Exercice 1

On définit trois sous- ensembles de $\mathbb{R}^3$.

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+2y \\ y \end{pmatrix} : x,y \in \mathbb{R} \right\} \qquad F = \left\{ \begin{pmatrix} xy \\ x \\ y \end{pmatrix} : x,y \in \mathbb{R} \right\}, \; G = \left\{ \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \\ x-y \end{pmatrix} : x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$. A quels des ensembles E, F, G appartiennent – ils ?

Répondre en complétant le tableau suivant. Si la réponse est affirmative, donner les valeurs de x, y, z qui génèrent ces vecteurs

	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\in$ E			
$\in$ F			
$\in$ G			

Exercice 1

On a une culture composée de trois types de bactéries qu'on va noter A, B et C. Elles évoluent dans le temps de la manière suivante. Chaque jour, les bactéries de type A se multiplient par 5. De plus, chaque bactérie de type B donnent naissance à une bactérie de type A, sept de type B et une de type C (puis meure) : chaque bactéries de type C donnent naissance à trois bactéries de type A, six de type B et huit de type C (puis meure). On note a_n, b_n, et c_n le nombre de bactéries de type A, B, et C respectivement, après n jours d'évolution.

(a) écris des équations qui donnent a_{n+1}, b_{n+1}, et c_{n+1}, en fonction de a_n, b_n, c_n

(b) Notons $S_n = a_n + b_n + c_n$ le nombre total d'individus après n jours. En regardant le nombre de nouvelles bactéries crée par chaque type A, B et C, montrer que $5S_n \leq S_{n+1} \leq 17S_n$

(c) On pose $\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n}$ le taux de croissance asymptotique. Que peut – on déduire sur m?

(d) Posons $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Calculer le produit $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ pour un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in M_{3,1}$

(e) On pose $T_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Exprimer T_{n+1} en fonction de M et T_n.

(f) Ecrire la condition $\det(\lambda I_3 - M) = 0$ sous forme polynomiale. Vérifier que l' équation admet $\lambda = 5$ et $\lambda = 10$ comme solutions. Que sont ces deux valeurs pour M.