# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES



*Definitions* :

Une **équation différentielle ordinaire** est une expression

$$E(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Où E : $\mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée, $n \in \mathbb{N}_+$.

**L'ordre** de l'équation différentielle est l'ordre maximal de dérivée de y(x) qui apparait dans l'équation.

**La solution générale** d'une équation différentielle est l'ensemble de toutes les solutions de l'équation.

**La solution maximale** du problème de Cauchy est la solution définie sur le plus grand intervalle possible.

## 1. Equations différentielles du premier ordre $E(x, y(x), y'(x)) = 0$

### 1.1. *Séparation des variables* $E(x, y(x), y'(x)) = g(x) - f(y)\cdot y' = 0$

$y' = \frac{dy}{dx}$. Donc $g(x) - f(y)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow g(x)\cdot dx = f(y)\cdot dy \Rightarrow \int g(x)dx = \int f(y)dy + c \Rightarrow G(x) = F(y) + c$

### 1.2. *ED linéaires du premier ordre* $y' + p(x)y = q(x)$

- Si $q = 0$ équation homogène
- Si $q \neq 0$ équation inhomogène

*Solution générale :* $y(x) = y_p(x) + C\cdot y_h(x)$ ou $y_p$ est une solution quelquonque de l'équation inhomogène (solution particulière) et $y_h$ une solution de l'équation homogène.

*Méthode de résolution générale*

i) L'équation homogène peut être résolue par séparation des variables

$$y' + p(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)dx \Rightarrow y_h(x) = e^{-P(x)}$$, ou P une primitive de p.

ii) Solution particulière

a) Méthode de Variation de la constante

$$y_p(x) = \left(\int e^{P(x)}\cdot q(x)dx\right)\cdot e^{-P(x)}$$

Donc solution générale $y(x) = Ce^{-P(x)} + \left(\int e^{P(x)}\cdot q(x)dx\right)\cdot e^{-P(x)}$

*Exemple* : $y' = y\tan(x) + \cos(x)$

- Solution homogène : $y' - y\tan(x) = 0$ .

$p(x) = -\tan x \Rightarrow P(x) = -\int \tan x\, dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x| + c \Rightarrow y_h(x) = Ce^{-\ln|\cos x|} \Rightarrow y_h(x) = \frac{c}{\cos x}$

- Solution particulière : $\int e^{\ln(\cos x)}\cos(x)dx = \int \cos^2(x)dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \Rightarrow$

$y_p(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right)\frac{1}{\cos x}$

- Solution générale : $y = y_h + y_p = \frac{c}{\cos x} + \frac{2x+\sin(2x)}{4\cos(x)}$

b) Méthode des coefficients indéterminés

Necessité : $p(x) = \text{const.} = p$

$q(x) \in \text{vect}\{q_1(x), q_2(x), \dots, q_m(x)\} = \text{vect}\{q_i(x)\}$ ou $q_i$ est comme dans le tableau suivant :

$r \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^*$

| Fonction $q_i(x)$ | Fonctions dans $y_p(x)$ |
|---|---|
| $x^r$ | $\{x^r, x^{r-1}, x^{r-2}, \dots, x, 1\}$ |
| $x^r e^{\lambda x}$, $\lambda \neq -p$ | $\{x^r e^{\lambda x}, x^{r-1} e^{\lambda x}, \dots, x e^{\lambda x}, e^{\lambda x}\}$ |
| si $\lambda = -p$ $x^r e^{-px}$ | $\{x^{r+1} e^{-px}, x^r e^{-px}, \dots, xe^{-px}\}$ |
| $x^r\sin(\alpha x)e^{\lambda x}$ ou $x^r\cos(\alpha x)e^{\lambda x}$ | $\{x^r\sin(\alpha x)e^{\lambda x},\dots,\sin(\alpha x)e^{\lambda x}, x^r\cos(\alpha x)e^{\lambda x},\dots, \cos(\alpha x)e^{\lambda x}\}$ |

*Exemple* : $y' - y = 4xe^x$.

- Solution homogène : $y' - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - y = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} dy = dx \Rightarrow \ln(y) = x + c \Rightarrow y_h = ce^x$
- Solution particulière : comme $\lambda = -1 = p$ on pose

$y_p = c_1x^2e^x + c_2xe^x \Rightarrow y'_p = 2c_1xe^x + c_1x^2e^x + c_2e^x + c_2xe^x$. En remplaçant dans l'équation donnée on obtient

$2c_1xe^x + c_1x^2e^x + c_2e^x + c_2xe^x - c_1x^2e^x - c_2xe^x = 4xe^x \Rightarrow (2c_1x + c_2)e^x = 4xe \Rightarrow \begin{cases} 2c_1 = 4 \\ c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$y_p = 2x^2e^x$ .

- Solution générale : $y = y_h + y_p = ce^x + 2x^2e^x$

## 2. ED linéaires du deuxième ordre a coefficients constants $ay'' + b y' + c y = q(x)$ (1)

i) Equation homogène $ay'' + b y' + c y = 0$

L'équation caractéristique: $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

| Racines de l'équation caractéristique | Solution de le' équation $ay'' + b y' + c y = 0$ |
|---|---|
| | |
| $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ | $y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ |
| $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, avec $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ | $y_h = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$ |
| $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, avec $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ | $y_h = e^{ax}(c_1\cos(bx) + c_2\sin(bx))$ |

ii) Solution particulière

a) Méthode de Variation de la constante

Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ les deux solutions construites dans la solution homogène. On pose $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. En remplaçant dans l'équation on obtient :

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C'_1(x) \\ C'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a}\cdot q(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ C'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a}\cdot q(x) \end{pmatrix}$$

Le déterminant det $\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{pmatrix}$ est appelée le **Wronskien**

Apres l'intégration on trouve $C_1(x)$ et $C_2(x)$. Donc l'équation particulière est $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$

*Exemple*

$y'' - 9y = -\sin(4x)$

L'eq. caractéristique est $\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$ et la solution de l' eq. homogène est $y_h(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$

Alors $y_1(x) = e^{3x} \Rightarrow y_1'(x) = 3e^{3x}$ et $y_2(x) = e^{-3x} \Rightarrow y_1'(x) = -3e^{3x}$. On obtient le système

$$\begin{pmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{3x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C'_1(x) \\ C'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(4x) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ C'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{3x} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(4x) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ C'_2(x) \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3e^{3x} & -e^{-3x} \\ -3e^{3x} & e^{3x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(4x) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C'_1(x) = -\frac{1}{6}e^{-3x}\sin(4x) \\ C'_2(x) = \frac{1}{6}e^{3x}\sin(4x) \end{cases}$$

. Par l' integration on obtient

$$\begin{cases} C_1(x) = \frac{1}{150}e^{-3x}(3\sin(4x) + 4\cos(4x)) \\ C_2(x) = \frac{1}{150}e^{3x}(3\sin(4x) - 4\cos(4x)) \end{cases}.$$

Alors $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = \frac{1}{150}(3\sin(4x) + 4\cos(4x)) + \frac{1}{150}(3\sin(4x) - 4\cos(4x)) \Rightarrow$

$y_p(x) = \frac{1}{25}\sin(4x)$.

La solution générale : $y_h(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + \frac{1}{25}\sin(4x)$.



b) Méthode des coefficients indéterminés

On suppose que $q(x) = p_n(x)(c\cdot\cos(bx) + d\cdot\sin(bx))e^{ax}$, ou $p_n$ un polynôme du degré n et a, b, c, d $\in \mathbb{R}$.

- Si a+ib est une racine de l'équation caractéristique alors $y_p = (A_n(x)\cos(bx) + B_n(bx))\,e^{ax}$, ou $A_n$ et $B_n$ polynôme de degré n avec de coefficients inconnus. En remplaçant dans l'équation (1) on détermine les coefficients.
- Si a+ib est une racine simple de l'équation caractéristique alors $y_p = x(A_n(x)\cos(bx) + B_n(bx))\,e^{ax}$
- Si a+ib est une racine double de l'équation caractéristique alors $y_p = x^2(A_n(x)\cos(bx) + B_n(bx))\,e^{ax}$

Alors on a le tableau

| q(x) | Solution particulière de l'équation (1) |
|---|---|
| $q(x) = p_n(x)$ | $y_p = x^k(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots A_0)$<br>k = 0 si le 0 n' est pas une racine de l' eq. caractéristique.<br>k = 1 si le 0 est une racine simple de l' eq. caractéristique etc |
| $q(x) = p_n(x)e^{ax}$ | $y_p = x^k(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots A_0)e^{ax}$<br>k = 0 si le a n' est pas une racine de l' eq. caractéristique.<br>k = 1 si le a est une racine simple de l' eq. caractéristique etc |
| $Q(x) = c\cdot\cos(bx) + d\cdot\sin(bx)$ | $y_p = x^k(A\cos(bx) + B\sin(bx))$<br>k = 0 si le bi n' est pas une racine de l' eq. caractéristique.<br>k = 1 si le bi est une racine simple de l' eq. caractéristique etc |
| En général : $q(x) = p_n(x)(c\cdot\cos(bx) + d\cdot\sin(bx))e^{ax}$<br>$p_n(x)(c\cdot\cos(bx) + d\cdot\sin(bx))e^{ax}$<br>k= 0 si le a+ bi n' est pas une racine de l' eq. caractéristique.<br>k= 1 si le a+ bi est une racine simple de l' eq. caractéristique., etc. | |

*Exemples*

i) $y'' + 2y' + 2y = \sin(x)e^{-x}$

L'eq. caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1+i$, $\lambda_2 = -1-i$ . Alors $y_h(x) = c_1e^{-x}\cos(x) + c_2e^{-x}\sin(x)$.

Pour $q(x) = \sin(x)e^{-x}$ la solution particulière a la forme : $y_p(x) = x^1(A\sin(x) + B\cos(x))e^{-x}$. k = 1 car -1+i est une racine simple de l' eq. caractéristique. Donc la solution générale est :

$y(x) = c_1e^{-x}\cos(x) + c_2e^{-x}\sin(x) + x(A\sin(x) + B\cos(x))e^{-x}$

ii) $y'' - 3y' + 2y = 2xe^{3x}$

L'eq. caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ , $\lambda = 2$. Alors la solution de l'équation homogène est $y_h(x) = c_1e^x + c_2e^{2x}$

Pour $q(x) = 2xe^{3x}$ on a $y_p = x^0(Ax + B)e^{3x} = (Ax + B)e^{3x}$ car le 3 n' est pas une solution de l' eq. caractéristique.



Pour trouver le A et B on calcule $y_p' = (3Ax + A + 3B)e^{3x}$ et $y_p''(x) = (9Ax + 6A + 9B)e^{3x}$. En remplaçant on obtient :

$(9Ax + 6A + 9B)e^{3x} - 3(3Ax + A + 3B)e^{3x} + 2(Ax + B)e^{3x} \Rightarrow (2Ax+3A+2B)\, e^{3x} = 2xe^{3x} \Rightarrow$

$\begin{cases} 2A = 2 \Rightarrow A = 1 \\ 3A + 2B = 0 \Rightarrow B = -3/2 \end{cases}$. Alors $y_p = (x - \frac{3}{2})e^{3x}$

Alors la solution générale est $y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + (x - \frac{3}{2})e^{3x}$.

- Deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ d'une EDL homogène sont dites **linéairement indépendantes** s'il n' existe pas de constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $y_2(x) = c\, y_1(x)$.
- Si $y_1(x)$ est une solution de l'équation $y''(x) + p(x)y'+q(x)\, y(x) = 0$ telle que $y_1(x) \neq 0$ alors $y_2(x)= y_1(x)\int \frac{e^{-P(x)}}{y_1^2(x)}dx$ est une solution indépendante , ou P(x) est une primitive de p(x)
- **Principe de superposition des solutions** pour EDL2 : Supposons que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions particulières des équations $y''(x) + p(x)y'+q(x)\, y(x) = f_1(x)$ et $y''(x) + p(x)y'+q(x)\, y(x) = f_2(x)$ respectivement. Alors $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ est une solution particulière de l'équation $y''(x) + p(x)y'+q(x)\, y(x) = f_1(x)+ f_2(x)$