

Analyse II

Examen

Partie commune Printemps 2018

Les notations et la terminologie de cet énoncé sont celles utilisées dans les séries d'exercices et le cours d'Analyse II du semestre de printemps 2018.

- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y' + 6x^5 y^2 = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = \frac{1}{3}$ vérifie aussi :

☐ $y(\sqrt{2}) = -\frac{13}{24}$

☐ $y(\sqrt{2}) = \frac{1}{3e^7}$

☒ $y(\sqrt{2}) = \frac{1}{10}$

☐ $y(\sqrt{2}) = -\frac{1}{4}$

Question 1. $y' + 6x^5 y^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -6x^5 y^2 \Rightarrow \frac{1}{y^2} dy = -6x^5 dx$
 $\Rightarrow -\frac{1}{y} = -x^6 + C \Rightarrow y = \frac{1}{x^6 - C}$
 $y(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{1-C} = \frac{1}{3} \Rightarrow 1-C = 3 \Rightarrow C = -2$
 $y(x) = \frac{1}{x^6 + 2}$ $y(\sqrt{2}) = \frac{1}{2^3 + 2} = \frac{1}{10}$

Question 2 La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y' + y = x^2 e^{-x}$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi :

☐ $y(-2) = -3e^{-2}$

☒ $y(-2) = -3e^2$

☐ $y(-2) = -\frac{5}{4}(e^2 - e^{-4})$

☐ $y(-2) = -\frac{1}{4}(e^4 - 13e^{-2})$

Question 2. $y' + y = x^2 e^{-x}$
 $p(x) = 1 \Rightarrow P(x) = x$
 $y(x) = \left(\int x^2 e^{-x} \cdot e^x dx \right) e^{-x} = \left(\int x^2 dx \right) e^{-x}$
 $= \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right) e^{-x}$
 $y(1) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3} + C \right) e^{-1} = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{3}$
 $y(x) = \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3} \right) e^{-x} \Rightarrow y(-2) = -3e^2$

Question 3 La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u'' - 2u' + 5u = 17 \sin(2t)$$

qui satisfait les conditions initiales $u(0) = 1$ et $u'(0) = 1$ vérifie aussi :

☐ $u(\pi) = 4 - 4e^\pi$

☒ $u(\pi) = 4 - 3e^\pi$

☐ $u(\pi) = -4 + 5e^\pi$

☐ $u(\pi) = 4$

Question 3

$$u'' - 2u' + 5u = 17 \sin(2t) \quad (1)$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \quad \Delta = -16 = (4i)^2 \quad \lambda = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

$$\lambda_1 = 1 + 2i \quad \lambda_2 = 1 - 2i$$

$$y_h = e^x (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$$

$$y_p = A \cos(2x) + B \sin(2x)$$

$$y'_p = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)$$

$$y''_p = -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x)$$

On remplace en (1)

$$-4A \cos(2x) - 4B \sin(2x) + 4A \sin(2x) - 4B \cos(2x) + 5A \cos(2x) + 5B \sin(2x) = 17 \sin(2x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-4A - 4B + 5A) \cos(2x) + (-4B + 4A + 5B) \sin(2x) = 17 \sin(2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - 4B = 0 \Rightarrow A = 4B \\ B + 4A = 17 \Rightarrow B + 16B = 17 \Rightarrow B = 1 \text{ et } A = 4 \end{cases}$$

$$\text{Alors } y_p = 4 \cos(2x) + \sin(2x)$$

$$\text{et } y(x) = y_h + y_p = 4 \cos(2x) + \sin(2x) + e^x (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 4 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = -3$$

$$y'(x) = -8 \sin(2x) + 2 \cos(2x) + e^x (-3 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) + e^x (6 \sin(2x) + 2 C_2 \cos(2x))$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 2 + (-3) + 2 C_2 = 1 \Rightarrow 2 C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1$$

$$\text{Donc } y(\pi) = 4 + e^\pi (-3)$$

Question 4 Soient les sous-ensembles

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 0\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Alors l'ensemble non vide $A \cap B \subset \mathbb{R}^3$ est :

- ☐ ouvert et borné
☒ fermé et borné
☐ ouvert et non borné
☐ fermé et non borné

Question 4.

$A \cap B$ est la demi-sphère qui est dessous du plan

$$x + y + z = 0$$

bornée par la sphère et le plan

fermé le bords sont dans l'ensemble

Question 5 La limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} + \frac{xy^3}{x^2 + y^6} \right)$

- ☐ vaut 0
☒ n'existe pas
☐ vaut 2
☐ vaut 1

Questions.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\underbrace{\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}}_A + \underbrace{\frac{xy^3}{x^2 + y^6}}_B \right)$$

Pour le A: $\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^2 |y|}{x^2} = |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow 0} 0$

alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$

Pour le B:

$$\lim_{(x^3, x) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} = \lim_{(x^3, x) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 x^3}{x^6 + x^6} = \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

mais $\lim_{(x,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} = \frac{0}{x} = 0$

Don n'existe pas.

Question 6 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors :

- ☒ la fonction f est continue en $(0, 0)$
- ☐ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) \neq \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe mais $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ n'existe pas
- ☐ la fonction f est continue en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$

Question 6. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{2 + \sin(\frac{1}{x})} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$$\left| \frac{y}{2 + \sin(\frac{1}{x})} \right| \leq \frac{|y|}{2 - 1} = |y| \rightarrow 0$$

Donc $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0) \Rightarrow f$ continue

Question 7 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors :

- ☐ Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ n'existent pas
- ☒ Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$
- ☐ f est différentiable en $(0, 0)$, mais f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

Question 7

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- On cherche si il existent les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{\sqrt{h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h+0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Donc ils existent

- On checke si f est différentiable

pour la théorie f est différentiable en (x_0, y_0) si les $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent en (x_0, y_0) et en plus

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right]}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} \rightarrow 0$$

Dans notre cas

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \frac{x^3 - xy}{x^2 + y^2} \quad \text{Mais}$$

$$\left| \frac{x^3 - xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} + \frac{|xy|}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{|x|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3}{x^2} = |x| \rightarrow 0 \quad \text{Mais}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|xy|}{x^2 + y^2} = \frac{0}{x^2} \rightarrow 0 \quad \text{? non}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{pas}$$

Question 8 Soit la surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + 4z^2 = 6\}$. L'équation du plan tangent à S au point $(-1, 1, 1)$ est donnée par :

☐ $x - y - 4z + 6 = 0$

☐ $4x - 2y - 8z - 14 = 0$

☐ $4x - 2y - 8z + 8 = 0$

☒ $2x - y - 4z + 7 = 0$

Question 8: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + 4z^2 = 6\}$ $(-1, 1, 1)$

le plane est

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

$$f_x = 4x^3 \quad f_y = 2y \quad f_z = 8z$$

$$\nabla f(-1, 1, 1) = (-4, 2, 8) \neq (0, 0, 0)$$

$$\text{Donc } -4(x+1) + 2(y-1) + 8(z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 2y + 8z - 4 - 2 - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$-4x + 2y + 8z - 14 = 0 \Rightarrow 2x - y - 4z + 7 = 0$$

Question 9 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^y \\ y^2 + x \end{pmatrix}$.

Alors la matrice jacobienne de f évaluée en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est :

☐ $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \text{Log}(1+x^2) 2x & 0 \\ 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$

☐ $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \text{Log}(1+x^2) \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$

☒ $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \text{Log}(1+x^2) & 0 \\ 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$

☐ $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \text{Log}(1+x^2) 2x \\ 1 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Question 9. $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^y \\ y^2 + x \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = y \cdot (1+x^2)^{y-1} 2x = 2xy (1+x^2)^{y-1}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial e^{y \ln(1+x^2)}}{\partial y} = e^{y \ln(1+x^2)} \cdot \ln(1+x^2) = (1+x^2)^y \ln(1+x^2)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$$

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy (1+x^2)^{y-1} & (1+x^2)^y \ln(1+x^2) & 0 \\ 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

Question 10 Soient $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $g(u, v) = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$ et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$J_f(x, y) = (3x^2 + y^2 \quad 2xy + e^y).$$

Alors la fonction

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto h(u, v)$$

définie par $h = f \circ g$ satisfait :

☐ $\frac{\partial h}{\partial u}(0, 1) = -3$

☐ $\frac{\partial h}{\partial u}(0, 1) = -1$

☒ $\frac{\partial h}{\partial v}(0, 1) = -3$

☐ $\frac{\partial h}{\partial v}(0, 1) = -1$

Question 10

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$$

$$J_f(x, y) = (3x^2 + y^2 \quad 2xy + e^y)$$

$$h = f \circ g$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(u, v), g_2(u, v)) \frac{\partial g_1}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(u, v), g_2(u, v)) \frac{\partial g_2}{\partial v}(u, v)$$

$$g_1(u, v) = -v \quad g_2(u, v) = u$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(g_1(u, v), g_2(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial x}(-v, u) = 3(-v)^2 + u^2 = 3v^2 + u^2 \xrightarrow{(0,1)} 3$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial v}(u, v) = -1 \quad \frac{\partial g_2}{\partial v}(u, v) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-v, u) = -2vu + e^u \xrightarrow{(0,1)} e^0 = 1$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = -3$$

Question 11 Soit $(x_0, y_0) = (\sqrt{\pi/6}, \sqrt{2\pi/3})$ et soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \sin(x^2) + \cos(y^2).$$

L'équation $f(x, y) = 0$ définit dans un voisinage de x_0 une fonction $y = g(x)$ telle que $g(x_0) = y_0$ et $f(x, g(x)) = 0$. De plus, on a :

☐ $g'(x_0) = -\frac{\pi}{2}$

☐ $g'(x_0) = \frac{\pi}{2}$

☐ $g'(x_0) = -\frac{1}{2}$

☒ $g'(x_0) = \frac{1}{2}$

Question 11 $(x_0, y_0) = (\sqrt{\pi/6}, \sqrt{2\pi/3})$

$$f(x, y) = \sin(x^2) + \cos(y^2)$$

Theoreme Si $f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I \subset \mathbb{R} \quad I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$f_y(x, g(x)) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

$$g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est } C^1$$

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \quad \forall x \in I$$

$$\text{Si } f \text{ est } C^k \Rightarrow g \text{ est } C^k.$$

$$f_y(x, y) = -2y \sin(y^2) \quad f_y\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}, \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\right) = -2\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \neq 0$$

$$f_x(x, y) = 2x \cos(x^2) \quad g(x_0) = g\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) = y_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$$

$$f_x(x, g(x)) = 2x \cos(x^2) \quad f_x(x_0, g(x_0)) = 2\sqrt{\frac{\pi}{6}} \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

$$f_y(x, y) = -2y \sin(y^2)$$

$$f_y(x, g(x)) = -2g(x) \sin(g^2(x))$$

$$f_y(x_0, g(x_0)) = -2\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{2\pi}$$

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}}{-\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}^2} = \frac{1}{2}$$

Question 12 Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\}$ et soit la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x + y + xy}.$$

Alors le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(0, 0)$ est :

☒ $p_2(x, y) = 1 + x - y + x^2 - 3xy + y^2$

☐ $p_2(x, y) = 1 + x - y + x^2 - 2xy + y^2$

☐ $p_2(x, y) = 1 + x - y + x^2 - xy + y^2$

☐ $p_2(x, y) = 1 + x - y + x^2 - 4xy + y^2$

Question 12. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\}$

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x + y + xy}$$

$$P_2(x, y) = f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0)(x, y) + \frac{1}{2} D_2 f(x_0, y_0)(x, y)$$

$$D_1 f(x_0, y_0)(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1+y}{(1-x+y+xy)^2} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1+x}{(1-x+y+xy)^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{-1}{1} = -1$$

$$D_1 f(0,0) = 1 \cdot x - 1 \cdot y = x - y$$

$$D_2 f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot x^2 + f_{yy}(x_0, y_0) \cdot y^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(xy)$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{0(1-x+y+xy)^2 - (1-y) \cdot 2(1-x+y+xy)(-1+y)}{(1-x+y+xy)^4}$$

$$f_{xx}(0,0) = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)}{1} = 2$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{0(1-x+y+xy)^2 - (1+x) \cdot 2(1-x+y+xy)(1+x)}{(1-x+y+xy)^4}$$

$$f_{yy}(0,0) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{1} = -2$$

$$f_{xy}(x, y) = -\frac{1 \cdot (1-x+y+xy)^2 + (1+x) \cdot 2(1-x+y+xy)(-1+y)}{(1-x+y+xy)^4}$$

$$= \frac{x(y-1)+y-3}{(1-x+y+xy)^3} \Rightarrow f_{xy}(0,0) = -3$$

$$f(0,0) = 1$$

$$P_2(x, y) = 1 + x - y + \frac{1}{2} (2x^2 + 2y^2 - 3 \cdot 2xy) = 1 + x - y + x^2 + y^2 - 3xy$$

Question 13 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 5xy.$$

Alors :

- ☐ f admet un minimum local en $(0, 0, 0)$
- ☒ f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0, 0)$
- ☐ $(0, 0, 0)$ n'est pas un point stationnaire de f
- ☐ f admet un maximum local en $(0, 0, 0)$

Question 13. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 5xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 5y = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x = 5y \quad \times 2 \Rightarrow 4x = 10y \\ 5x = 2y \quad \times 5 \Rightarrow 25x = 10y \\ \hline -21x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 5x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 6z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -5 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6$$

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 4 - 25 = -21$$

$$\lambda_3 = 6(-21) < 0$$

$\Rightarrow$ selle en $(0, 0, 0)$

Question 14 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^3 y^3$$

et soit $g(x, y) = x^4 + 16y^4 - 32$. Alors, sous la contrainte $g(x, y) = 0$,

- ☐ la fonction f atteint son maximum absolu en exactement 4 points
- ☒ la fonction f atteint son minimum absolu en $(-2, 1)$
- ☐ la fonction f atteint son minimum absolu en un seul point
- ☐ la fonction f atteint son maximum absolu en $(\sqrt[4]{7}, \sqrt{5}/2)$

Question 14 $f(x, y) = x^3 y^3$
 $g(x, y) = x^4 + 16y^4 - 32$

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^3 y^3 - \lambda (x^4 + 16y^4 - 32)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y^3 - 4x^3 \lambda = 0 \quad \text{①} \Rightarrow 3x^2 y^3 - 4x^3 \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 x^3 - 64y^3 \lambda = 0 \quad \text{②} \Rightarrow 3y^2 x^3 - 64y^3 \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y) = x^4 + 16y^4 - 32 = 0 \quad \text{③}$$

$$\text{①} \quad 3x^2 y^3 - 4x^3 \lambda = 0$$

$$\text{②} \quad 3x^3 y^2 - 64y^3 \lambda = 0$$

$$4x^4 \lambda = 64y^4 \lambda \Rightarrow 4\lambda(x^4 - 16y^4) = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \text{①} \quad 3x^2 y^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{③} \Rightarrow y^4 = 2 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$(0, 2) \quad (0, -2)$$

$$y = 0 \quad \text{③} \quad x^4 = 32 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{32}$$

$$(\sqrt[4]{32}, 0) \quad (-\sqrt[4]{32}, 0)$$

$$\lambda \neq 0 \quad x^4 - 16y^4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2y$$

$$\text{③} \quad 16y^4 + 16y^4 = 32 \Rightarrow y^4 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$y = 1 \quad x = \pm 2 \quad y = -1 \quad x = \pm 2$$

$$(2, 1) \quad (-2, 1) \quad (2, -1) \quad (-2, -1)$$

$$f(0, 2) = 0 = f(0, -2) = f(\sqrt[4]{32}, 0) = f(-\sqrt[4]{32}, 0) = 0$$

$$f(2, 1) = 8 \cdot 1 = 8 \quad f(-2, 1) = -8 \quad f(2, -1) = -8 \quad f(-2, -1) = 8$$

Alors f atteint son minimum absolu en $(-2, 1)$
 (et $(-2, -1)$)

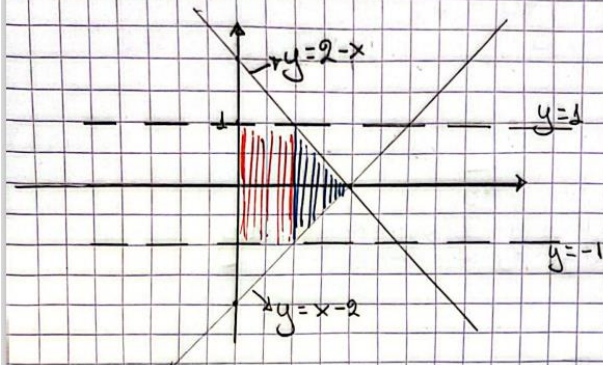
Question 15 Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, |y| \leq \min\{1, 2-x\}\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D xy^2 dx dy$$

vaut :

- ☐ $\frac{2}{15}$
☐ $\frac{16}{15}$
☒ $\frac{8}{15}$
☐ $\frac{4}{15}$

Question 15.



Si $0 \leq x \leq 1$ $|y| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$

Si $1 \leq x \leq 2$ $0 \leq |y| \leq 2-x \Rightarrow$
 $x-2 \leq y \leq 2-x$

$$I_1 = \int_0^1 \int_{-1}^1 xy^2 dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_{-1}^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} x + \frac{1}{3} x \right) dx =$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \int_1^2 \int_{x-2}^{2-x} xy^2 dy dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_{x-2}^{2-x} dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_{x-2}^{2-x} = \frac{1}{3} x (2-x)^3 - \frac{1}{3} x (x-2)^3 = \frac{1}{3} x (2-x)^3 + \frac{1}{3} x (2-x)^3 =$$

$$= \frac{2}{3} x (2-x)^3 = \frac{2}{3} x (8 - 12x + 6x^2 - x^3) =$$

$$= \frac{16}{3} x - 8x^2 + 4x^3 - \frac{2}{3} x^4$$

Donc

$$= \int_1^2 \left(\frac{16}{3} x - 8x^2 + 4x^3 - \frac{2}{3} x^4 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{8}{3} x^2 - \frac{8}{3} x^3 + x^4 - \frac{2}{15} x^5 \right]_1^2 = \dots$$

$$= -\frac{32}{3} + 15 - \frac{62}{15} = -\frac{160}{15} - \frac{62}{15} + 15 =$$

$$= -\frac{222}{15} + \frac{225}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

Question 16 L'intégrale $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{x^{37}}{1+y^{20}} dy \right) dx$ vaut :

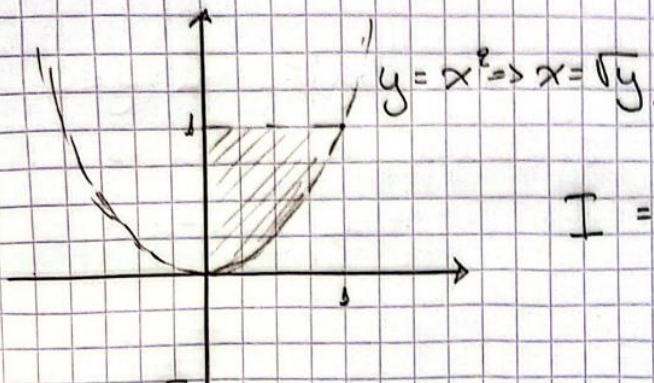
☐ $\frac{\text{Log}(2)}{38}$

☒ $\frac{\text{Log}(2)}{760}$

☐ $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10}$

☐ $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{10}$

Question 16. $I = \int_0^1 \int_{x^2}^1 \frac{x^{37}}{1+y^{20}} dy dx$



$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y) dx \right) dy$$

$$\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x^{37}}{1+y^{20}} dx = \frac{x^{38}}{38(1+y^{20})} \Big|_0^{\sqrt{y}} = \frac{1}{38} \frac{y^{19}}{1+y^{20}}$$

$$\frac{1}{38} \int \frac{y^{19}}{1+y^{20}} dy \quad y^{20} = t \Rightarrow 20y^{19} dy = dt \Rightarrow y^{19} dy = \frac{1}{20} dt$$

$$\frac{1}{38} \int \frac{dt}{20(1+t)} = \frac{1}{760} \int \frac{dt}{1+t} = \frac{\ln(1+t)}{760} = \frac{\ln(1+y^{20})}{760}$$

$$\text{Donc } \int_0^1 \frac{1}{38} \frac{y^{19}}{1+y^{20}} dy = \frac{\ln 2}{760} - \frac{\ln 1}{760} = \frac{\ln 2}{760}$$

Question 17 Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0\}$.

Alors l'intégrale

$$\int_D \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$$

vaut :

☐ $-\frac{4}{5}$

☒ $-\frac{31}{40}$

☐ 0

☐ $-\frac{31}{30}$

Question 17.

$$D: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0\}$$

$$\int_D \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$$

$$x = r \sin \varphi \cos \theta$$

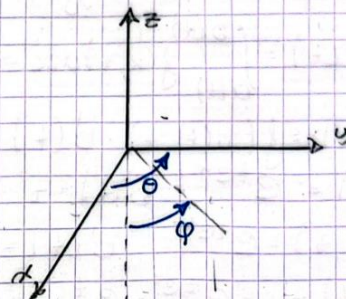
$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = r \cos \varphi$$

$$0 \leq r \leq 2$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi$$

$$f(x, y, z) = \frac{r^3 \sin^2 \varphi \cos \theta \sin \theta \cos \varphi}{\sqrt{r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \varphi}}$$

$$= \frac{r^3 \sin^2 \varphi \cos \theta \sin \theta \cos \varphi}{r \sqrt{\sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \cos^2 \varphi}} = r^2 \sin^2 \varphi \cos \theta \sin \theta \cos \varphi$$

$$I = \int_1^2 \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2}^\pi r^2 \sin^2 \varphi \cos \theta \sin \theta \cos \varphi r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_1^2 r^4 dr \cdot \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos \theta \sin \theta d\theta}_{\frac{1}{2} \sin(2\theta)} \cdot \int_{\pi/2}^\pi \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi =$$

$$\int_{\pi/2}^\pi \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi \quad \cos \varphi = t \Rightarrow -\sin \varphi d\varphi = dt \Rightarrow d\varphi = \frac{dt}{-\sin \varphi}$$

$$I_3 = -\int t^3 dt = -\frac{1}{4} t^4 = -\frac{1}{4} \cos^4 \varphi \Big|_{\pi/2}^\pi = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Alors } I = \frac{1}{5} r^5 \Big|_1^2 \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right]_0^{\pi/2} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) =$$

$$= \left(\frac{32}{10} - \frac{1}{10} \right) \left(-\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \left(-\frac{1}{4} \right) = \dots = -\frac{31}{40}$$

Question 18 Soit la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_0^{t^2} e^{te^x} dx.$$

Alors on a :

☐ $F'(1) = 4e^e - e$

☐ $F'(1) = 2e^e - e$

☒ $F'(1) = 3e^e - e$

☐ $F'(1) = e^e - e$

Question 18 $F(t) = \int_0^{t^2} e^{te^x} dx$

Si $F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx \Rightarrow$

$$F'(t) = f(b(t), t) \cdot b'(t) - f(a(t), t) a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

$$f(x, t) = e^{te^x} \quad b(t) = t^2 \quad a(t) = 0$$

$$f(b(t), t) = e^{te^{t^2}} \quad b'(t) = 2t$$

$$f(a(t), t) = e^{te^0} = e^t \quad a'(t) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = e^x e^{te^x}$$

$$\int_0^{t^2} e^x e^{te^x} dx = \int_0^{t^2} e^{t \cdot u} du = \frac{1}{t} e^{te^{t^2}} - \frac{1}{t} e^{te^0} =$$

$$e^x = u \Rightarrow e^x dx = du \quad = \frac{1}{t} e^{te^{t^2}} - \frac{1}{t} e^t$$

$$F'(t) = e^{te^{t^2}} \cdot 2t - 0 + \frac{1}{t} e^{te^{t^2}} - \frac{1}{t} e^t$$

$$F'(1) = e^e \cdot 2 + \frac{1}{1} e^e - e = 3e^e - e$$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 19 Si y_1 et y_2 sont deux solutions sur un intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - \cos(y) = 0$, alors $y_1 + y_2$ est aussi une solution de cette équation sur I .

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 19.

l'eq différentielle n'est pas linéaire

Question 20 Soit $(x_k)_{k \geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\|x_k\| = 1$ pour tout $k \geq 1$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 20.

Soit $(x_k)_{k \geq 1} \in \mathbb{R}^2$ avec

$$x_1 = (1, 0) \quad x_2 = (0, 1) \quad x_3 = (1, 0) \dots$$

$\|x_k\| = 1 \quad \forall k \geq 1$ mais la suite ne converge pas.

Question 21 Soient $(u_k)_{k \geq 1}$ et $(v_k)_{k \geq 1}$ deux suites dans $\mathbb{R}^n$. Si $(u_k + v_k)_{k \geq 1}$ est une suite convergente alors $(u_k)_{k \geq 1}$ et $(v_k)_{k \geq 1}$ convergent aussi.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 21

$$\text{Soit } u_1 = (1, -1) \quad u_2 = (-1, 1) \quad u_3 = (1, -1) \dots$$

$$v_1 = -u_1 \quad v_2 = -u_2 \dots$$

les suites ne convergent pas mais

$u_k + v_k = 0 \quad \forall k \geq 0$ alors convergente

Question 22 Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = a \in \mathbb{R}^n$. Si $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(a_k) = 1$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 22.

$$f \text{ continue} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = f(a) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 1$$

Question 23 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et soit $\bar{E}$ son adhérence. Si $E = \bar{E}$, alors la frontière de E est vide.

☐

VRAI

☒

FAUX

Question 23

$$\text{Si } E = \bar{E} \Rightarrow E \text{ est fermé} \Rightarrow \partial E \subseteq E$$

Question 24 Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq 1 + y^2 + z^2\}$. Si $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur D , alors f est bornée.

☐

VRAI

☒

FAUX

Question 25 Soit une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et soit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})$ existent pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, alors f est différentiable en $\mathbf{a}$.

☐

VRAI

☒

FAUX

Question 25.

par la théorie l'existence des dérivées partielles ne suffit pas pour que f soit différentiable.

Question 26 Si la fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admet en $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ un minimum local, alors la fonction $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ admet en $\mathbf{a}$ un maximum local.

☒

VRAI

☐

FAUX

Question 27 Si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, alors $\int_D e^{x^2} dx dy \leq \pi e$.



VRAI



FAUX

Question 27.

l'intégrale représente le volume du solide délimité par le disque $x^2 + y^2 \leq 1$ et le graphe de la fonction $f(x, y) = e^{x^2}$. le max est $e^1 = e$

Dans ce cas on obtient un cylindre de rayon 1 et d'hauteur $h = e \Rightarrow V = \pi \cdot 1^2 \cdot e \Rightarrow I \leq \pi e$

Question 28 Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide, fermé et borné et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors

$$-\int_D |f(x)| dx \leq \int_D f(x) dx \leq \int_D |f(x)| dx$$

si les intégrales existent.



VRAI



FAUX