ALGÈBRE LINÉAIRE PROPÉDEUTIQUE
mock exam

Tous les document sont autorisés ; les calculatrices scientifiques ne sont pas autorisées.
Vos réponses doivent être motivées ! Des points seront retirés pour des argumentations manquantes ou incomplètes.

Exercice 1. (9 points)

(a) Parmi les familles suivantes, lesquelles sont libres ?

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solution: *1pt pour $\mathcal{E}$, 2 pour $\mathcal{F}$*

(b) Donner une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{E})$ et de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Solution: *3pt premiere ; 1 pour deuxieme*

(c) Déduire la dimension des deux espaces $\mathrm{Vect}(\mathcal{E})$ et $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Solution: *1pt chaque*

Exercice 2. (10 points).
Considérons les applications $u, v, w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ données par

$$u\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2z \\ z+1 \\ y-z \end{pmatrix}, \qquad v\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ -y \\ z-y \end{pmatrix}, \qquad w\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y-2z \\ x+y-z \\ 2x+y \end{pmatrix}.$$

1. Laquelle des applications u, v, w n'est pas linéaire ? Argumentez !

   Solution: *1pt*

2. Trouver des matrices $M_v, M_w \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$v\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = M_v \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad w\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = M_w \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   Solution: *1pt chaque*

3. Calculer $\mathrm{Ker}(w)$.

   Solution: *3pt*

4. Calculer $v \circ v$ (soit directement, soit sous forme matricielle).

   Solution: *2pt*

5. Les applications v et w sont-elles inversibles ? Calculer les inverses le cas échéant.

   Solution: *1+1 pt*

Exercice 3. (11 points) On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x & -y & +z & +t & = 2 \\ 3x & -3y & +3z & +2t & = 5 \\ x & -y & +z & & = 1 \\ 5x & -5y & +5z & +7t & = 12 \end{cases}$$

1. Ecrire le système sous forme $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ sont à détérminer et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ est le vecteur des inconnues.
   Solution: *1pt*
2. Appliquer le pivot de Gauss pour trouver la forme échélonnée du système.
   Solution: *3pt*
3. Trouver les solutions du système homogène ? Que peut-on dire de cet ensemble. Donner une base.

   Solution: *4pt*
4. Trouver une solution particulière de $AX = B$. Décrire l'ensemble de toutes les solutions.
   Solution: *3pt*