Durée : 144 minutes

Analyse II
Examen
Partie commune
Printemps 2020

Réponses

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : L'ensemble $\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1\big\} \subset \mathbb{R}^3$ est

- [ ] borné et fermé
- [ ] borné mais ni ouvert ni fermé
- [ ] non borné et ni ouvert ni fermé
- [x] non borné mais fermé

Question 2 : Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f(x, y) = y^2 + xy + \sqrt{3}\,x\,,$$
$$g(x, y) = x^2 + y^2 + xy - \frac{3}{4}\,.$$

Alors, sous la contrainte $g(x, y) = 0$,

- [ ] le maximum de la fonction f est plus petit que 1
- [x] le minimum de la fonction f est plus petit que $-\sqrt{3}$
- [ ] la fonction f atteint son minimum en exactement deux points
- [ ] la fonction f atteint son maximum en exactement un point

Question 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y + y^4}{x^4 + y^2}\,.$$

Alors

- [ ] $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 1$
- [x] f n'admet pas de limite en $(0, 0)$
- [ ] $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = y^2$
- [ ] $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$

Question 4 : Soit

$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ y \ge 0,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\big\}\,.$$

Alors, l'intégrale

$$\int_D \ln(x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

vaut

- [x] $\pi \ln(4) - \frac{3\pi}{4}$
- [ ] $\pi \ln(2) - \frac{\pi}{4}$
- [ ] $\pi \ln(4) - \pi$
- [ ] $\pi \ln(16) - \pi$

Question 5 : Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \int_{t}^{t^2} \frac{1 - e^{-xt}}{x}\, dx$$

Alors, la dérivée de f est donnée par

- ■ $f'(t) = \dfrac{-3e^{-t^3} + 2e^{-t^2} + 1}{t}$
- ☐ $f'(t) = \dfrac{2 - 2e^{-t^3} - 3e^{-t^2}}{t}$
- ☐ $f'(t) = \dfrac{-e^{-t^3}(t+1) + 2e^{-t^2} - t + 1}{t^2}$
- ☐ $f'(t) = \dfrac{1 - 3e^{-t^3} - e^{-t^2}}{t}$

Question 6 : Soit $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par $\boldsymbol{f}(x, y, z) = \big(y^2,\, z^2,\, x^2\big)$. Alors, la matrice jacobienne de la fonction composée $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}$ en (x, y, z) est

- ☐ $J_{\boldsymbol{g}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 4y^2z & 0 \\ 0 & 0 & 4xz^2 \\ 4x^2y & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_{\boldsymbol{g}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 4x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4y^3 \\ 4z^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ■ $J_{\boldsymbol{g}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4z^3 \\ 4x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 4y^3 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_{\boldsymbol{g}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4yz \\ 4xz & 0 & 0 \\ 0 & 4xy & 0 \end{pmatrix}$

Question 7 : Soit la surface $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 + z^3 - 1 = 0\big\}$. L'équation du plan tangent à S au point $(1, -1, -1)$ est

- ☐ $-(y - 2) + (x + 1) + (z - 3) = 0$
- ☐ $-3z - x - 2y + 2 = 0$
- ■ $x - 1 - 2(y + 1) + 3(z + 1) = 0$
- ☐ $-(x - 1) + (y + 1) + (z + 1) = 0$

Question 8 : Soit

$$D = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\,\Big\}.$$

Alors, l'intégrale

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dx\, dy\, dz$$

vaut

- ☐ $\dfrac{\pi}{3}$
- ■ $\pi\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- ☐ $\dfrac{2\pi}{3}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- ☐ $2\pi\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Question 9 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = -x^2$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$ vérifie aussi

- ☐ $y(1) = \frac{1}{4}\,e^2 + \frac{3}{4}$
- ■ $y(1) = \frac{1}{4}\,e^2 + \frac{5}{4}$
- ☐ $y(1) = \frac{1}{2}\,e^2 + \frac{1}{4}$
- ☐ $y(1) = \frac{1}{2}\,e^2 - \frac{1}{4}$

Question 10 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

- ■ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y^{1/3}} f(x,y)\,dx \right) dy$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{y^{1/3}}^{y^2} f(x,y)\,dx \right) dy$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^{\sqrt{x}} \left(\int_{y^2}^{y^{1/3}} f(x,y)\,dx \right) dy$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{y^{1/3}} f(x,y)\,dx \right) dy$

Question 11 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \cos\left(2x + 3y + y^2\right).$$

Alors, le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(0,0)$ est donné par

- ☐ $p_2(x,y) = 2x + 3y + y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 - (2x+3y)^2$
- ■ $p_2(x,y) = 1 - 2x^2 - 6xy - \frac{9}{2}\,y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\,y^2$

Question 12 : Soit, pour tout $\beta > 1$, la fonction $f_\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\beta(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\beta y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors, la dérivée directionnelle de f_β en $(0,0)$ suivant le vecteur $\boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\top$

- [ ] vaut $\dfrac{1}{2}$ si $\beta = 2$
- [ ] est un nombre réel positif si $\beta > 1$
- [ ] vaut $\dfrac{1}{2^{(\beta+1)/2}}$ si $\beta < 2$
- [x] vaut 0 si $\beta > 2$

Question 13 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = e^{\,x-y(x)}$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$ vérifie aussi

- [ ] $y(2) = \ln(2)$
- [x] $y(2) = 2$
- [ ] $y(2) = \ln\big(2 - e^2\big)$
- [ ] $y(2) = \frac{1}{2}$

Question 14 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- [x] toutes les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$
- [ ] f est de classe C^1
- [ ] f est différentiable en $(0,0)$, mais f n'est pas de classe C^1
- [ ] f est différentiable en $(0,0)$, mais une des dérivées partielles de f n'est pas continue en $(0,0)$

Question 15 : Soit $X \subset \mathbb{R}$ l'ensemble tel que pour tout $\alpha \in X$, toutes les solutions $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) + (\alpha+1)y'(x) + \tfrac{1}{4}\,y(x) = 0$$

satisfont $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$. Alors

- [x] $X = \,]-1, +\infty[$
- [ ] $X = \,]-2, 0[$
- [ ] $X = [-1, +\infty[$
- [ ] $X = \mathbb{R}$

Question 16 : Soit $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ le domaine de définition du changement de coordonnées $\Phi : \widetilde{D} \to D$, défini par

$$\Phi(x_1, x_2) = \left(x_1\, x_2,\ \frac{x_1}{x_2}\right).$$

Sachant que $D =]1, 2[\times]1, 2[$, lequel parmi les ensembles suivants est le seul à pouvoir correspondre à $\widetilde{D}$?

- ☐ $\widetilde{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, \quad x_1x_2 < 2, \quad x_1 < x_2 < 2x_1\right\}$
- ■ $\widetilde{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, \quad \frac{1}{x_1} < x_2 < \frac{2}{x_1}, \quad x_2 < x_1 < 2x_2\right\}$
- ☐ $\widetilde{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, \quad x_1x_2 < 2, \quad 1 < \frac{x_2}{x_1} < 2\right\}$
- ☐ $\widetilde{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, \quad x_2 > \frac{1}{x_1}, \quad x_2 < 2x_1\right\}$

Question 17 : Soit $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x^3 + \frac{5}{2}\,x^2 + y^2\,.$$

Alors

- ☐ le minimum global de f vaut 2
- ☐ la fonction f n'admet pas de maximum global
- ☐ la fonction f admet un minimum local en $\left(-\frac{5}{3}\,,\,0\right)$
- ■ le maximum global de f vaut 18

Question 18 : Soit sign : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0\,, \\ 0 & \text{si } t = 0\,, \\ -1 & \text{si } t < 0\,. \end{cases}$$

Parmi les fonctions suivantes, déterminer celle qui possède un point de discontinuité dans son domaine de définition

- ☐ $\boldsymbol{f} :]-1, 2[\to \mathbb{R}^3$ définie par $\boldsymbol{f}(t) = \Big(t,\ |t|,\ \operatorname{sign}(t)(e^t - 1)\Big)$
- ☐ $\boldsymbol{f} :]0, 5[\to \mathbb{R}^2$ définie par $\boldsymbol{f}(t) = \left(t^2,\ t^2\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)$
- ■ $\boldsymbol{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\boldsymbol{f}(t) = \Big(\operatorname{sign}(t)\cos(t),\ \operatorname{sign}(t)\sin(t)\Big)$
- ☐ $\boldsymbol{f} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ définie par $\boldsymbol{f}(t) = \big(e^{1/(t-2)},\ \operatorname{sign}(t)\,t,\ \sin(t)\big)$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$, et soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x, y) = y - f(x)$. Alors, le gradient de F en $\big(0, f(0)\big)$ est orthogonal à la tangente au graphique de la fonction f en $\big(0, f(0)\big)$.

■ VRAI □ FAUX

Question 20 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que les dérivées partielles de f existent en $(0, 0)$. Alors, f est continue en $(0, 0)$.

□ VRAI ■ FAUX

Question 21 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en tout point de $\mathbb{R}^3$. Alors les fonctions derivées partielles existent et sont continues en tout point de $\mathbb{R}^3$.

□ VRAI ■ FAUX

Question 22 : Soit y_1 une solution de l'équation différentielle $y' + y = 1$ et soit y_0 une solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$. Alors, pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, la fonction $y = y_0 + Cy_1$ est une solution de l'équation différentielle $y' + y = 1$.

□ VRAI ■ FAUX

Question 23 : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné et fermé et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(D)$. Alors f atteint son minimum global dans D.

■ VRAI □ FAUX

Question 24 : Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $F(1, 0) = 0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(1, 0) \neq 0$. Alors, il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(I)$, telle que $f(0) = 1$ et pour tout $y \in I$, $F\big(f(y), y\big) = 0$.

■ VRAI □ FAUX

Question 25 : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le disque unité fermé et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'image de f est l'intervalle $[m, M]$, où m est le minimum global de f sur D et M est le maximum global de f sur D.

■ VRAI □ FAUX

Question 26 : Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est non bornée.

□ VRAI ■ FAUX

Question 27 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $(0, 0, 0)$ soit un point stationnaire de f et telle que le déterminant de la matrice hessienne de f en $(0, 0, 0)$ soit strictement positif. Alors, f admet un minimum local en $(0, 0, 0)$.

□ VRAI ■ FAUX

Question 28 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Alors, $\int_D (x + y)\, dx\, dy = 0$.

■ VRAI □ FAUX