- THÉORÈME DES PROBABILITÉS TOTALES : Donne la probabilité quand il y a plusieurs conditions.

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Exemple: 10% de la population a la maladie M_1 , 20% la maladie M_2 . Le test de dépistage réagit positivement sur 90% des malades M_1 , 70% des malades M_2 et 10% de ceux qui n'ont rien. Quelle est la probabilité que le test soit positif sur une personne au hasard? (p = positif; S = sain)

$$\Rightarrow P(M_1) = 0,1 \quad P(M_2) = 0,2 \quad P(p|M_1) = 0,9 \quad P(p|M_2) = 0,7 \quad P(p|S) = 0,1$$

$$P(p) = P(p|M_1) \cdot P(M_1) + P(p|M_2) \cdot P(M_2) + P(p|S) \cdot \underbrace{P(S)}_{1 - P(M_1) - P(M_2)}$$

$$\begin{aligned} P(p) &= 0,9 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,7 \\ &= \underline{\underline{0,3}} \end{aligned}$$

INDÉPENDANCE ET INCOMPATIBILITÉ

- INCOMPATIBILITÉ des événements A et B si

$$A \cap B = \emptyset$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- INDÉPENDANCE des événements A et B si
 $P(A|B) = P(A)$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemple: $P(A) = \frac{2}{3}$ $P(B) = \frac{1}{4}$

◦ $P(A \cup B)$ si A et B incompatibles: $P(A) + P(B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$

◦ $P(A \cup B)$ si A et B indépendants: $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9}{12}$

VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

- DÉFINITION: v.a. = fonction qui associe un nombre réel à chaque issue. On la note **X**.
v.a. discrète = l'ensemble des valeurs de cette fonction est fini.

Exemple: On lance un dé jusqu'à ce que le 6 apparaisse. On s'intéresse au nombre de jets nécessaires.

la v.a. X (nombre de jets) prend ses valeurs dans $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$P(X=2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

◦ LOI NORMALE

- L'ESPÉRANCE : ou la MOYENNE

$$E(X) = \mu = \sum_{i=0}^n P(x_i) \cdot x_i$$

(x_i = valeurs de la v.a.)

- La VARIANCE : dispersion de la probabilité autour de son centre de gravité (μ)

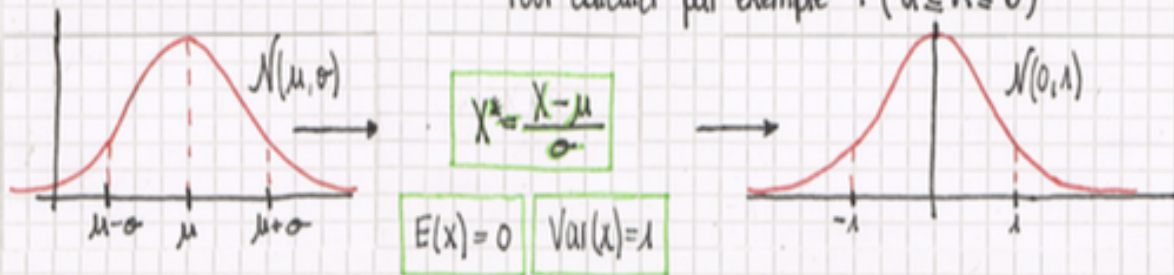
$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad \text{Avec } E(X^2) = \sum_{i=0}^n P(x_i) \cdot x_i^2$$

- L'ÉCART-TYPE

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

- LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE : Si $X = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, on peut la ramener à une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Pour calculer par exemple $P(a \leq X \leq b)$



→ La fonction de répartition $\Phi(x) = P(X^* \leq x)$ est à chercher dans le tableau.

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X \leq a) = \Phi(a) \quad P(X \leq -a) = \Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$$

$$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a)$$

Exemple: $P(X \geq -0,82) = 1 - P(X \leq -0,82) = 1 - \Phi(-0,82)$
 $= 1 - (1 - \Phi(0,82)) = 1 - (1 - 0,7939) = 0,7939$

tableau

- VARIABLE ALÉATOIRE DE BERNOULLI : Quand un événement n'a que deux issues possibles, on associe 1 à une des issues, 0 à l'autre.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{(avec une probabilité } p) \\ 0 & \text{(avec une probabilité } q = 1 - p) \end{cases}$$

- LOI BINÔMIALE : Épreuves de type "tirage avec remise" (dé, pièce de monnaie, bébé fille/garçon)

prob d'obtenir k fois pile en n jets → $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ ← prob d'obtenir face n-k fois

nombre de permutations prob d'obtenir pile k fois.

$$E(X) = n \cdot p \quad \text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q$$

Exemple: Une famille avec 5 enfants.

$$X_i = \begin{cases} 1: \text{l'enfant est une fille} : p = \frac{1}{2} \\ 0: \text{l'enfant est un garçon} : q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$n = 5$$

a) Probabilité que la famille ait exactement 3 filles : $\Rightarrow K=3; X=\varnothing$

$$P(X=3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{0,3125}}$$

b) Probabilité d'avoir au moins 1 fille et 1 garçon.

$$= P(1 \leq X \leq 4) \quad X = \varnothing$$

$$P(X=1) = P(X=4) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0,15625$$

$$P(X=2) = P(X=3) = 0,3125 \quad (\text{cf. a)})$$

$$\Rightarrow P(1 \leq X \leq 4) = 2 \cdot 0,15625 + 2 \cdot 0,3125 = 0,9375.$$

c) Calculer $E(X)$ et $\text{Var}(X)$.

$$E(X) = \sum_{i=0}^5 P(X_i) \cdot X_i = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot (0+1+1+1+1) = \frac{1}{2} \cdot 5 = \underline{\underline{2,5}}$$

$$\text{Var}(X) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}$$

• Loi GÉOMÉTRIQUE : Épreuves de type "tirage avec remise, interrompu à la première réussite".

$$P(X=k) = p \cdot q^{k-1}$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Exemple : On a 10 clés. Une seule ouvre la porte. On ajute le trousseau à chaque fois.

a) Probabilité que la 3^e soit la bonne.

$$X_i \begin{cases} 1: \text{bonne clé} & p = 1/10 \\ 0: \text{mauvaise clé} & q = 9/10 \end{cases}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{1000} = \underline{\underline{0,081}}$$

b) Probabilité de devoir essayer plus de 8 clés

$$P(X \leq 8) = 1 - \sum_{k=1}^8 P(X=k)$$

- Loi DE POISSON : Épreuves de type "tirage avec remise" (comme loi binomiale), mais quand la réussite est rare $\Rightarrow n$ très grand et p très petit :

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$\lambda = E(X) = n \cdot p \quad \text{Var}(X) = \lambda$$

Exemple: Probabilité qu'une personne ne supporte pas un vaccin = 0,001

Nombre de personnes vaccinées = 2000.

Probabilité que 10 personnes ne supportent pas le vaccin.

$$P(X=10) = e^{-2} \cdot \frac{2^{10}}{10!} = 0.00003512 \quad \lambda = n \cdot p = 2000 \cdot 0,001 = 2$$

THÉORÈMES LIMITES

Loi DES GRANDS NOMBRES

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \bar{X}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(x)$$

⇒ Plus n est grand, plus on tend vers la moyenne.

Exemple: On lance une pièce: 4 lancers: $\frac{3}{4}$ face = 0,75
100 lancers: $\frac{53}{100}$ face = 0,53 $\approx$ 50%

THÉORÈME LIMITE CENTRAL = Les moyennes d'un grand nbr d'échantillons $\leadsto$ loi normale.

$$\circ S_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\circ E(S_n) = n \cdot E(x_i)$$

$$\circ \text{Var}(S_n) = n \cdot \text{Var}(x_i)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(S_n \leq t) &= P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \leq \frac{t - E(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}\right) \\ &= P\left(\frac{S_n - n \cdot E(x_i)}{\sqrt{n \cdot \text{Var}(x_i)}} \leq \frac{t - n \cdot E(x_i)}{\sqrt{n \cdot \text{Var}(x_i)}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{t - n \cdot E(x_i)}{\sqrt{n \cdot \text{Var}(x_i)}}\right) \quad \left(\frac{t - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \text{ si } S_n \text{ suit une loi binomiale}\right) \end{aligned}$$

Exemple: Un avion a 150 places. Probabilité qu'une personne confirme son billet = $p = 0,75$.
 n billets vendus, X = nbr de personnes ayant confirmé.

$$\rightarrow x_i \begin{cases} 1 & \text{passager } i \text{ confirme son billet} & p = 0,75 \\ 0 & \text{sinon} & p = 0,25 \end{cases}$$

$$\text{On cherche } P(X \geq 150) = 0,95 \leadsto \text{TCL} \Rightarrow E(x_i) = n \cdot p = n \cdot 0,75$$

$$P(X \geq 150) = 1 - P(X < 150) = 0,95$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_i) &= n \cdot p \cdot (1 - p) \\ &= n \cdot 0,75 \cdot (0,25) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{150 - n \cdot 0,75}{\sqrt{n \cdot 0,75 \cdot (0,25)}}\right) = 0,05$$

0,05 n'est pas dans le tableau... $\leadsto 1 - \phi(z) = \phi(-z)$

$$\Rightarrow \phi\left(-\frac{150 - n \cdot 0,75}{\sqrt{n \cdot 0,75(0,25)}}\right) = 0,95 \quad 1 - \phi(z)$$

$$\leadsto \text{Du tableau: } \frac{150 - n \cdot 0,75}{\sqrt{n \cdot 0,75(0,25)}} = 1,645$$

En résolvant l'équation, on trouve $n_1 = 187,01$ et $n_2 = 213,9$.
($n_1 \neq$ solution de l'équation de base)

INTERVALLE DE CONFIANCE POUR L'ESPÉRANCE

4 cas possibles se basant sur la variance et le nombre de données.

• 1a: σ connu, DONNÉES NORMALES (= distribuées aléatoirement)

$$I = \left[\bar{X}_n - \frac{\sigma \cdot z_\alpha}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + \frac{\sigma \cdot z_\alpha}{\sqrt{n}} \right] \quad (\bar{X}_n = \text{moyenne. Donnée dans l'exercice ou } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i)$$

z_α = quantile de la loi normale

σ = connu (ou pire $\rightarrow$ variance théorique.)
 n = nbr de données connu.

$$\phi(z_\alpha) - \phi(-z_\alpha) = 0,95$$

$$2\phi(z_\alpha) - 1 = 0,95$$

$$2\phi(z_\alpha) = 1,95$$

$$\phi(z_\alpha) = 0,975$$

$$z_\alpha = \text{table} \rightarrow 1,96$$

pourcentage de l'int. de conf. recherché.

• 1b: σ connu, n GRAND, DONNÉES NON-NORMALES

Même procédure que 1a, en utilisant TCL

• 2a: σ inconnu, n GRAND (> 30)

Même procédure que 1a, en remplaçant σ par l'écart-type

$$\text{empirique: } s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}$$

• 2b: σ inconnu, n PETIT (≤ 30)

Même procédure que 1a, en utilisant la TABLE DE STUDENT. (t_α)

Exemple: α = probabilité de se tromper = 0,05 $1 - \alpha = 0,95$ $n = 15$ données

$n-1 = 14$ degrés de liberté

Prendre: "two sided": chercher 0,95; colonne de gauche: chercher 14. $\Rightarrow t_\alpha = 2,145$

TESTS STATISTIQUES

PRINCIPE, BUT, ERREURS

Statut de H_0 décision	H_0 fautive ($\Rightarrow H_1$ vraie)	H_0 vraie ($\Rightarrow H_1$ fautive)
test rejette H_0	OK	Erreur type I (=niveau de test)
test ne rejette pas H_0	Erreur type II	OK

H_0 : Hypothèse que rien ne change $\Rightarrow$ hypothèse nulle
 H_1 : Alternative.

"Puissance du test" = $1 - \text{erreur de type II}$

On ne peut pas se concentrer sur les deux erreurs. On fixe donc l'erreur de type I pour pouvoir rejeter l'hypothèse nulle avec une fiabilité $1 - \alpha\%$ donnée.

TEST

① FORMULER LES HYPOTHÈSES

- On pose $x_i = \begin{cases} 1 & \dots \\ 0 & \dots \end{cases}$
- On définit $S_n = \sum_{i=1}^n x_i = \text{v.a. qui définit la somme des données}$
 Exemple: Si $x_i = 1$ est vérifié 40 fois, $S_n = 40$.
- On pose $H_0 = p = \dots$
 et $H_1 = p = \dots$

② IDENTIFIER LE CONTEXTE

- $\bullet$ connu ou non (si on reconnaît la loi, on connaît σ car on calcule sa valeur théorique)
- $\bullet$ n grand ou petit

Si S_n suit une loi binomiale $\text{Bin}(n, p)$, on sait par le TCL que si $np(1-p) > 9$, $\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ suit une loi normale $N(0, 1)$.

③ TROUVER LE DOMAINE DE REJET

Deux sortes de tests: - Unilatéral: Uniquement la limite sup. ou inf. nous intéresse
 - Bilatéral: Les deux limites nous intéressent

SORTE DE TEST	UNILATÉRAL	BILATÉRAL
Forme du domaine de rejet	$D_\alpha: [C_\alpha; \infty[$ $D_\alpha:]-\infty; C_\alpha]$	$D_\alpha:]-\infty; a_\alpha] \cup [b_\alpha; \infty[$

• Dans le cas d'un test UNILATÉRAL:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= P(S_n < C_\alpha) \\
 \text{donné} \quad &= P\left(S_n < \frac{C_\alpha - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{C_\alpha - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) \\
 &\quad \text{la table nous donne} \quad \frac{C_\alpha - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} = \dots \\
 &\Leftrightarrow C_\alpha = \dots \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} + n \cdot p \\
 &\Rightarrow D_\alpha =]-\infty; C_\alpha] \text{ ou } [C_\alpha; \infty[
 \end{aligned}$$

• Dans le cas d'un test BILATÉRAL:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= P(|S_n| > C_\alpha) = 1 - P(|S_n| \leq C_\alpha) \\
 \text{donné} \quad &= 1 - P(-C_\alpha \leq S_n \leq C_\alpha) \\
 &= 1 - \Phi(C_\alpha) + \Phi(-C_\alpha) \\
 &= 2 - 2\Phi(C_\alpha) \\
 &\Leftrightarrow \frac{\alpha - 2}{2} = \Phi(C_\alpha) \quad \text{la table nous donne} \quad C_\alpha \\
 &\rightarrow S_n > C_\alpha \Leftrightarrow \frac{S_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} > C_\alpha \\
 &\Leftrightarrow S_n > C_\alpha \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} + n \cdot p = b_\alpha
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow S_n < -C_\alpha \Leftrightarrow \frac{S_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} < -C_\alpha$$

$$\Leftrightarrow S_n < -C_\alpha \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} + n \cdot p = a_\alpha$$

$$\Rightarrow D_\alpha :]-\infty; a_\alpha] \cup [b_\alpha; \infty[$$

④ INTERPRÉTATION DU RÉSULTAT

Si notre S_n observé appartient à D_α , on rejette H_0 avec une fiabilité de $1 - \alpha\%$... Ou le contraire ... Dépend de la consigne ...

▲ C'était pour le cas où on nous donne S_n .

Si au contraire on nous donne $\bar{X}_n$, on imagine que ça suit une loi normale et on a

$$S_n = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{\text{Var}(\bar{X}_n)}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

donné
← σ est donné *
nombre de données

On continue comme avant avec $P(|S_n| > C_\alpha) = \alpha$

$$\text{On obtient : } \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > C_\alpha$$

$$\text{On isole : } \bar{X}_n > \dots = a_\alpha$$

Et pareil pour b_α .

* Et si σ n'est pas donné, même démarche avec

$$S_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S/\sqrt{n}} \quad S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_n)^2}$$

Puis Student à $n-1$ degrés de liberté.

⑤ P-VALEUR

$$\alpha = P(S_n > S_n \text{ observée}) = P\left(S_n > \frac{S_{\text{obs}} - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$$

→ permet de rejeter H_0 un peu plus précisément.

$$= P\left(S_n > \dots\right) = 1 - P\left(S_n < \dots\right) \xrightarrow{\text{table}} = \alpha$$

⚠ Si on précise rien à l'examen, petites méthodes utiles:

- 1). Établir un intervalle de confiance pour μ au niveau α
 - Si $\mu \in$ à l'intervalle, on ne rejette pas H_0
- 2). Si la P-Valeur est de l'ordre de 1% max, on peut rejeter H_0
($\leadsto P(|S_n| > S_n^{obs} = \dots \xrightarrow{\text{table}} = \dots$)

COMPARAISON DE DEUX ÉCHANTILLONS

On nous donne $\bar{X}_A$ et $\bar{X}_B$. On base nos recherches sur des moyennes théoriques μ_A et μ_B .

Si on a quelque chose du type: $H_0: \mu_A = \mu_B$ $H_1: \mu_A > \mu_B$,
On ramène à ce qu'on connaît: $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$ $H_1: \mu_A - \mu_B > 0$.

On utilisera la formule:

$$S_n = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}}$$

... qui suit une loi normale.

... Et on recommence tout le cirque avec ce S_n , le domaine de rejet et blablabla ...

→ Pour les tests statistiques, prendre les corrigés des séries 10 et 11 en exemple.