ESPACE $\mathbb{R}^n$

Définition :

$\mathbb{R}^n$ est l' ensemble des $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des nombres réels avec les opérations :

i. Adition vectorielle : $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

ii. La multiplication par un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda \cdot \bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

iii. Le produit scalaire :

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

iv. La norme euclidienne

$$\|\bar{x}\| = (\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

Donc $\mathbb{R}^n$ est un espace normé.

Propriétés de la norme euclidienne :

i. $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = (0, 0, \ldots, 0)$

ii. $\|\lambda \cdot \bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$ pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

iii. Cauchy-Schwartz : pour tout $\bar{x}$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$$

iv. L'inégalité triangulaire : pour tout $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

v. L'inégalité triangulaire inverse : pour tout $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| \geq |\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\||$$

Topologie dans $\mathbb{R}^n$

Définitions :

- Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. L'ensemble $\mathbf{B}(\bar{x}, r) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| < r\}$ est appelé la **boule ouverte** de centre $\bar{x}$ et de rayon r.
- $\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ est un **point intérieur** du E s'il existe $r > 0$ tel que $B(\bar{x}, r) \subset X$. L'ensemble des points intérieurs de X est appelé l'intérieur de X et note $\mathbf{X^o}$.
- L'ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est dit **ouvert** si pour tout $\bar{x} \in X$ il existe $r > 0$ tel que $B(\bar{x}, r) \subset X$ c.a.d. X est ouvert si tout point de X est un point intérieur $\Leftrightarrow X^o = X$.

Remarques :

- X^o est ouvert
- L'ensemble vide $\varnothing$ est ouvert par la définition.
- $B(\bar{x}, r)$ est un ensemble ouvert
- $X = \mathbb{R}^n$ est ouvert.
- L'intérieur $X^o \subset X \subset \mathbb{R}^n$ est le plus grand sous ensemble ouvert contenu dans X, c.à.d. si $Y \subset X$, Y ouvert alors $Y \subset X^o$.
- $X = X^o \Leftrightarrow$ X est ouvert
- Si $X \subseteq Y$ alors $X^o \subseteq Y^o$
- $(X \cap Y)^o = X^o \cap Y^o$.
- $X^o \cup Y^o \subseteq (A \cup B)^o$.

Propositions

- Si $(X_i)_{i\in I}$ une famille (infini) d'ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ alors $\bigcup_{i\in I} X_i$ est ouvert.
- Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont ouverts alors l'ensemble $\bigcap_{i\in I} X_i$ est ouvert. X

Définition :

Un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est dit **fermé** si l'ensemble complémentaire $X^c = \mathbb{R}^n \setminus X$ est ouvert.

Propositions

- Si $(X_i)_{i\in I}$ une famille (infini) d'ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ alors $\bigcap_{i\in I} X_i$ est fermé.
- Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont fermes alors l'ensemble $\bigcup_{i\in I} X_i$ est fermé.
  - Les seuls sous- ensembles à la fois ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$ sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$.

Définitions :

- Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Le point $\bar{x}$ se dit **point de contact** de X si $\forall\, r > 0$ on a $X \cap B(\bar{x}, r) \neq \emptyset$.
- Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. L'**adhérence $\bar{X}$** de X est l'ensemble de ses points de contact. C.à.d.

$$\bar{X} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \forall\, \varepsilon > 0 , X \cap B(\bar{x}, r) \neq \emptyset\}$$

Remarques :

- $\bar{X} \supset X$
- L'adhérence est le plus petit sous- ensemble fermé qui contient X, c.a.d. si $Y \supset X$, Y fermé alors $Y \supset \bar{X}$
- $X = \bar{X} \Leftrightarrow X$ est ferme
- Si $X \subseteq Y$ alors $\bar{X} \subseteq \bar{Y}$
- $\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$
- $\overline{X \cap Y} \subseteq \bar{X} \cap \bar{Y}$
- $\mathbb{R}^n \setminus \bar{X} = (\mathbb{R}^n \setminus X)^o$.
- $\mathbb{R}^n \setminus X^o = \overline{\mathbb{R}^n \setminus X}$

Définition :

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Le point $\bar{x}$ se dit **point de bord** si $\forall\, r > 0$ on a à la fois $B(\bar{x}, r) \cap X \neq \emptyset$ et $B(\bar{x}, r) \cap X^c \neq \emptyset$. L'ensemble des points de bord de X est le $\boldsymbol{\partial X}$.

Remarques :

- ∂X est fermé
- $\partial X = \bar{X} \setminus X^o$
- $\partial X \cap X^o = \emptyset$
- $X^o \cup \partial X = \bar{X}$
- $\bar{X} = ((X^c)^o)^c$, pour tout $X \subset \mathbb{R}^n$.
- $\partial X = \partial X^o$
- $\bar{X} = \partial X \cup X^o$
- $\mathbb{R}^n = X^o \cup \partial X \cup (X^c)^o \Leftrightarrow \partial X = \bar{X} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus X}$. Alors ∂X *est fermé*
- X est fermé $\Leftrightarrow \partial X \subseteq X$

Suites dans $\mathbb{R}^n$.

Définitions :

- On appelle **suite** de points de $\mathbb{R}^n$ toute application $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Notation : $(\bar{x}_k)_{k\geq 0} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots,)$
- Une suite $(\bar{x}_k)_{k\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^n$ est **convergente** et admet pour limite $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, et l' on écrit $\lim_{k\to\infty}(\bar{x}_k)^n = \bar{a}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k \geq k_0$ on a que $\bar{x}_k \in B(\bar{a}, \varepsilon)$ c.a.d. $\|\bar{x}_k - \bar{a}\| < \varepsilon$
- Une suite $(\bar{x}_k)_{k\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^n$ est **bornée** s' il existe $C > 0$ tel que $\bar{x}_k \in B(0, C)\ \forall\, k \Leftrightarrow \|\bar{x}_k\| < C$

Propositions

- Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$, alors X est ouvert $\Leftrightarrow \forall\, \bar{x} \in X$ et pour toute suite $(\bar{x}_k)_{k\geq 0}$ de $\mathbb{R}^n$ avec $\bar{x}_k \to \bar{x}$ il existe k_0 tel que pout $\forall\, k \geq k_0$ on a $\bar{x}_k \in X$.
- Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$, fermé $\Leftrightarrow$ Si $(\bar{x}_k)_{k\geq 0}$ suite de X avec $\bar{x}_k \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, alors $\bar{x} \in X$.
- $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est un **point de contact** de X $\Leftrightarrow$ il existe suite $(\bar{x}_k)_{k\geq 0}$ de X telle que $\bar{x}_k \to \bar{x}$.

Définitions :

- Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$, le point $\bar{x}$ se dit **point d'accumulation** de X si $\forall\, r > 0$ on a $B(\bar{x}, r) \cap (A\backslash\{\bar{x}\}) \neq \emptyset$.
- L'ensemble des points d'accumulation de X, noté **X′** et s'appelle **ensemble dérivé de X**.

Propositions

- Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Le point $\bar{x}$ est un point d'accumulation de X $\Leftrightarrow \forall\, r > 0$ l' ensemble $B(\bar{x}, r) \cap X$ est infini $\Leftrightarrow$ il existe suite $(\bar{x}_k)_{k\geq 0}$ de X telle que $\bar{x}_k \to \bar{x}$ et $(\bar{x}_k) \neq \bar{x}$ pour $k = 1, 2, \ldots$.
- Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors $\overline{X} = X \cup X'$. Par conséquence X est fermé $\Leftrightarrow$ il contient se points d'accumulations.

Définitions :

- Un $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$ est **borné** si il existe $M > 0$ tel que $\|\bar{x}\| < M\ \forall\, \bar{x} \in X$.
- Un $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$ est **compact** s'il est à la fois fermé et borné.

Théorème Heine – Borel – Lebesgue. Un $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de tout recouvrement de X par des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$.

$$X \subset \bigcup_{i\in I} A_i \quad A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ ouvert } \forall i \in I$$

On peut extraire une famille finie qui est un recouvrement de X :

$$X \subset \bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j} \ , i_j \in I \ \ \forall\, j = 1, \ldots, m$$