

Analyse propédeutique

Hansklaus Rummel

remanié et augmenté par

Patrick Ghanaat

Département de Mathématiques
Université de Fribourg, Suisse

Version 2017

(empty page)



Isaac NEWTON, 1642/43*) - 1727



Gottfried Wilhelm LEIBNIZ, 1646 - 1716



Leonhard EULER, 1707 - 1783

*) Selon le calendrier julien, encore en vigueur en Angleterre jusqu'en septembre 1752, NEWTON est né le 25 décembre 1642. Cette date correspond au 4 janvier 1643 du calendrier grégorien, déjà en vigueur dans la plupart des pays du continent.

Préface

Ce cours a surtout deux buts : on va revoir et compléter l'enseignement mathématique reçu au gymnase et vous fournir ainsi un certain arsenal de techniques mathématiques utiles pour vos études et vos futures activités dans la vie professionnelle. Et vous allez vous familiariser avec des raisonnements mathématiques, afin de comprendre des écrits scientifiques qui font appel à des connaissances mathématiques. La connaissance du langage et de la pensée mathématiques vous permettra aussi de parler avec un mathématicien si, plus tard, vous avez besoin d'outils mathématiques plus développés que ceux que vous verrez dans ce cours. Afin d'atteindre ces buts, un certain effort de votre part est indispensable.

Travail individuel. La durée du cours étant très limitée, il n'est guère possible d'en assimiler la matière sans la revoir à la maison. Pour ce travail individuel, la devise doit être : *Comprendre avant d'apprendre !* Plus précisément : il ne sert à rien d'apprendre par cœur des définitions ou des formules sans en avoir vraiment compris le sens. Ainsi il est recommandé de compléter la liste des exemples présentés dans le cours, car en construisant soi-même, on comprend mieux la signification d'une définition ou d'un théorème. Il est aussi vivement recommandé de voir comment d'autres auteurs expliquent la même matière, car un autre point de vue peut aider à la compréhension.

Exercices. La pratique d'un sport ou d'un instrument de musique ne s'apprend pas en regardant les sportifs d'élite à la télévision ou en écoutant des enregistrements d'une virtuose : il faut l'essayer soi-même et il faut l'exercer. Le même principe est valable pour les mathématiques, où les exercices vous donnent l'occasion d'entraîner vos talents. Afin de développer la faculté de communiquer ses raisonnements à d'autres gens, il est vivement recommandé de travailler à deux. Cette façon de travailler en (petits !) groupes vous donne aussi un contrôle de votre travail, car c'est en l'expliquant à une autre personne que l'on voit si on a vraiment compris quelque-chose.

Dass dieses Skript zu einer auf Deutsch gehaltenen Vorlesung auf Französisch geschrieben ist, ist eine Art Selbsthilfe: Die französischsprachige Literatur auf diesem Gebiet entspricht weniger gut unseren Vorlesungen als die deutschsprachige, so dass eher der Bedarf nach einem französischen Skript besteht. Ich hoffe aber, dass auch deutschsprachige Hörer von diesem Skript profitieren.

Fribourg, septembre 2004
Hansklaus Rummel

Diese Vorlesungsnotizen sind aus einem Manuskript entstanden, das Hansklaus Rummel für das akademische Jahr 2004–2005 angefertigt hat. Ich danke Gauthier Berck, Matthieu Gendulphe, Geneviève Perren und Florence Yerly für ihre Hilfe bei der Korrektur früherer Versionen des französischen Textes. Jean-Paul Berrut hat die Vorlesung im Jahr 2013–2014 gehalten und zahlreiche Korrekturen und Verbesserungen beigetragen.

Fribourg, August 2014
Patrick Ghanaat

Table des matières

1 Fonctions	1
2 Limites et continuité	12
3 Calcul différentiel	24
4 Formule de Taylor et séries entières	35
5 Calcul intégral	46
6 Logarithmes et fonctions exponentielles	60
7 Equations différentielles : introduction	69
8 Equations différentielles linéaires	83
9 Les nombres complexes	98
10 Gradient et dérivées partielles	110
11 Extrema des fonctions à plusieurs variables	123
12 Intégrales multiples	136
13 Séries de Fourier	146

Bibliographie

Lothar PAPULA : Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, 3 Bände, Übungssammlung ; Vieweg+Teubner
(zahlreiche Auflagen)

Tilo ARENS, Frank HETTLICH et al. : Mathematik ; Spektrum Akademischer Verlag, 2. Auflage 2011

Hans Gerhard ZACHMANN, Ansgar JÜNGEL : Mathematik für Chemiker ; Wiley-VCH, 6. Auflage, 2007

Hans Heiner STORRER : Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I; Birkhäuser, Basel
(setzt wenige Vorkenntnisse voraus, ausführliche Darstellung)

Ilja N. BRONSTEIN, Konstantin A. SEMENDJAJEW, Gerhard MUSIOL, Heiner MÜHLING : Taschenbuch der Mathematik ; Verlag Harri Deutsch (aktuelle Version des "Bronstein" ; bekanntes Nachschlagewerk)

Frank AYRES, Elliott MENDELSON : Schaum's Outline of Calculus ; McGraw-Hill

Robert C. WREDE, Murray SPIEGEL : Schaum's Outline of Advanced Calculus ; McGraw-Hill

Richard BRONSON, Gabriel COSTA : Schaum's Outline of Differential Equations ; McGraw-Hill

Wikipédia : portail de mathématiques (dans plusieurs langues)

MIT OpenCourseWare

Chapitre 1

Fonctions

Ensembles

Nous utilisons le langage des ensembles. Pour un ensemble A et une propriété P qui concerne les éléments de A ,

$$\{x \in A \mid P(x)\} = \{x \mid x \in A \text{ et } P(x)\} = \{x \mid x \in A, P(x)\}$$

est un sous-ensemble de A : c'est l'ensemble de tous les x qui sont éléments de A et satisfont à la propriété P . Par exemple, à partir des nombres naturels \mathbb{N} on peut expliciter l'ensemble des nombres naturels *pairs* par

$$\left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{2} \in \mathbb{N} \right\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}.$$

Vous connaissez vraisemblablement les notations suivantes :

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ l'ensemble des entiers relatifs

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ l'ensemble des nombres rationnels

\mathbb{R} = l'ensemble des nombres réels

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ intervalle fermé

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ intervalle ouvert

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ intervalle fermé à gauche et ouvert à droite

$[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

$] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

$] - \infty, \infty[= \mathbb{R}$

$\mathbb{R}_+ =]0, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$ l'ensemble A privé de B , A sans B

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ produit cartésien de deux ensembles

= l'ensemble des couples (ordonnés) (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$

$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Fonctions

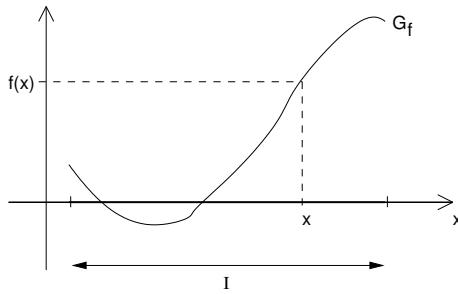
Souvent on entend par fonction une «formule» ou une «expression» mathématique, mais cette notion de fonction est trop restrictive, et suivant l'usage général d'aujourd'hui, nous appelons *fonction* ou *application*

$$f : X \rightarrow Y$$

entre des ensembles X et Y une «prescription» ou «règle» qui associe à chaque argument $x \in X$ une valeur $f(x) \in Y$. Dans ce cas, X s'appelle l'*ensemble de départ* (ou le *domaine de définition*) de f et Y son *ensemble d'arrivée*. L'*image* de f est l'ensemble $\{f(x) \mid x \in X\}$, c'est-à-dire l'ensemble des $f(x)$ pour x parcourant X . C'est donc un sous-ensemble de Y .

Nous considérons surtout le cas $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où le domaine de définition X est un *intervalle* $I \subseteq \mathbb{R}$, et $Y = \mathbb{R}$. Dans beaucoup de cas, $f(x)$ sera effectivement exprimée par une formule contenant x , mais ce n'est pas toujours le cas. Pour toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, son *graphe*¹ $G_f \subseteq \mathbb{R}^2$ est défini par

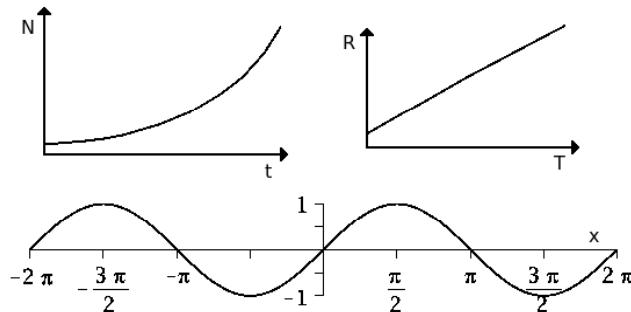
$$\begin{aligned} G_f &:= \{(x, f(x)) \mid x \in I\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y = f(x)\} \end{aligned}$$



Remarquons que pour une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux ensembles arbitraires X et Y on appelle *graphe* de f le sous-ensemble du produit cartésien $G_f \subseteq X \times Y$ défini par $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$. Dans le cas général c'est un objet sans représentation «graphique» dans le plan.

Voici quelques exemples de fonctions avec leurs graphes :

1. $I = [-10000, 2000]$, $N(t)$ = nombre d'habitants de la terre au temps t ;
2. $I = [-20, 100]$, $R(T)$ = résistance électrique d'un fil de cuivre d'une longueur de 1 m et d'une section de 1 mm^2 à une température de $T^\circ\text{C}$;
3. $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.



¹La notation $A := B$ signifie que A est défini comme étant égal à B .

Ces exemples montrent quelques types de fonctions que l'on rencontre dans les sciences. Dans le premier exemple, la variable indépendante est le temps t . Bien des lois naturelles décrivent l'évolution d'une grandeur dans le temps. Dans l'exemple 2, la fonction $R(T)$ décrit la dépendance d'une grandeur physique (la résistance électrique) d'une autre grandeur (la température). Cette résistance dépend encore d'autres paramètres, par exemple du matériau du conducteur, de sa longueur, etc. ; mais en définissant la fonction $R(T)$, nous avons précisé que ces autres grandeurs restent constantes. Plus tard nous étudierons aussi des fonctions de plusieurs variables. La fonction de l'exemple 3 est une fonction trigonométrique que l'on rencontre dans divers contextes ; c'est pourquoi nous appelons la variable indépendante simplement x , sans en indiquer une interprétation.

Il peut être pratique de modifier une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en changeant l'origine ou l'échelle des arguments ou des valeurs ; on obtient ainsi les fonctions $f_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= f(x - c) & I_1 &= [a + c, b + c] \\ f_2(x) &:= f(x) + c & I_2 &= [a, b] \\ f_3(x) &:= f(c \cdot x) & I_3 &= \left[\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \right] \text{ si } c > 0 \quad (\text{resp. } \left[\frac{b}{c}, \frac{a}{c} \right] \text{ si } c < 0) \\ f_4(x) &:= c \cdot f(x) & I_4 &= [a, b] \end{aligned}$$

Fonctions réciproques

Etant donné une fonction $f : X \rightarrow Y$ entre deux ensembles X et Y , on s'intéresse souvent aux équations de la forme

$$f(x) = y_0,$$

avec un $y_0 \in Y$ donné ; c'est-à-dire qu'on cherche, pour un $y_0 \in Y$ donné, les éléments $x \in X$ tel que $f(x) = y_0$. Dans ce contexte, on utilise la terminologie suivante : la fonction $f : X \rightarrow Y$ est dite

- injective* $\iff f(x_1) \neq f(x_2)$ pour tous $x_1 \neq x_2$
- surjective* \iff pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$
- bijection* \iff elle est injective et surjective.

La fonction $f : X \rightarrow Y$ est donc surjective si l'image de f est tout Y . Elle est bijective si pour tout $y \in Y$ il existe exactement un élément $x \in X$ avec $f(x) = y$. Une fonction bijective $f : X \rightarrow Y$ admet une *fonction réciproque* $g : Y \rightarrow X$ qui est caractérisée par les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x \quad \text{pour tout } x \in X \\ f(g(y)) &= y \quad \text{pour tout } y \in Y. \end{aligned}$$

La réciproque g de f est souvent notée f^{-1} , à ne pas confondre avec la fonction $1/f$ qui est bien définie lorsque f ne s'annule pas. On a donc

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$

Pour une fonction bijective $f : I \rightarrow J$ entre des intervalles $I, J \subseteq \mathbb{R}$, les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la diagonale $y = x$ dans \mathbb{R}^2 , si l'on représente pour chacune des deux fonctions les arguments sur l'axe horizontal

et les valeurs sur l'axe vertical; mais en principe, le graphe de f s'interprète aussi comme graphe de f^{-1} , si l'on admet l'axe vertical pour la représentation des arguments de f^{-1} et l'axe horizontal pour ses valeurs.

On écrit souvent $x \mapsto f(x)$ pour exprimer le fait que $f(x)$ est la valeur associée à x par la fonction f . En utilisant cette notation, il n'est pas toujours nécessaire d'introduire un nom comme f , g etc. quand on considère une fonction. Par exemple, on peut parler de la fonction (sans nom) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2 - 3$. C'est donc la fonction avec l'ensemble de départ \mathbb{R} et l'ensemble d'arrivée \mathbb{R} qui à tout élément $x \in \mathbb{R}$ associe la valeur $x^2 - 3$.

Exemple. La fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 3$ n'est pas injective car $(-x)^2 - 3 = x^2 - 3$. Elle n'est pas surjective parce que son image $[-3, \infty[$ ne coïncide pas avec son ensemble d'arrivée \mathbb{R} . Mais la fonction $[0, \infty[\rightarrow [-3, \infty[$ donnée par la même règle $x \mapsto x^2 - 3$ est bijective, et sa fonction inverse est la fonction $[-3, \infty[\rightarrow [0, \infty[, x \mapsto \sqrt{x+3}$.

Polynômes

Un *polynôme* est une fonction $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui peut être écrit sous la forme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

avec des constantes $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. On appelle les a_k les *coefficients* du polynôme. Si $a_n \neq 0$, alors n s'appelle le *degré* de P , noté $\deg(P)$. Plus précisément, si le polynôme est non nul (c'est-à-dire si ses coefficients ne sont pas tous nuls), son *degré* est défini comme le plus grand exposant de x devant lequel le coefficient n'est pas nul. Par convention, le degré du polynôme nul vaut $-\infty$. Considérons les polynômes de bas degrés :

degré $-\infty$: la fonction constante nulle.

degré 0 : les fonctions constantes non nulles, $f(x) = c$ pour tout $x \in I$, avec $c \neq 0$. On écrit aussi $f \equiv c$ ou simplement $f = c$.

degré 1 : les fonctions *affines* $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Le graphe d'une telle fonction est une (ligne) droite, ce qui explique l'appellation «linéaire». La fonction f est déterminée de façon unique par ses valeurs $f(x_1), f(x_2)$ en deux points distincts x_1, x_2 .

degré 2 : les fonctions *quadratiques* de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Le graphe de f est une parabole. La fonction f peut être reconstruite à partir de ses valeurs $f(x_1), f(x_2)$ et $f(x_3)$ en trois points distincts x_1, x_2, x_3 .

Exemple. La fonction $P(x) = (1+x)^5$ est un polynôme de degré 5. Afin de ramener P à la forme standard, utilisons la *formule du binôme de Newton*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

avec les *coefficients binomiaux*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

lus « k parmi n » et parfois aussi notés C_n^k . On obtient ces coefficients facilement à l'aide du triangle de Pascal :

$n = 0$							1
$n = 1$				1			1
$n = 2$			1		2		1
$n = 3$		1		3		3	1
$n = 4$		1		4		6	4
$n = 5$	1		5		10		10
$n = 6$	1		6		15		20
						15	6
						1	

La ligne $n = 5$ contient les coefficients $\binom{5}{k}$ pour $k = 0, \dots, 5$. Par conséquent,

$$(1+x)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 1^k x^{5-k} = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

Racines d'un polynôme

Un *zéro* (en allemand *Nullstelle*) d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est un point $a \in I$ où f s'annule, c'est-à-dire une solution a de l'équation

$$f(a) = 0.$$

Les zéros sont les points d'intersection du graphe de f avec l'axe des x . Les zéros d'un polynôme s'appellent aussi ses *racines*. Par exemple, les racines du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ sont

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Proposition.² Si a est un zéro du polynôme P de degré $n \geq 1$, alors P s'écrit de manière unique sous la forme $P(x) = (x - a)Q(x)$ avec Q un polynôme de degré $n - 1$.

En pratique, on obtient $Q(x)$ par la division de polynômes $P(x) \div (x - a)$. On peut formaliser et analyser cette méthode afin d'obtenir une preuve de la proposition.

Remarquons cependant que cette proposition est une conséquence immédiate du théorème de Taylor que nous verrons au chapitre 4. La dérivée d'ordre $n + 1$ d'un polynôme de degré n est le polynôme (identiquement) nul. Donc la formule de Taylor s'écrit

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x - a) + \frac{P''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n,$$

²Dans les textes mathématiques, une *proposition* est un résultat relativement simple mais d'un intérêt indépendant, c'est-à-dire un théorème simple. Un *lemme* est un résultat servant d'intermédiaire pour démontrer un théorème ou une proposition. Un *corollaire* est un résultat qui découle directement d'un théorème ou d'une proposition qui le précède.

et, comme $P(a) = 0$, on arrive à

$$P(x) = (x - a) \left(P'(a) + \frac{P''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^{n-1} \right).$$

Ainsi $P(x) = (x - a) Q(x)$ avec Q un polynôme de degré $n - 1$.

Corollaire. *Un polynôme P de degré $n \geq 0$ admet au plus n zéros distincts.*

Preuve. Soient x_1, \dots, x_m des zéros distincts de P . Il faut montrer que $m \leq n$. La proposition donne $P(x) = (x - x_1) Q_1(x)$ pour tout x avec un certain polynôme Q_1 de degré $n - 1$. En particulier, pour $x = x_2$ nous avons

$$0 = P(x_2) = (x_2 - x_1) Q_1(x_2)$$

et par conséquent $Q_1(x_2) = 0$, car $x_2 - x_1 \neq 0$. Appliquons maintenant la proposition au polynôme Q_1 et à son zéro x_2 pour obtenir $Q_1(x) = (x - x_2) Q_2(x)$ avec un polynôme Q_2 de degré $n - 2$. Comme auparavant, $Q_2(x_3) = 0$. En continuant de cette façon, on obtient successivement

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - x_1) Q_1(x) \\ &= (x - x_1)(x - x_2) Q_2(x) \\ &= \dots \\ &= (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m) Q_m(x) \end{aligned}$$

avec des polynômes Q_k de degré $n - k$. En comparant les degrés on obtient

$$n = \deg(P) = m + \deg(Q_m) \geq m.$$

□

Corollaire. *Si un polynôme P de degré $\leq n$ admet plus de n zéros distincts, alors $P \equiv 0$.*

Interpolation polynomiale

Théorème. *Pour $n + 1$ arguments distincts x_0, x_1, \dots, x_n et $n + 1$ valeurs y_0, y_1, \dots, y_n données, il existe un polynôme unique P de degré $\leq n$ qui vérifie $P(x_k) = y_k$ pour $k = 0, \dots, n$.*

Le polynôme P s'appelle le *polynôme d'interpolation* (de Lagrange) pour les données x_0, \dots, x_n et y_0, \dots, y_n .

Preuve. Il y a deux affirmations à confirmer : l'existence d'un tel polynôme P et son unicité. Montrons d'abord que le polynôme P est *unique* : si Q a les mêmes propriétés, alors la différence $D = P - Q$ est un polynôme de degré $\leq n$ qui admet les $n + 1$ zéros distincts x_0, \dots, x_n . Du corollaire précédent on tire $D \equiv 0$. Donc $Q = P$, c'est-à-dire que P est unique.

Pour démontrer *l'existence* de P , nous présentons une méthode pour trouver le polynôme d'interpolation : la formule d'*interpolation de Newton*. Etant donnés x_0, \dots, x_n et y_0, \dots, y_n , on fait l'ansatz (c'est-à-dire on cherche P sous la forme)

$$\begin{aligned} P(x) &= c_0 \\ &\quad + c_1(x - x_0) \\ &\quad + c_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + c_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

avec des constantes $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$. C'est certainement un polynôme de degré $\leq n$. Ensuite on utilise les $n + 1$ conditions $P(x_k) = y_k$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n$ afin de déterminer successivement les $n + 1$ constantes $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ comme suit :

Posant $x = x_0$ dans l'ansatz, la condition $P(x_0) = y_0$ donne $c_0 = y_0$. Ensuite, avec $x = x_1$ dans l'ansatz et avec $P(x_1) = y_1$, il vient $c_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_1$, c'est-à-dire

$$c_1 = \frac{y_1 - c_0}{x_1 - x_0}.$$

Les constantes c_0, c_1 déjà connues, on pose alors $x = x_2$ et utilise que $P(x_2) = y_2$ pour obtenir

$$c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$

et donc

$$c_2 = \frac{y_2 - c_0 - c_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

En continuant dans cette façon, on trouve c_3, \dots, c_n . \square

Remarques. 1. On peut reformuler la méthode de Newton de manière algorithmique, utile pour la programmation :

- $P_0 := y_0$
- Pour $k = 1, 2, \dots, n$,

$$P_k(x) := P_{k-1}(x) + c_k(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}),$$

où la constante c_k est telle que $P_k(x_k) = y_k$.

- $P := P_n$.

2. Une formule explicite pour le polynôme d'interpolation est la *formule de Lagrange* :

$$P(x) = \sum_{k=0}^n y_k \ell_k(x)$$

avec les *polynômes de Lagrange*

$$\begin{aligned} \ell_k(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \\ &= \frac{x - x_0}{x_k - x_0} \dots \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \dots \frac{x - x_n}{x_k - x_n}. \end{aligned}$$

On voit que, pour tout k , ℓ_k est un polynôme de degré n qui satisfait

$$\ell_k(x_j) = \delta_{jk} := \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

(Le symbole δ_{jk} s'appelle le *symbole de Kronecker*.) Par conséquent, P est un polynôme de degré $\leq n$ avec

$$P(x_j) = \sum_{k=0}^n y_k \ell_k(x_j) = \sum_{k=0}^n y_k \delta_{jk} = y_j.$$

Fonctions trigonométriques

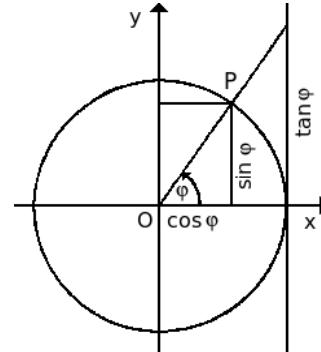
D'habitude, on mesure les angles en *degrés* ou en *radians* : la grandeur d'un angle en radians est la longueur de l'arc correspondant sur le cercle de rayon 1. Comme 360° correspond à 2π , la circonférence du cercle, on a

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360}.$$

Pour les calculs impliquant des fonctions trigonométriques, on préfère en général la mesure en radians.

Rappelons la définition géométrique des fonctions trigonométriques *sinus*, *cosinus* et *tangente* : soit $\varphi \in \mathbb{R}$, et soit $P = (x, y)$ le point sur le cercle unité qui correspond à l'angle φ . Alors

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= x \\ \sin \varphi &= y \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x}.\end{aligned}$$



Puisque les angles φ et $\varphi + 2\pi$ correspondent au même point P , les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π , c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}\sin(x + 2\pi) &= \sin x \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x\end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction tangente est périodique de période π . De plus, on a les relations :

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(-x) &= \cos x \\ \tan(-x) &= -\tan x \\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \\ \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1\end{aligned}$$

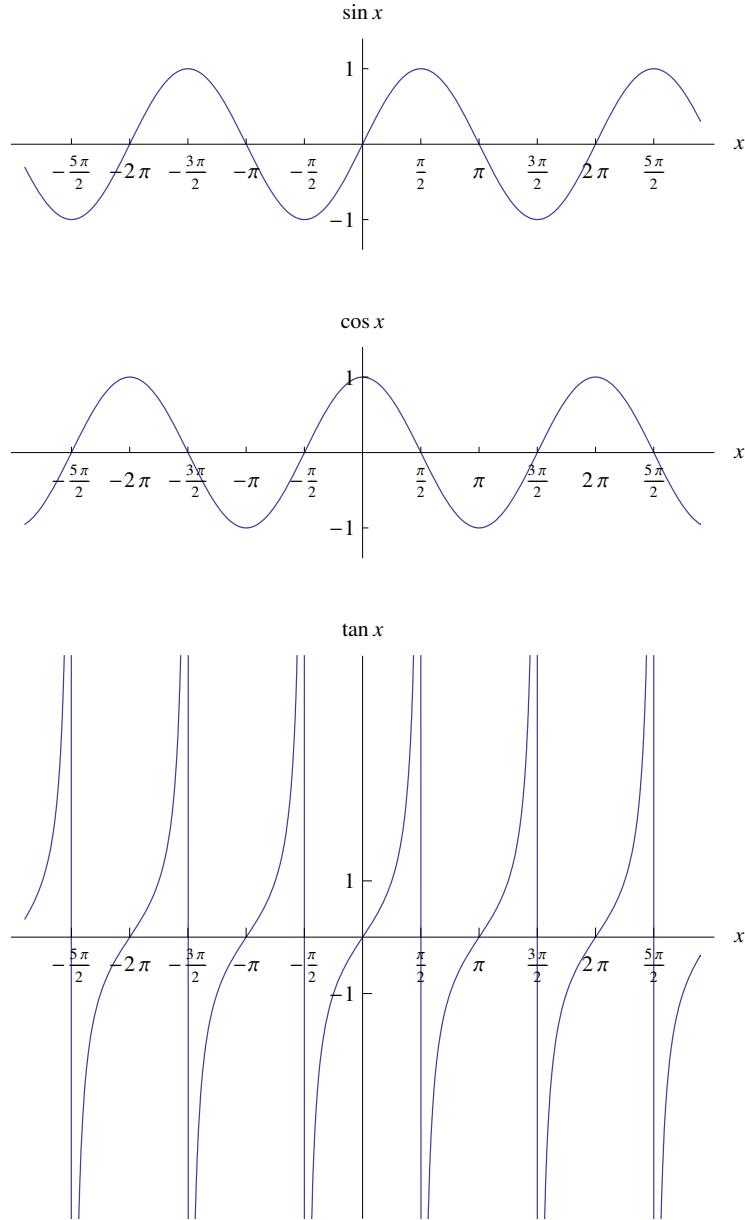
Dans la dernière formule, nous avons utilisé la convention d'écrire $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ au lieu de $(\sin x)^2$ et $(\cos x)^2$. Pour les zéros des fonctions trigonométriques on trouve

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi \text{ pour un } k \in \mathbb{Z},$$

$$\cos x = 0 \iff x = k\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ pour un } k \in \mathbb{Z},$$

$$\tan x = 0 \iff x = k\pi \text{ pour un } k \in \mathbb{Z}.$$

Voici les graphes des fonctions sin, cos et tan :

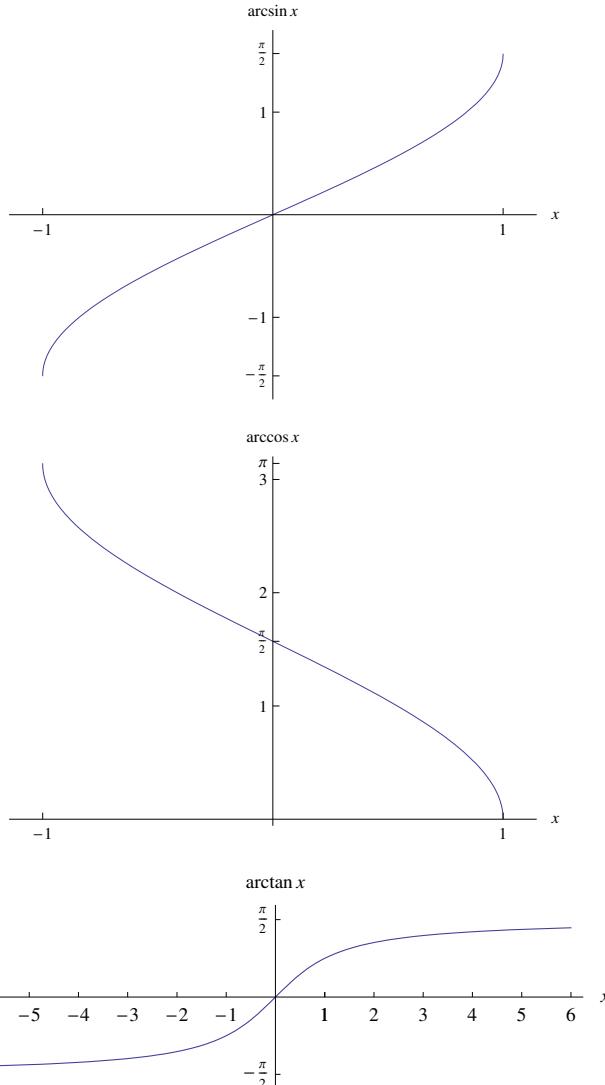


En restreignant le sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, le cosinus à $[0, \pi]$ et la tangente à $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on obtient des fonctions bijectives admettant les fonctions réciproques

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



Exemple. Par définition, la fonction $\arcsin x : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est la fonction inverse de la restriction³

$$\sin |_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1].$$

Par conséquent, on a $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Mais en fait la fonction $f(x) = \arcsin(\sin x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Quelles sont ses valeurs pour les x en dehors de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$?

Réponse : la fonction f est 2π -périodique, puisque le sinus l'est :

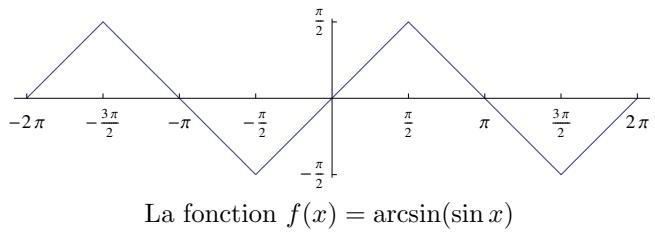
$$f(x + 2\pi) = \arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin x) = f(x).$$

Notons aussi que

$$f(x + \pi) = \arcsin(\sin(x + \pi)) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x) = -f(x),$$

³Pour une fonction $f : X \rightarrow Y$ et un sous-ensemble $A \subseteq X$, la restriction $f|_A$ est la fonction $A \rightarrow Y$ qui à tout élément $a \in A$ associe l'élément $f(a) \in Y$.

et donc $f(x + \pi) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Quand x parcourt l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, cette dernière identité fournit les valeurs de f sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$; et pour les $x \in \mathbb{R}$ qui restent, on utilise la 2π -périodicité.



Chapitre 2

Limites et continuité

Limites de suites

Une *suite* de nombres réels (on dit aussi : une suite «dans \mathbb{R} ») est une application $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. A la place de $x(n)$ on écrit en général x_n , et on note la suite sous la forme

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

ou simplement x_0, x_1, x_2, \dots sans parenthèses.¹ On dit que la suite converge vers $a \in \mathbb{R}$ si, pour n tendant vers ∞ , le point x_n s'approche de a aussi près que l'on veut. Plus précisément :

Définition. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathbb{R}$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\text{dist}(x_n, a) < \varepsilon.$$

Ici $\text{dist}(x_n, a) := |x_n - a|$ est la *distance* entre x_n et a . Si c'est le cas, on écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{ou} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge si elle ne converge vers aucun $a \in \mathbb{R}$.

Remarques. 1. On peut interpréter la situation comme suit : considérons les membres x_n de la suite comme approximations de la valeur a , et ε comme une tolérance, une marge d'erreur acceptable. Les x_n à partir de x_{n_0} , c'est-à-dire avec indice $n \geq n_0$, sont des approximations suffisamment précises de a : ils peuvent remplacer a avec une erreur ne dépassant pas la tolérance ε .

2. Il est souvent utile de considérer la convergence de suites d'objets autres que des nombres : suites de points dans le plan ou dans l'espace, de fonctions, de figures dans l'espace (vues comme sous-ensembles de \mathbb{R}^3), d'états d'un système (décrit par un modèle mathématique) etc. En général, une suite d'éléments $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un ensemble X est une application $x : \mathbb{N} \rightarrow X$, et notre définition de la convergence vers un $a \in X$ garde son sens pourvu qu'on ait une notion de distance entre les éléments de X .

¹On admet aussi des suites x_1, x_2, \dots numérotées avec les entiers *strictement* positifs, ou avec un autre sous-ensemble de \mathbb{N} .

De certaines suites divergentes dans \mathbb{R} on dit aussi qu'elles «convergent vers $+\infty$ ou $-\infty$ » : on dit que la suite de nombres réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ∞ , et l'on écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

si, pour n tendant vers ∞ , le nombre x_n devient aussi grand que l'on veut, c'est-à-dire que pour tout $C > 0$ il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n > C$ pour tout $n \geq n_0$. La convergence vers $-\infty$ est définie de manière analogue.

Exemples

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

2. Pour $q \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ \infty & \text{si } q > 1, \end{cases}$

et la suite diverge si $q < -1$. En fait, considérons par exemple le cas $q > 1$. Alors $q = 1 + r$ avec un $r > 0$, et à l'aide de la formule du binôme de Newton

$$q^n = (1 + r)^n > 1 + \binom{n}{1}r = 1 + nr \rightarrow \infty$$

pour $n \rightarrow \infty$. Donc $q^n \rightarrow \infty$ pour $q > 1$. Dans le cas $0 < q < 1$ on a $1/q > 1$ et donc, comme nous venons de voir, $(1/q)^n \rightarrow \infty$. Par suite,

$$q^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} \rightarrow 0.$$

Dans le cas $q < -1$ la suite est composée de deux sous-suites dont l'une tend vers $+\infty$, l'autre vers $-\infty$. Par exemple, pour $q = -2$ la suite est

$$2^0, -2^1, +2^2, -2^3, +2^4, -2^5, +2^6, \dots$$

3. Certains nombres sont définis comme limites d'une suite, tel par exemple le *nombre e (d'Euler)* (voir chapitre 6) :

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\dots$$

On peut interpréter cette limite comme étant le capital après une année, si l'on place 1 Franc à 100% d'intérêt annuel avec paiement «continu» : en effet, si l'on obtient l'intérêt en n tranches, le capital après une année s'élève à $(1 + 1/n)^n$.

Règles de calcul avec les limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

Plus précisément : si les deux limites de droite existent, alors celles de gauche aussi, et on a l'égalité indiquée. Pour la division, la situation est un peu plus subtile : supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ existe et ne soit pas égale à zéro. Alors on peut

avoir $y_n = 0$ pour quelques n , mais à partir d'un certain indice n_0 on a $y_n \neq 0$ et ainsi la fraction x_n/y_n est bien-définie. La règle dit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

si les deux limites de droite existent et si $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$.

Exemples

4. Si P et Q sont des polynômes avec $\deg(P) < \deg(Q)$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$.

Par exemple,

$$\frac{n^3 - 4n^2 + 1}{2n^4 - n^3 + 2} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^4}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{0 - 0 + 0}{2 - 0 + 0} = 0.$$

$$5. x_n = \frac{(n+2)^3 - n^3}{n^2}$$

Pour $n \rightarrow \infty$ cette expression prend la forme indéterminée $\frac{\infty - \infty}{\infty}$. Il faut la simplifier pour comprendre son comportement. En utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient

$$\frac{(n+2)^3 - n^3}{n^2} = \frac{\eta^3 + 3 \cdot 2^1 n^2 + 3 \cdot 2^2 n^1 + 2^3 n^0 - \eta^3}{n^2} = 6 + \frac{P(n)}{n^2}$$

avec un polynôme P de degré < 2 . Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - n^3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 + \frac{P(n)}{n^2} \right) = 6 + 0 = 6.$$

$$6. x_n = -n + \sqrt{n^2 + n}$$

Pour $n \rightarrow \infty$ on obtient la forme indéterminée $-\infty + \infty$. Nous utilisons l'identité $(a+b)(-a+b) = -a^2 + b^2$ comme suit :

$$\begin{aligned} -n + \sqrt{n^2 + n} &= \frac{(n + \sqrt{n^2 + n})(-n + \sqrt{n^2 + n})}{n + \sqrt{n^2 + n}} = \frac{-\eta^2 + \eta^2 + n}{n + \sqrt{n^2 + n}} \\ &= \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 0}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-n + \sqrt{n^2 + n}) = \frac{1}{2}.$$

7. Considérons la suite définie par la *relation de récurrence*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$$

pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, avec terme initial $x_0 = 2$. Avec la formule de récurrence on calcule successivement les termes x_1, x_2, x_3 etc. :

n	x_n
0	2
1	1,5
2	1,416666666...
3	1,414215686...
4	1,414213563...
5	1,414213563...

Il semble que la limite $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existe. Sous l'hypothèse qu'elle existe vraiment, nous pouvons la déterminer comme suit :

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \frac{2}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right), \end{aligned}$$

donc $2x = x + \frac{2}{x}$, d'où $x^2 = 2$, c'est-à-dire que $x = \sqrt{2}$.

Nous voyons que *si* la suite converge vers un $x \in \mathbb{R}$ alors $x = \sqrt{2}$. Donc $a = \sqrt{2}$ est le seul candidat possible pour la limite, mais il resterait à vérifier que la condition définissant la convergence soit remplie : étant donné $\varepsilon > 0$ il faudrait trouver n_0 tel que $|x_n - \sqrt{2}| \leq \varepsilon$ dès que $n \geq n_0$. Il est cependant plus facile d'obtenir la convergence à l'aide d'un critère général concernant les suites monotones :

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *croissante* si on a $x_n \leq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est dite *bornée supérieurement* s'il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème. *Tout suite croissante bornée supérieurement est convergente : il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$).*

En considérant la suite $-x_n$ au lieu de x_n , on déduit le théorème analogue pour les suites *décroissantes* bornées *inférieurement*. Une suite est dite *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Retournons à l'exemple 7. La suite est bornée inférieurement par $M = 0$, parce que $x_0 = 2 \geq 0$, et si $x_n > 0$, alors $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) > 0$. D'après la liste de x_1, \dots, x_5 il semble que la suite soit décroissante. Nous omettons² la preuve. Le théorème (version décroissante) s'applique et garantit que la suite converge vers un $x \in \mathbb{R}$.

Séries

Partant d'une suite de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut former les sommes successives

²En utilisant l'inégalité $(x-1)^2 > 0$ on montre d'abord que $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) > 1$ pour tout $x > 1$. Donc $x_n > 1$ pour tout n . Ensuite, on vérifie l'inégalité $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) < x$ pour tout $x > 1$, et en déduit que $x_{n+1} < x_n$.

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_0, \\
s_1 &= a_0 + a_1, \\
s_2 &= a_0 + a_1 + a_2, \\
&\vdots \\
s_n &= a_0 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k.
\end{aligned}$$

Si la suite de ces *sommes partielles* converge, on écrit pour sa limite

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

et on dit que la *série* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge. On appelle alors cette limite la *somme* ou la *limite* de la série. Donc *la somme d'une série est la limite de la suite des sommes partielles*. Notons que, par abus de langage, on utilise la même notation $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ pour la série de terme général a_k – c'est la *suite* $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles – et pour la somme, si elle existe.

Attention : ne pas confondre la suite de termes a_k de la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ avec sa suite des sommes partielles s_n .

Exemples

8. La *série géométrique* $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ converge pour $|q| < 1$: on a pour tout $q \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
s_n &= 1 + q + q^2 + \dots + q^n \\
q \cdot s_n &= q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} \\
\implies (1 - q) \cdot s_n &= 1 - q^{n+1} \quad \text{ou } s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression converge vers $\frac{1}{1 - q}$ pour $n \rightarrow \infty$, si $|q| < 1$.

Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} \quad \text{pour } |q| < 1.$$

9. La *série harmonique* diverge : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty$.

En effet,

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{> \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{> \frac{8}{16} = \frac{1}{2}} + \dots \\
> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty.
\end{aligned}$$

10. La *série harmonique alternée* (Newton 1667) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2$$

11. La *série de Leibniz* (1682) : $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Trouver la somme de cette série était un problème célèbre, le «problème de Bâle», résolu par Euler en 1735.

13. Plus généralement, on peut montrer (facilement) que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ converge si $s > 1$ et diverge si $s \leq 1$.

La fonction ainsi définie

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

s'appelle la *fonction zeta de Riemann*. Le résultat d'Euler dit que $\zeta(2) = \pi^2/6$, et il a trouvé des formules similaires exprimant $\zeta(n)$ pour tout entier positif pair. Ce n'est qu'en 1973 qu'on a pu prouver que $\zeta(3)$ est un nombre irrationnel.

14. Une *série entière* est une série de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

avec une variable x et des coefficients $a_k \in \mathbb{R}$. On peut la considérer comme un «polynôme avec un nombre infini de termes». Voir le chapitre 4 pour les détails.

Règles de calcul avec les séries

- Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

- Si les séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ convergent, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Définition. On dit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument si la série des valeurs absolues $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge.

- La convergence absolue entraîne la convergence : si la série $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, et on a

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

- Si l'on change l'ordre des termes a_k dans une série absolument convergente, alors la nouvelle série converge vers la même somme.

- Si les séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ convergent *absolument*, alors

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 + a_2 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2 + \dots) &= a_0 b_0 + \\ &\quad a_0 b_1 + a_1 b_0 + \\ &\quad a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + \dots, \end{aligned}$$

et cette dernière série converge absolument. Elle s'appelle le *produit de Cauchy* selon Augustin Louis Cauchy (1789–1857). D'après la règle précédente, on peut changer l'ordre de termes sans affecter la somme ; mais le produit de Cauchy est une manière systématique d'arranger la série.

Critères de convergence

On ne change pas la propriété de convergence ou divergence d'une série en modifiant un nombre fini de termes. En fait, si à partir d'un certain indice n_0 tous les termes a_n restent inchangés, alors la modification revient à augmenter ou à diminuer toutes les sommes partielles s_n avec $n \geq n_0$ d'une quantité constante, et donc la convergence ou la divergence de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne change pas. Par conséquent, dans l'étude de la convergence d'une série on peut supprimer un nombre fini de termes.

Condition nécessaire. Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, alors la suite des termes a_k tend vers zéro : $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

En effet, si $s \in \mathbb{R}$ est la somme de la série, on obtient $a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$ pour $n \rightarrow \infty$.

Critère de comparaison. Soient $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ deux séries avec

$$0 \leq a_k \leq b_k$$

pour tout k . Si $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge, alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

Si $0 \leq a_k \leq b_k$, on dit que la série $\sum b_k$ est une *majorante* de $\sum a_k$, et que $\sum a_k$ est une *minorante* de $\sum b_k$. Donc toute série de termes positifs avec une majorante qui converge est également convergente. Par suite, une série à termes positifs diverge lorsqu'elle admet une minorante divergente.

Pour la preuve du critère, rappelons (voir p. 15) que toute suite croissante et bornée supérieurement converge. La suite des sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ est croissante car les a_k sont positifs. Elle est bornée supérieurement par la somme $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Donc elle converge.

Critère de Leibniz. Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ une série alternée, c'est-à-dire avec $a_k \geq 0$ pour k pair et $a_k \leq 0$ pour k impair (ou vice versa), et telle que

$$|a_0| \geq |a_1| \geq |a_2| \geq \dots \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Alors la série converge.

Exemples

15. La série harmonique alternée (exemple 10) converge selon le critère de Leibniz ; mais elle ne converge pas absolument, puisque la série harmonique diverge.
16. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est divergente, puisque la série harmonique est une minorante qui diverge : on a $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ pour tout $k \geq 1$.
17. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{100+\sqrt{k}}$ est divergente, car $\frac{1}{100+\sqrt{k}} \geq \frac{1}{2\sqrt{k}}$ pour tout $k \geq 100^2$ et la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge.
18. La série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k}$ converge, car $\frac{1}{k^2-k} \leq \frac{2}{k^2}$ pour $k \geq 2$ (preuve ?) et la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge (exemple 12). Alternativement, notez que $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Pour la somme partielle on obtient une «somme télescopique» :

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\&= 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k} = 1.$$

19. Le développement décimal d'un nombre réel s est une série qui converge vers s : pour $s > 0$,

$$s = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{10} \right)^k$$

avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et avec $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pour $k \geq 1$. Cette série converge, car lorsqu'on supprime le premier terme a_0 , elle admet la série géométrique

$$\sum_{k=1}^{\infty} 9 \left(\frac{1}{10} \right)^k = 9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^k$$

comme majorante qui converge, selon l'exemple 8.

Limites de fonctions

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $a \in I$, et soit $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non nécessairement définie en a . On dit que f admet la *limite* $L \in \mathbb{R}$ au point a , et on note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

si pour $x \neq a$ tendant vers a , le nombre $f(x)$ s'approche de L aussi près que l'on veut. Plus précisément : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$x \neq a \text{ et } \text{dist}(x, a) < \delta \text{ impliquent } \text{dist}(f(x), L) < \varepsilon.$$

Rappelons que $\text{dist}(a, b) := |a - b|$ est la *distance* entre deux points $a, b \in \mathbb{R}$ sur la droite réelle. Comme pour les limites de suites, on peut interpréter ε comme

une tolérance : la valeur $f(x)$ coïncide avec L à une erreur $< \varepsilon$ près quand x est suffisamment proche de (mais pas égal à) a .

D'une manière analogue on définit les limites unilatérales

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \searrow a} f(x)$$

pour lesquelles on considère seulement les arguments x avec $x < a$ respectivement $x > a$. Il y a aussi des limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ainsi que des limites «impropres» comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Exemples $\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{2x + 3x^2 - 1} = \frac{5}{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

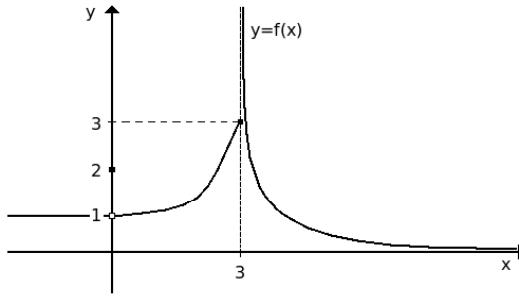
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$f(0) = 2$$

$$\lim_{x \nearrow 3} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \searrow 3} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$



La proposition suivante montre que la notion de limite d'une fonction se laisse réduire à celle de la convergence des suites :

Proposition. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si et seulement si pour toute suite x_n dans $I \setminus \{a\}$ qui converge vers a , la suite des images $f(x_n)$ converge vers L .

Donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ équivaut à dire que f transforme toute suite $x_n \neq a$ convergente vers a en une suite $f(x_n)$ convergente vers L . A l'aide de cette proposition on peut transférer les lois de calcul avec les limites de suites en des règles analogues pour les limites de fonctions : par exemple,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

si les deux limites de droite existent, alors celle de gauche aussi, et on a l'égalité indiquée.

Continuité

Définition. Considérons une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Alors f est dite *continue au point a* (ou *en a*) si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Il y a donc deux conditions : que la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, et qu'elle soit égale à $f(a)$. La fonction est dite *continue sur un ensemble* $A \subseteq I$ si elle est continue

en tout $a \in A$. Elle est dite *continue*, si elle est continue sur son domaine de définition (qui doit être précisé si l'on utilise cette terminologie).

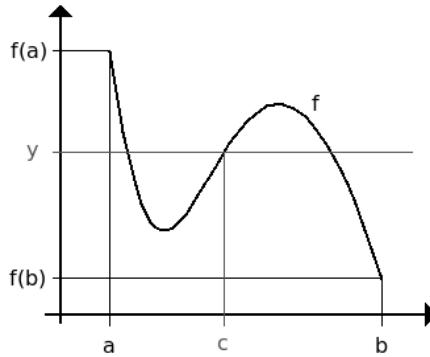
Comme conséquence des règles de calcul avec les limites, on obtient :

Si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues en a , alors la somme $f + g$, la différence $f - g$ et le produit $f \cdot g$ sont continués en a ; si, de plus, $g(a) \neq 0$, alors le quotient f/g est également continu en a .

Exemples

- La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ n'est pas continue en $x = 0$.
- La fonction valeur absolue $|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est continue sur \mathbb{R} .
- Tout polynôme $P(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k$ est continu sur \mathbb{R} . En effet, la fonction identité $x \mapsto x$ est continue, tout comme les fonctions constantes. Donc les produits $x \cdot x = x^2$, $x \cdot x^2 = x^3$ etc. sont continués, de même que les produits $a_k \cdot x^k$, et finalement leur somme $P(x)$.
- Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont continues sur tout \mathbb{R} ; la fonction $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est continue en tous les points où $\cos x$ ne s'annule pas, c'est-à-dire sur les intervalles $(2k - 1)\pi/2 < x < (2k + 1)\pi/2$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Théorème des valeurs intermédiaires.³ Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout y réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = y$.



La démonstration de ce théorème est constructive dans le sens qu'elle donne une méthode pour la construction de c : la *méthode de la bisection*. En considérant la fonction $x \mapsto f(x) - y$ à la place de f , on peut se ramener au cas $y = 0$. Supposons de plus que $f(a) < 0 < f(b)$. Pour trouver un c avec $f(c) = 0$, nous procédons comme suit :

³en allemand : Zwischenwertsatz

1er pas : Posons $c_1 := (a + b)/2$ et calculons $f(c_1)$. Trois cas sont possibles.

1. $f(c_1) = 0$: on arrête la procédure avec $c := c_1$.
2. $f(c_1) < 0$: on continue la recherche dans la moitié droite de $[a, b]$, posant $a_1 := c_1$ et $b_1 := b$;
3. $f(c_1) > 0$: on continue la recherche dans la moitié gauche de $[a, b]$, posant $a_1 := a$, $b_1 := c_1$.

Dans les deux derniers cas on a $f(a_1)f(b_1) < 0$, et on continue la recherche entre a_1 et b_1 , c'est-à-dire qu'on passe au

2ème pas : On répète les mêmes calculs que dans le premier pas avec a_1 et b_1 à la place de a et b , c'est-à-dire qu'on pose $c_2 := (a_1 + b_1)/2$, on calcule $f(c_2)$ etc.

En continuant ainsi, on obtient soit après un nombre fini de pas un c avec $f(c) = 0$, soit deux suites monotones

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \quad \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

avec $f(a_n)f(b_n) < 0$ et avec $|a_n - b_n| = (1/2)^n |a - b|$. Comme les suites sont monotones et bornées, elles convergent, et la dernière égalité montre qu'elles ont la même limite

$$c := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Montrons que $f(c) = 0$: en prenant la limite $n \rightarrow \infty$ dans l'inégalité

$$f(a_n)f(b_n) < 0$$

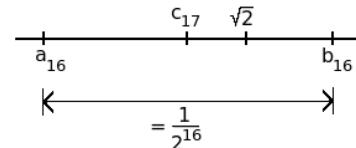
on obtient $f(c)^2 \leq 0$, et donc $f(c) = 0$. Remarquons que la continuité de f est utilisée dans ce dernier argument : il faut que $\lim f(a_n) = f(c) = \lim f(b_n)$.

Exemple. Calculons encore une fois $\sqrt{2}$ en cherchant un zéro $c > 0$ de $f(x) := x^2 - 2$. Nous commençons par $a := 1$ et $b := 2$. Alors $f(a) < 0 < f(b)$. Avec ces valeurs nous obtenons les approximations suivantes de $\sqrt{2}$:

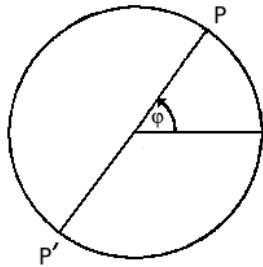
n	c_n	n	c_n	n	c_n
1	1.5	7	1.41406	13	1.41418
2	1.25	8	1.41797	14	1.41425
3	1.375	9	1.41602	15	1.41422
4	1.4375	10	1.41504	16	1.41420
5	1.40625	11	1.41455	17	1.41421
6	1.42188	12	1.41431	18	1.41421

On voit que la suite converge moins vite que celle que nous avons déjà vue comme approximation de $\sqrt{2}$ dans l'exemple 7. Par contre, il est facile d'estimer l'erreur après un certain nombre de pas :

Comme $b_{16} - a_{16} = (b - a)/2^{16} < 0.0000153$, et comme la limite $\sqrt{2}$ et c_{17} sont compris dans l'intervalle $[a_{16}, b_{16}]$, on sait que $|\sqrt{2} - c_{17}| < 0.0000153$. En réalité, on a même $\sqrt{2} - 1.41421 \approx 0.000004$.



Exemple. Considérons un grand cercle C tracé sur le globe terrestre, par exemple l'équateur. Montrons que, à chaque instant, il y a deux points antipodaux sur C où la température est la même.



Soit en effet $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction suivante : décrivons les points du cercle par l'angle φ avec une direction fixe dans le plan du cercle. Si P est le point qui correspond à φ , et si P' est son antipode, $f(\varphi) := T(P) - T(P')$, la différence de températures entre P et P' . Alors f est continue, et $f(0) = -f(\pi)$, donc f change le signe dans $[0, \pi]$. Le théorème nous dit qu'il y a un φ_0 avec $f(\varphi_0) = 0$. Pour le point P_0 correspondant on obtient $T(P_0) - T(P'_0) = 0$.

Chapitre 3

Calcul différentiel

La dérivée d'une fonction

Considérons une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Le principe du calcul différentiel est la simplification de l'étude de f dans le voisinage d'un point $x_0 \in I$ en *approchant* f par une fonction très simple : une fonction *affine* ou *linéaire inhomogène* $g(x) = ax + b$, c'est-à-dire une fonction dont le graphe est une droite. (Par abus de langage, nous parlons aussi simplement de la «droite» g .) Nous demandons que, près du point x_0 , la fonction g soit une bonne approximation de f dans le sens suivant :

1. $g(x_0) = f(x_0)$
2. Pour $x \neq x_0$, l'«erreur relative» $\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}$ tend vers 0 pour $x \rightarrow x_0$.

La première condition équivaut à $b = -ax_0 + f(x_0)$, donc à

$$g(x) = f(x_0) + a(x - x_0).$$

Par conséquent, la deuxième condition signifie que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

c'est-à-dire que

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

En conséquence, une telle droite g existe si et seulement si cette dernière limite existe, et dans ce cas elle est uniquement déterminée par les deux conditions.

Definition. La fonction f est dite *dérivante* ou *dérivable* au point x_0 si la limite

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe. Cette limite s'appelle alors la *dérivée* de f en x_0 . La fonction f est dite différentiable sur I si elle est différentiable en tout point de I .

Si f est dérivable en x_0 , alors en particulier $f(x_0 + h) \rightarrow f(x_0)$ quand h tend vers 0, c'est-à-dire que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Donc toute fonction dérivable au point x_0 est continue en x_0 .

Interprétation géométrique. Fixons un deuxième point $x_1 \neq x_0$. Alors le quotient

$$a_1 := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

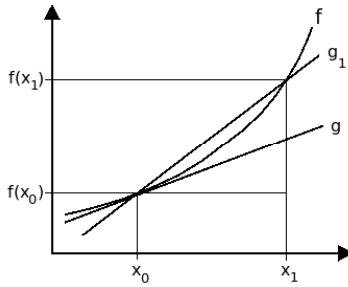
est la pente de la *sécante* qui coupe le graphe de f aux points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$. Cette sécante est le graphe de la fonction

$$g_1(x) := f(x_0) + a_1(x - x_0).$$

Lorsque x_1 tend vers x_0 , la pente a_1 converge vers $f'(x_0)$ et les sécantes g_1 convergent vers la *tangente*

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$.



Interprétation cinématique. Lorsque la variable x représente le *temps*, on écrit d'habitude t à la place de x , et on écrit souvent $\dot{f}(t_0)$ au lieu de $f'(t_0)$ pour la dérivée. Cette notation a été introduite par Newton. Pour $t_1 \neq t_0$,

$$\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

est la *vitesse moyenne* avec laquelle la grandeur f varie entre t_0 et t_1 . Il est donc raisonnable d'appeler $\dot{f}(t_0)$ la *vitesse instantanée* au temps t_0 , lorsque cette dérivée existe.

Vecteur vitesse. En utilisant la géométrie vectorielle, ces notions de vitesse moyenne et instantanée s'étendent à la situation suivante : par une *courbe* dans \mathbb{R}^n nous entendons une application

$$\vec{\varphi} : I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

c'est-à-dire un n -uple $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de fonctions

$$\varphi_1 : I \rightarrow \mathbb{R}, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Si nous interprétons la variable t comme le temps, $\vec{\varphi}(t)$ est donc un point se déplaçant dans \mathbb{R}^n et ayant au temps t les coordonnées $\varphi_j(t)$, $j = 1, \dots, n$. Supposons que ces fonctions soient différentiables. Le *vecteur de vitesse moyenne* entre les temps t_0 et $t_1 \neq t_0$ est alors le vecteur

$$\frac{\vec{\varphi}(t_1) - \vec{\varphi}(t_0)}{t_1 - t_0},$$

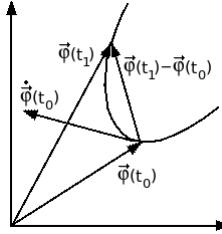
et le *vecteur vitesse* (instantanée) au temps t_0 est

$$\vec{v}(t_0) := \dot{\vec{\varphi}}(t_0) := \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\vec{\varphi}(t_1) - \vec{\varphi}(t_0)}{t_1 - t_0} = (\dot{\varphi}_1(t_0), \dots, \dot{\varphi}_n(t_0)).$$

Si $\dot{\vec{\varphi}}(t_0)$ n'est pas le vecteur nul, la *tangente* à la courbe en t_0 existe : c'est la droite

$$t \mapsto \vec{\varphi}(t_0) + t \dot{\vec{\varphi}}(t_0)$$

passant par $\vec{\varphi}(t_0)$ et ayant $\dot{\vec{\varphi}}(t_0)$ comme vecteur directeur.



Différentielles. Leibniz a introduit l'écriture bien connue

$$\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

pour la dérivée f' , et il la regardait comme le quotient de deux quantités «infiniment petites» ou «infinitésimales» dy et dx . Il avait donc l'identité $dy = f'(x)dx$ entre ces «différentielles». Mais la notion de grandeur infinitésimale restait floue et engendrait des erreurs. Aujourd'hui on évite les difficultés en utilisant la notion de limite : $f'(x_0)$ n'est pas un quotient, mais la *limite* du quotient de deux quantités (non-infinitésimales) $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ et $\Delta x = x - x_0$ quand x tend vers x_0 . La notation de Leibniz garde un sens intuitif : pour Δx très petit, la dérivée est presque égale au quotient $\Delta y / \Delta x$, et on a $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$. De plus, nous verrons que le formalisme de Leibniz est utile dans le calcul intégral et pour la résolution des équations différentielles.

Voici la définition moderne de la *différentielle*¹ d'une fonction f au point x_0 : c'est une autre *fonction*, la fonction linéaire $df_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$h \mapsto df_{x_0}(h) := f'(x_0) \cdot h.$$

On peut regarder df comme fonction de *deux* variables : $(x, h) \mapsto df_x(h)$.

Liste de dérivées

$$\begin{aligned} (x^a)' &= ax^{a-1} & \sin'(x) &= \cos(x) & (e^x)' &= e^x \\ \cos'(x) &= -\sin(x) & \ln'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Voir le chapitre 6 pour la fonction exponentielle $\exp(x) = e^x$ et le logarithme naturel $\ln x$.

Règles de calcul pour les dérivées

- linéarité : $(f + g)' = f' + g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$
- règle du produit : $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

¹Remarquons qu'avec cette définition de la différentielle on obtient une interprétation de l'identité $df = f'dx$ de Leibniz. En effet, pour la fonction identité $\iota(x) = x$ on a $\iota'(x_0) = 1$ et ainsi $df_{x_0}(h) = h$. Dès lors, la définition de la différentielle s'écrit $df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot dh_{x_0}(h)$ pour tout x_0 et h , ou brièvement $df = f'd\iota$. Si enfin on écrit x pour la fonction identité ι , on arrive à $df = f'dx$.

- règle du quotient : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (aux points x où $g(x) \neq 0$)
- dérivée d'une fonction composée, «règle de la chaîne» :

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- fonction réciproque : $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Considérons par exemple la *règle du produit*, et rappelons que $f \cdot g$ est la fonction $x \mapsto f(x)g(x)$. Il faut montrer que, si f et g sont dérivables en x_0 , alors la limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

existe et coïncide avec $f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$. En fait,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

Pour simplifier la preuve de la *règle de la chaîne*, supposons que $g(x) \neq g(x_0)$ pour tout $x \neq x_0$. (Le cas général demande un autre argument.) Alors

$$\begin{aligned} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(g(x_0)) g'(x_0) \end{aligned}$$

puisque $g(x) \rightarrow g(x_0)$ quand $x \rightarrow x_0$. La formule pour la dérivée d'une *fonction réciproque* résulte de la règle de la chaîne : on dérive l'identité $f(f^{-1}(y)) = y$ afin d'obtenir

$$f'(f^{-1}(y)) (f^{-1})'(y) = 1.$$

Exemples

$$1. \tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

$$2. \arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \cos^2(\arctan y)$$

Afin de simplifier ce résultat, observons que $\tan^2 = \frac{\sin^2}{\cos^2} = \frac{1 - \cos^2}{\cos^2}$, donc que $\tan^2 \cos^2 = 1 - \cos^2$ et ainsi $\cos^2 = \frac{1}{1 + \tan^2}$. Par conséquent, $\cos^2(\arctan y) = \frac{1}{1 + y^2}$. En renommant la variable, nous avons le résultat :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Dérivées d'ordres supérieurs

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable dans I , la dérivée est une fonction $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f' est de nouveau dérivable, la dérivée $(f')'$ de f' s'appelle la dérivée seconde de f , et on écrit

$$f^{(2)} = \frac{d^2 f}{dx^2} = f'' := (f')'.$$

Plus généralement,

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

dénote la n -ième dérivée (ou dérivée d'ordre n) de f , si elle existe. On pose encore $f^{(0)} := f$. La fonction f est dite *n fois continûment différentiable* si la n -ième dérivée $f^{(n)}$ existe et est continue. Elle est dit *indéfiniment différentiable* si les dérivées $f^{(n)}$ de tous ordres $n \in \mathbb{N}$ existent.

Application : méthode de Newton

La méthode de Newton (ou de Newton-Raphson) est une procédure efficace pour calculer des solutions de l'équation $f(x) = 0$ si la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable. Supposons que $f(a)f(b) < 0$. Comme toute fonction dérivable est continue, le théorème des valeurs intermédiaires dit qu'il existe (au moins) un zéro ξ de f dans $[a, b]$. La méthode de bissection nous donne une procédure fiable, mais lente, pour le calculer. Par contre, la méthode de Newton ne fonctionne pas toujours, mais sous des conditions favorables elle converge beaucoup plus rapidement.

Pour calculer ξ selon Newton, on choisit un point x_0 qui se trouve près de ξ , c'est-à-dire une valeur approximative raisonnable pour ξ . Dans un petit voisinage de x_0 , on peut remplacer $f(x)$ par son approximation affine (la « tangente »)

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

et on résout l'équation

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

au lieu de $f(x) = 0$. Soit x_1 la solution, c'est-à-dire

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

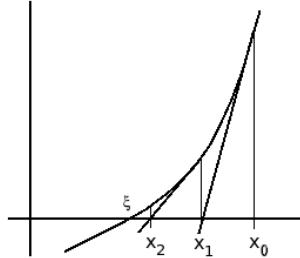
Ce zéro x_1 de la tangente sera généralement plus proche du zéro ξ de la fonction que x_0 . On répète l'opération avec x_1 à la place de x_0 , etc. On peut donc espérer améliorer l'approximation par des itérations successives :

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{méthode de Newton})$$

Théorème. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiable, et soit $\xi \in]a, b[$ un zéro de f avec $f'(\xi) \neq 0$. Alors il existe un $\delta > 0$ avec $[\xi - \delta, \xi + \delta] \subseteq]a, b[$ tel que, pour tout point $x_0 \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$, la méthode de Newton définit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers ξ .

Rappelons que f est dite (une fois) *continûment différentiable* si f est différentiable et si sa dérivée f' est une fonction continue. Géométriquement, on peut

décrire la méthode comme suit : on part d'un point x_0 qui se trouve près de l'intersection ξ du graphe de f avec l'axe des x . Pour trouver une meilleure approximation de ξ , on remplace le graphe de f par sa tangente en $(x_0, f(x_0))$, et on prend comme x_1 l'intersection de cette dernière avec l'axe des x . De la même façon, on passe de x_1 à x_2 , et ainsi de suite :



Le point x_{n+1} est l'intersection de l'axe des x avec la tangente au graphe de f en $(x_n, f(x_n))$.

Nous ne donnons pas la preuve du théorème, mais il est facile de voir que *si la limite $x_* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existe* et si $f'(x_*) \neq 0$, alors x_* est un zéro de f : en prenant la limite $\lim_{n \rightarrow \infty}$ dans la formule de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n)}$$

et donc, puisque f et f' sont des fonctions continues,

$$x_* = x_* - \frac{f(x_*)}{f'(x_*)},$$

ce qui implique que $f(x_*) = 0$.

Exemple. Pour calculer $\sqrt[p]{c}$ pour $c > 0$, on applique la méthode de Newton à la fonction

$$f(x) := x^p - c.$$

Sa dérivée est $f'(x) = px^{p-1}$, et nous obtenons la formule de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - c}{px_n^{p-1}} = \frac{p-1}{p}x_n + \frac{1}{p}\frac{c}{x_n^{p-1}}.$$

Pour $p = 2$, $c = 2$ et $x_0 = 2$ on retrouve la suite déjà vue au chapitre précédent.

Maxima et minima

On dit que la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ possède un *maximum* (global) au point $x_0 \in I$ si $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in I$. Alors la valeur $f(x_0)$ est appelée maximum de la fonction f . Un *minimum* de f est une valeur avec $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in I$, et un *extremum* est un maximum ou un minimum.

Evidemment la fonction $f(x) = x$ ne possède pas d'extremum dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Cependant, on peut montrer :

Théorème. (Existence du maximum et du minimum.) *Toute fonction continue sur un intervalle borné fermé $[a, b]$ possède (au moins) un maximum et un minimum dans cet intervalle.*

Ainsi, il existe des points x_{\min} et x_{\max} dans $[a, b]$ tels que

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$$

pour tout $x \in [a, b]$.

Proposition. Si f atteint un extremum en un point x_0 intérieur² de I , et si f est dérivable en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Pour le maximum (ou minimum) d'une fonction continue f dans $[a, b]$, il y a donc trois sortes de candidats :

- les points x avec $f'(x) = 0$;
- les points où $f'(x)$ n'existe pas ;
- les points $x = a$ et $x = b$.

Cette remarque implique une méthode pratique pour trouver les extrema : on trouve les candidats x et on établit la liste des valeurs correspondantes $f(x)$. Dans les applications typiques c'est une liste finie. La plus grande des valeurs ainsi trouvée est le maximum, la plus petite le minimum.

Pour la preuve de la proposition, considérons le cas d'un maximum. Comme x_0 est un point intérieur de I , les points $x_0 + h$ appartiennent à I pour tout h suffisamment proche de 0. Puisque f atteint son maximum en x_0 , on a $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$ pour de tels h , et donc

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \begin{cases} \geq 0 & \text{si } h < 0 \\ \leq 0 & \text{si } h > 0. \end{cases}$$

Calculons $f'(x_0)$ de deux façons :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \\ f'(x_0) &= \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $f'(x_0) = 0$. Le cas d'un minimum se traite de manière analogue.

Accroissements finis

Théorème des accroissements finis (Mittelwertsatz). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable à l'intérieur de l'intervalle, c'est-à-dire dans $]a, b[$. Alors, il existe un $x_0 \in]a, b[$ avec

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{*}$$

Il est souvent plus utile d'écrire cette identité sous la forme

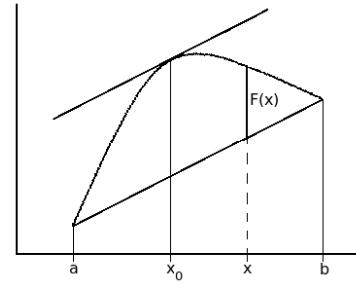
$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

²c'est-à-dire qui ne soit pas une borne de l'intervalle I

Comme cas particulier, on obtient le *théorème de Rolle* : Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un $x_0 \in]a, b[$ avec $f'(x_0) = 0$.

Interprétation analytique. A l'accroissement $\Delta x = b - a$ de la variable x correspond l'accroissement $\Delta f = f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b - a)$ de la fonction f . Donc $f'(x_0)$ est le taux de change *moyen* de f sur l'intervalle $[a, b]$, d'où l'appellation «Mittelwertsatz» en allemand. Remarquons que la qualification de l'accroissement comme «fini» a perdu son objet - elle provient de l'époque des quantités «infiniment petites».

Interprétation géométrique. Il existe (au moins) un $x_0 \in]a, b[$ tel que la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ est parallèle à la sécante passant par les deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Pour la preuve du théorème des accroissements finis, considérons la fonction

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a),$$

continue dans $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$. Géométriquement, c'est la distance verticale en x entre le graphe de f et la sécante

$$x \mapsto f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

On calcule que $F(a) = 0 = F(b)$. En conséquence, F possède un maximum ou un minimum en un point intérieur $x_0 \in]a, b[$. (En effet, selon le théorème sur l'existence du maximum et du minimum, F possède un maximum et un minimum dans $[a, b]$, et comme F s'annule en a et en b , on obtient un extremum dans l'intérieur.) En ce point, on a $F'(x_0) = 0$, et (*) par le calcul.

Corollaires. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Soit $M \geq 0$ une constante telle que $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$. Alors

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y| \quad \text{pour tout } x, y \in I.$$

2. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est une constante.

Pour la preuve, on applique le théorème des accroissements finis à l'intervalle $[x, y]$ (ou $[y, x]$ si $y < x$) afin d'obtenir

$$|f(x) - f(y)| = |f'(x_0)| |x - y| \leq M |x - y|.$$

La deuxième affirmation suit en posant $M = 0$.

Règles de l'Hospital

Ces règles ont été publiées en 1696 par le marquis de l'Hospital, mais c'est Jean Bernoulli qui les a trouvées et démontrées. Elles servent à donner un sens au quotient de deux fonctions f/g en certains points en lesquels il prend la forme $0/0$ ou ∞/∞ , c'est-à-dire points x_0 avec $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$. Voici une version simple :

Règle de l'Hospital. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec les propriétés suivantes :

- f et g sont différentiables sur $]a, b[$;
- $f(a) = g(a) = 0$;
- $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$;
- la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Alors la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe également et on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Cas particulier, très utile : si les fonctions sont encore différentiables (à droite) au point a , avec dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$ continues, et $g'(a) \neq 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

La démonstration, que nous ne présentons pas, repose sur une généralisation du théorème des accroissements finis.

Il existe une version analogue pour $\lim_{x \rightarrow b}$. On peut même admettre $a = -\infty$ et $b = \infty$, et il y a des versions analogues pour le cas

$$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \lim_{x \rightarrow \dots} g(x) = \pm\infty.$$

Exemples

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos(2x)}{1} = \frac{2\cos 0}{1} = 2.$$

C'est le cas le plus simple : le quotient prend la forme indéterminée « $0/0$ » pour $x \rightarrow 0$, et une seule application de la règle conduit à une limite qu'on peut évaluer directement. Remarquons que le premier signe d'égalité (marqué avec un lettre H pour indiquer l'application de la règle de l'Hospital) se justifie seulement à la fin : si la limite de f'/g' existe, celle de f/g existe, et les deux limites sont égales.

Souvent on applique la règle de l'Hospital une deuxième fois :

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{1 - \cos x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}}{\sin x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}}{\cos x} = \frac{1}{4}.$$

$$3. \text{ Considérons}^3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}.$$

On remarque tout d'abord que le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 pour $x \rightarrow 0$. Dès lors, on peut donc essayer d'appliquer la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = ?$$

De nouveau, le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 pour $x \rightarrow 0$, et en essayant une deuxième et une troisième fois avec la règle de l'Hospital on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} &\stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} \\ &\stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}}{6x} \\ &= -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{\cos^3 x}\right) \frac{\sin x}{x} \\ &= -\frac{1}{6}(1+2)1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. La règle de l'Hospital ne donne que des conditions *suffisantes* d'existence de la limite. Il existe des cas où la limite du quotient des dérivées n'existe pas et pourtant la limite du quotient des fonctions existe :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 1 \cdot 0 = 0$$

alors que le quotient des dérivées $\frac{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x}$ n'admet pas de limite en 0.

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

Comme $e^0 = 1$, cette limite prend la forme indéterminée $1/0 - 1/0$, donc une évaluation directe n'est pas possible. Mais on peut écrire

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)},$$

et cette dernière expression prend la forme «0/0» pour $x \rightarrow 0$. La règle de l'Hospital s'applique :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \\ &\stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

³Comme auparavant, il est en fait prématûr d'écrire une lim dont nous ne savons pas encore l'existence : celle-ci fait partie de la question.

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$$

Le logarithme \ln est défini pour $x > 0$, et on a $\ln x \rightarrow -\infty$ pour $x \rightarrow 0$. La limite prend donc la forme indéterminée $0 \cdot (-\infty)$ quand $x \rightarrow 0$. Afin d'appliquer la règle de l'Hospital, on écrit $x \ln x$ comme quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Chapitre 4

Formule de Taylor et séries entières

Polynômes

Considérons un polynôme de degré $\leq n$

$$P(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

et fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. Si l'on pose $y := x - x_0$, on peut remplacer x par $x_0 + y$ dans $P(x)$, et après simplification on obtient une expression de la forme

$$a_0 + a_1y + \dots + a_ny^n$$

pour certains coefficients a_k . On peut donc écrire $P(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k \end{aligned} \tag{4.1}$$

qu'on appelle le «développement» de P autour de x_0 . Les coefficients dans ce développement (4.1) sont uniquement déterminés par les dérivées successives de P en x_0 :

$$\begin{array}{ll} P^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k & P^{(0)}(x_0) = a_0 = 0! a_0 \\ P^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^n k a_k(x - x_0)^{k-1} & P^{(1)}(x_0) = a_1 = 1! a_1 \\ P^{(2)}(x) = \sum_{k=2}^n k(k-1)a_k(x - x_0)^{k-2} & P^{(2)}(x_0) = 2! a_2 \\ P^{(3)}(x) = \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2)a_k(x - x_0)^{k-3} & P^{(3)}(x_0) = 3! a_3 \\ \dots & \dots \end{array}$$

et ainsi, pour $k = 0, 1, \dots, n$

$$a_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}. \tag{4.2}$$

Inversément, donnés $n + 1$ nombres $d_0, \dots, d_n \in \mathbb{R}$, il existe un seul polynôme P de degré $\leq n$ dont les dérivées successives en x_0 sont $P^{(k)}(x_0) = d_k$: en fait, P est donné par la formule (4.1) avec les coefficients (4.2).

Approximation locale : formule de Taylor

La formule

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

qui est exacte pour un polynôme de degré $\leq n$, donne encore une bonne approximation pour une fonction n -fois dérivable, si x est proche de x_0 :

Théorème. (Formule de Taylor.) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n -fois différentiable ($n \geq 1$) sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(x) \quad (4.3)$$

où le « reste » $R_{n+1}(x)$ a la propriété

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \quad (4.4)$$

Le polynôme¹

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \end{aligned} \quad (4.5)$$

est appelé *polynôme de Taylor* de degré n au point x_0 de la fonction f . Nous avons vu que c'est l'unique polynôme de degré $\leq n$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre n en x_0 coïncident avec celles de la fonction f .

Voici les versions concrètes de la formule de Taylor pour $n = 1$ et $n = 2$:

- $n = 1$, pour f différentiable :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_2(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_2(x)}{x - x_0} = 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

C'est la caractérisation de la différentiabilité de f en x_0 .

- $n = 2$, pour f deux fois différentiable :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + R_3(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_3(x)}{(x - x_0)^2} = 0$.

¹Le polynôme de Taylor dépend de f et de x_0 qui doivent être spécifiés dans le contexte. Une notation plus explicite serait $T_{f,x_0,n}$ au lieu de T_n . Une remarque analogue s'applique au reste R_{n+1} .

Donnons la preuve de la formule de Taylor dans le cas où la dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n est encore continue. Considérons le polynôme de Taylor T_n et le reste $R(x) := R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x)$ correspondant. Le seul point à montrer est que R possède la propriété (4.4). Comme f et T_n ont les mêmes dérivées d'ordre $\leq n$ en x_0 , on a

$$R(x_0) = R'(x_0) = \dots = R^{(n)}(x_0) = 0,$$

ce qui nous donne la possibilité d'appliquer la règle de l'Hospital n fois :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R^{(n)}(x)}{n!}$$

Puisque $f^{(n)}$ est (supposée) continue, la dérivée $R^{(n)}$ est continue, et donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R^{(n)}(x)}{n!} = \frac{R^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

Dans le cas où f est $n + 1$ fois différentiable, on peut décrire le reste avec plus de précision :

Théorème. (Formule de Taylor avec reste de Lagrange.) *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ fois différentiable ($n \geq 0$) sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$. Alors pour tout $x \in I$, il existe un point ξ (dépendant de x) entre x_0 et x tel que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

avec

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (4.6)$$

Dès lors, si M_{n+1} est un nombre tel que $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M_{n+1}$ pour tout ξ entre x_0 et x , alors

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}. \quad (4.7)$$

Pour $n = 1$, le théorème se réduit au théorème des accroissements finis :

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0).$$

Corollaire. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est $(n+1)$ fois dérivable avec $f^{(n+1)} \equiv 0$, alors f est un polynôme de degré $\leq n$.

En fait, on a $f = T_n$, car $R_{n+1} \equiv 0$ d'après (4.6).

Preuve du théorème. Si $x = x_0$, l'affirmation se réduit à l'égalité $f(x_0) = f(x_0)$. Fixons maintenant un $x \neq x_0$ et définissons un nombre $c \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = T_n(x) + \frac{c}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Il faut montrer que $c = f^{(n+1)}(\xi)$ pour un ξ entre x_0 et x . Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction

$$g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k - \frac{c}{(n+1)!} (x - t)^{n+1}.$$

Alors $g(x_0) = 0$ par le choix de c , et $g(x) = f(x) - f(x) = 0$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc un ξ dans l'intervalle ouvert borné par x_0 et x tel que $g'(\xi) = 0$. Cependant, le calcul de la dérivée donne

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + c \frac{(x-t)^n}{n!},$$

et pour $t = \xi$, on obtient $c = f^{(n+1)}(\xi)$.

Séries de Taylor

Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment différentiable, et soit $x_0 \in I$. La *série de Taylor* de f en x_0 est la série

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k. \quad (4.8)$$

Les nombres $f^{(k)}(x_0)/k!$ s'appellent les *coefficients de Taylor*.

Les sommes partielles de la série sont les polynômes de Taylor $T_n(x)$ de f en x_0 . Fixons $x \in I$. Alors (par définition de la convergence d'une série de nombres) la série de Taylor $T(x)$ converge vers la valeur $f(x)$ si et seulement si la suite $T_n(x)$ converge vers $f(x)$ quand $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire si et seulement si le reste

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

Si c'est le cas, alors (pour ce x)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad (4.9)$$

et on dit que la série de Taylor «représente» la fonction f en x .

Il peut arriver que la série converge pour certaines valeurs x et diverge pour d'autres. Pour montrer qu'elle converge vers $f(x)$, on utilise souvent l'estimation (4.7). L'exemple 5 ci-dessous montre que, même pour les $x \in I$ pour lesquels la série de Taylor converge, sa limite peut être différente de $f(x)$.

Exemples

1. Considérons la série de Taylor pour $f(x) = 1/(1-x)$ avec $x_0 = 0$. Pour les dérivées de f on trouve $f^{(k)}(x) = k!/(1-x)^{k+1}$ pour $k = 0, 1, 2, \dots$, et donc $f^{(k)}(0) = k!$. La série de Taylor de f en 0 est la série géométrique :

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Nous avons vu (chapitre 2) qu'elle converge vers f pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| \geq 1$.

2. Considérons $f(x) = \sin x$ avec $x_0 = 0$. Les dérivées de f sont données par

$$\sin^{(m)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sin(x) & \text{si } m \text{ est pair, } m = 2k \\ (-1)^k \cos(x) & \text{si } m \text{ est impair, } m = 2k+1. \end{cases}$$

Comme $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$, on obtient

$$\sin^{(m)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (-1)^k & \text{si } m \text{ est impair, } m = 2k + 1, \end{cases}$$

et la série de Taylor est

$$T(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin^{(m)}(0)}{m!} x^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Montrons que la série converge vers $\sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: l'inégalité (4.7) s'écrit

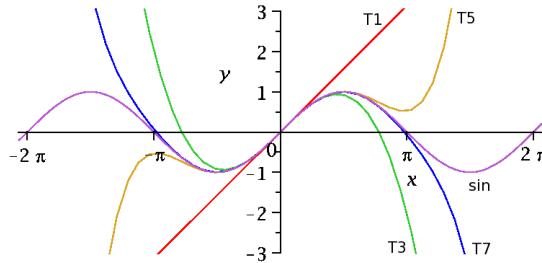
$$|\sin(x) - T_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

On peut choisir $M_{n+1} = 1$ pour tout n , car $|\sin^{(n+1)}(x)|$ est égal à $\pm \sin x$ ou $\pm \cos x$, et ainsi $|\sin^{(n+1)}(\xi)| \leq 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Comme² $|x|^{n+1}/(n+1)! \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$, il s'ensuit que

$$|\sin(x) - T_n(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

et donc la série de Taylor converge vers $\sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots \quad (4.10)$$



La fonction \sin et ses polynômes de Taylor T_1, T_3, T_5, T_7 en 0

3. De la même façon, on obtient la série du cosinus : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots \quad (4.11)$$

4. La fonction exponentielle e^x satisfait $(e^x)' = e^x$, et donc $(e^x)^{(k)} = e^x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $e^0 = 1$, la série de Taylor en $x_0 = 0$ est

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

²**Lemme.** Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Preuve. Fixons un $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2|a|$. Alors pour $n \geq k$

$$\left| \frac{a^n}{n!} \right| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^k}{k!} \frac{|a|}{k+1} \frac{|a|}{k+2} \cdots \frac{|a|}{n} \leq \frac{|a|^k}{k!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} = \frac{2^k |a|^k}{k!} \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

A l'aide de (4.7) on montrera au chapitre 6 que la série converge vers e^x pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad (4.12)$$

5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$

On peut montrer que f est indéfiniment différentiable et que toutes les dérivées $f^{(k)}$ s'annulent en $x_0 = 0$. La série de Taylor en 0 est donc $T(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, tandis que $f(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. Donc la série de Taylor converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais pour $x \neq 0$ elle ne converge pas vers $f(x)$.

Séries entières

Une *série entière* est une série de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k. \quad (4.13)$$

Ici les *coefficients* a_k et le *centre* x_0 sont des constantes, et x est une *variable*. En particulier, toute série de Taylor est une série entière dont les coefficients sont ceux de Taylor d'une fonction f :

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Considérons le cas $x_0 = 0$, c'est-à-dire une série entière de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (4.14)$$

Lemme. Si la série (4.14) converge pour une certaine valeur $x = x_1$ de la variable x , alors elle converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < |x_1|$.

Preuve. Comme la série $\sum a_k x_1^k$ converge, on a $a_k x_1^k \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow \infty$ (p. 18), donc $|a_k x_1^k| \leq M$ pour un nombre $M > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent

$$|a_k x^k| = |a_k x_1^k| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^k \leq M \cdot q^k$$

avec $q := |x/x_1| < 1$. Le critère de comparaison avec la série géométrique comme majorante implique que $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ converge.

Conséquence. Pour toute série entière (4.14) il existe un « *nombre* » $R \in [0, \infty] := [0, \infty[\cup \{\infty\}$, son rayon de convergence, tel que

- la série converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < R$;
- la série diverge pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| > R$.

Pour les x avec $|x| = R$, on peut avoir convergence ou divergence. Il existe une formule générale³ pour R , appelée *formule de Hadamard*, mais une des deux méthodes suivantes permet souvent de déterminer ce rayon de convergence :

- Si $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existe, alors $R = \frac{1}{L}$.
 - Si $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ existe, alors $R = \frac{1}{L}$.
- (4.15)

Ici il faut interpréter $1/0 = \infty$ et $1/\infty = 0$. Pour les séries entières de la forme plus générale

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

on obtient (à l'aide d'une substitution $z := x - x_0$) convergence pour $|x - x_0| < R$ et divergence pour $|x - x_0| > R$. La série converge donc pour tout x dans l'intervalle de convergence $]x_0 - R, x_0 + R[$, et la somme de la série définit une fonction $f :]x_0 - R, x_0 + R[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

pour $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$.

Exemples

6. La série géométrique $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ est une série entière avec coefficients $a_k = 1$. Nous avons déjà vu qu'elle converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| \geq 1$, donc le rayon de convergence est $R = 1$. Les deux formules pour $R = 1/L$ nous donnent le même résultat, par exemple $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{1} = 1$, donc $L = 1$ et $R = 1$.
7. La série exponentielle $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $R = \infty$. De nouveau, vérifions ce résultat avec une de formules pour R : on a $a_k = 1/k!$, donc $a_{k+1}/a_k = 1/(k+1) \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow \infty$. Ainsi $L = 0$ et $R = 1/0 = \infty$.
8. La série logarithmique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$$

converge pour $x = 1$ (série harmonique alternée) et diverge pour $x = -1$. Son rayon de convergence est donc $R = 1$. On démontrera plus tard qu'elle représente le logarithme naturel : pour $-1 < x \leq 1$ on a

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \dots, \quad (4.16)$$

d'où le nom de la série.

³ $R = 1/L$ avec $L = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} := \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{j \geq k} \sqrt[j]{|a_j|}$

9. La *série binomiale* de Newton généralise la formule du binôme de Newton :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (4.17)$$

pour $-1 < x < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, avec les coefficients binomiaux (généralisés)

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!}.$$

Si α est un entier naturel, alors seulement un nombre fini de coefficients sont différents de 0, et la formule se réduit à celle du binôme de Newton.

$$10. \sum_{k=0}^{\infty} 3^{3k} k x^k$$

Les coefficients sont $a_k = 3^{3k} k$. On trouve que $a_{k+1}/a_k = 3^3(k+1)/k \rightarrow 3^3 = 27$ pour $k \rightarrow \infty$. Le rayon de convergence est $R = 1/27$.

$$11. \sum_{k=123}^{\infty} 3^{3k} k x^k$$

La série coïncide avec l'exemple précédent sauf qu'on a omis les termes pour $k = 0, \dots, 122$. La série converge et diverge pour les mêmes x que l'exemple précédent. Le rayon de convergence est donc $R = 1/27$.

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} 3^k x^{2k}$$

Ici l'exposant de x est $2k$ au lieu de k , mais on peut écrire la série sous la forme standard en posant $2k = m$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^k x^{2k} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$$

avec les coefficients $a_m = \begin{cases} 3^{m/2} & \text{pour } m \geq 2 \text{ pair} \\ 0 & \text{pour } m \text{ impair.} \end{cases}$

Les formules (4.15) ne s'appliquent pas, car la limite $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|}$ n'existe pas, et on ne peut pas former a_{m+1}/a_m quand a_m est égal à 0. Mais on trouve le rayon de convergence comme suit : considérons la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k z^k$ obtenue en remplaçant $x^2 = z$ dans la série originale. Avec les formules (4.15) on trouve que le rayon de convergence de cette nouvelle série est égal à $1/3$. Elle converge donc pour $|z| < 1/3$, et elle diverge quand $|z| > 1/3$. Comme $z = x^2$, la série originale converge pour $|x^2| < 1/3$, c'est-à-dire pour $|x| < 1/\sqrt{3}$, et elle diverge pour $|x| > 1/\sqrt{3}$. Le rayon de convergence de $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k x^{2k}$ est donc $R = 1/\sqrt{3}$.

Calcul avec les séries entières

Les fonctions qui peuvent être écrites comme limites de séries entières convergentes constituent la plupart des fonctions utilisées dans les sciences. Les règles de calcul avec les séries (chapitre 2, p.17) et le fait que les séries entières

convergent *absolument* à l'intérieur de leur intervalle de convergence montrent qu'on peut les manipuler comme des polynômes. Si, par exemple,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

avec rayon de convergence R_1 et

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

avec rayon de convergence R_2 , alors le produit $f(x)g(x)$ s'écrit également comme limite d'une série entière, le *produit de Cauchy*

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) x^k \quad (4.18)$$

avec un rayon de convergence $R \geq \max\{R_1, R_2\}$, le plus grand des nombres R_1 et R_2 .

Théorème. Soit $f :]x_0 - R, x_0 + R[\rightarrow \mathbb{R}$ la somme d'une série entière

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

avec rayon de convergence $R > 0$. Alors f est dérivable dans $]x_0 - R, x_0 + R[$. On obtient la dérivée f' en dérivant la série terme par terme :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} \quad (4.19)$$

avec le même rayon de convergence R .

En appliquant ce théorème à la fonction $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$, on obtient que f est deux fois dérivable avec

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2},$$

et ainsi de suite. La fonction f est donc indéfiniment différentiable dans l'intervalle $]x_0 - R, x_0 + r[$.

Exemples

13. On veut écrire la fonction $f(x) = 1/(1+x)^2$ comme limite d'une série entière autour de $x_0 = 0$. Pour cela, on note qu'elle est la dérivée de la fonction $-1/(1+x)$ qu'on peut développer en utilisant la série géométrique : pour $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{dx} \frac{-1}{1+x} = -\frac{d}{dx} \frac{1}{1-(-x)} \\ &= -\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad \text{série géométrique} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k x^{k-1} \quad \text{selon le théorème} \\
&= - \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} (j+1) x^j \quad \text{avec } j = k - 1 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (j+1) x^j.
\end{aligned}$$

Donc, pour $-1 < x < 1$,

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) x^k = 1 - 2x + 3x^2 \mp \dots$$

14. Afin de prouver l'identité (4.16) pour $-1 < x < 1$, considérons la fonction $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

Il faut montrer que $g = 0$. En dérivant terme à terme selon le théorème, on trouve

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

et donc $g'(x) = 0$ (série géométrique). Il s'ensuit que g est une fonction constante $g = c$. Pour déterminer la constante c , on calcule $g(0) = \ln(1) = 0$. Donc $c = 0$.

Séries entières et séries de Taylor

Une manière d'arriver à une série entière est de commencer avec une fonction indéfiniment différentiable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et de former sa série de Taylor en un point $x_0 \in I$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Si le rayon de convergence R de cette série est strictement positif, celle-ci va converger sur l'intervalle $]x_0 - R, x_0 + R[$, mais, comme nous avons vu dans l'exemple 5, pas nécessairement vers $f(x)$.

D'autre part, on peut commencer avec une série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{4.20}$$

est une fonction $f :]x_0 - R, x_0 + R[\rightarrow \mathbb{R}$. Le théorème suivant dit que la série de Taylor de f coïncide avec la série donnée.

Théorème. *Si la fonction f est la somme d'une série entière (4.20) de rayon de convergence $R > 0$, alors il s'agit nécessairement de sa série de Taylor en x_0 , c'est-à-dire les coefficients a_k sont les coefficients de Taylor de f en x_0 :*

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0).$$

Preuve. Elle est analogue à celle de (4.2) pour les polynômes : dériver la série k fois terme par terme et ensuite poser $x = x_0$.

Exemple

15. Soit à trouver la série de Taylor en $x_0 = 0$ de la fonction $f(x) = \frac{x}{2 - x^3}$.

On peut résoudre ce problème en calculant les coefficients de Taylor $f^{(k)}(0)/k!$. Mais il est beaucoup plus facile d'utiliser une série déjà connue, la série géométrique : on a

$$f(x) = \frac{x}{2 - x^3} = \frac{x}{2} \frac{1}{1 - \frac{x^3}{2}} = \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^3}{2}\right)^k$$

pour $|x^3/2| < 1$, c'est-à-dire pour $|x| < \sqrt[3]{2}$. Donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} x^{3k+1}$$

pour tout $x \in]-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}[$. Le théorème nous dit que cette série est la série de Taylor de la fonction f , le problème est résolu.

En particulier, le coefficient de Taylor $f^{(301)}(0)/301!$ doit coïncider avec le coefficient de x^{301} dans notre série, c'est-à-dire avec $1/2^{101}$. Par conséquent, la dérivée d'ordre 301 de f en 0 est

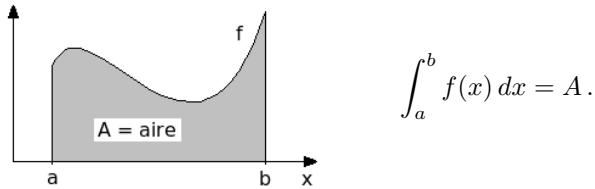
$$f^{(301)}(0) = \frac{301!}{2^{101}}.$$

Chapitre 5

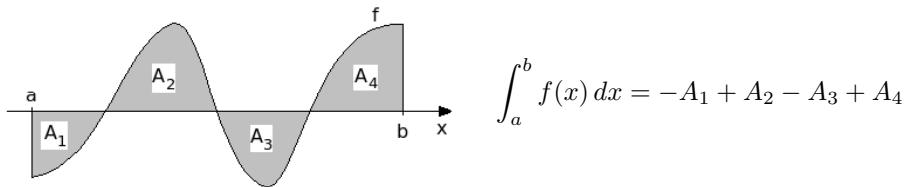
Calcul intégral

Introduction

L'intégrale d'une fonction f positive sur un intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ est l'*aire* A entre le graphe de f et l'axe des x , donc un nombre :



Se posent les problèmes de la *définition* et du *calcul* de cette aire ; il existe des fonctions f très irrégulières pour lesquelles l'aire ne peut être définie raisonnablement, mais il n'y a pas de problème pour les fonctions continues ou les fonctions bornées ne comportant qu'un nombre fini de discontinuités. Si f est négative, alors $\int_a^b f(x) dx$ est égale à (-1) fois l'aire entre le graphe et l'axe des x ; et dans le cas général d'une f qui change de signe, on compte les aires situées au-dessus de l'axe x positivement, celles situées au-dessous négativement :



Pour $a > b$, on définit $\int_a^b f(x) dx := -\int_b^a f(x) dx$; ainsi, par exemple (dessin !),

$$\int_2^1 x dx = - \int_1^2 x dx = -\frac{3}{2}.$$

Enfin, on définit $\int_a^a f(x) dx = 0$. Avec ces conventions, on a la règle

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad (5.1)$$

pour des points arbitraires $a, b, c \in \mathbb{R}$ et pour toute fonction f continue dans un intervalle contenant a, b et c .

Si $a \leq b$, et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

On peut donc « intégrer » une inégalité $f(x) \leq g(x)$.

La lettre x sous le signe d'intégration peut être remplacée par toute autre lettre :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$$

Sommes de Riemann

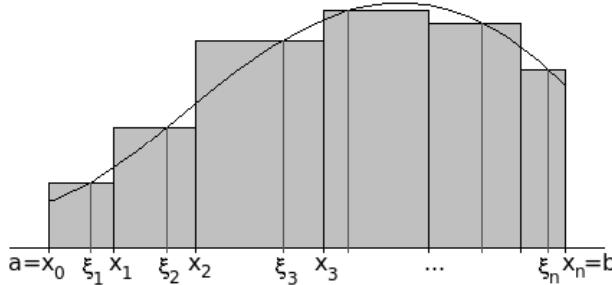
Etudions plus en détail la définition de l'intégrale. On décompose l'intervalle $[a, b]$ en un nombre fini n de sous-intervalles $[x_{k-1}, x_k]$ en choisissant $n + 1$ points $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$. Dans chaque sous-intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, on choisit un point quelconque ξ_k . Appelons pour le moment une telle subdivision de l'intervalle $[a, b]$ avec des points $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ une *subdivision décorée* :

$$\Delta = (x_0, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n).$$

La somme

$$S(f, \Delta) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (5.2)$$

s'appelle la *somme de Riemann* de f associée à la subdivision décorée Δ .



$S(f, \Delta)$ est l'aire marquée en gris

Le *pas* d'une subdivision (décorée), noté $h(\Delta)$, est défini par¹

$$h(\Delta) := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \max_{k=1, \dots, n}(x_k - x_{k-1}).$$

C'est donc la plus grande des longueurs des intervalles de la subdivision.

Définition. La fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *intégrable* (au sens de Riemann, sur $[a, b]$) si, pour toute suite $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ de subdivisions décorées Δ_m avec $h(\Delta_m) \rightarrow 0$ pour $m \rightarrow \infty$, la limite des sommes de Riemann associées $S(f, \Delta_m)$ existe. Si c'est le cas, alors cette limite ne dépend pas de la suite $(\Delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ choisie. On définit alors l'*intégrale de f sur l'intervalle [a, b]* comme la limite des sommes de Riemann :

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{m \rightarrow \infty} S(f, \Delta_m). \quad (5.3)$$

On peut montrer que toute fonction bornée ne comportant qu'un nombre fini de discontinuités est intégrable sur $[a, b]$.

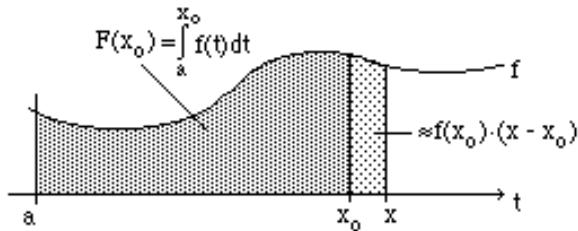
¹ $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ signifie le plus grand des nombres a_1, a_2, \dots, a_n .

Intégration et différentiation

Des calculs d'aires de ce type étaient — pour certaines fonctions — connus bien avant Newton et Leibniz : Archimède déjà savait calculer l'aire d'un segment de parabole. Le début du calcul infinitésimal moderne est plutôt la découverte de la relation entre différentiation et intégration. Là aussi, on trouve quelques résultats déjà avant Newton et Leibniz, par exemple chez Torricelli et Barrow. Cette relation est intuitivement facile à comprendre : en considérant la borne supérieure de l'intégration comme variable, nous définissons la fonction

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt.$$

Pour x proche de x_0 , on aura $F(x) \approx F(x_0) + f(x_0) \cdot (x - x_0)$,



et donc

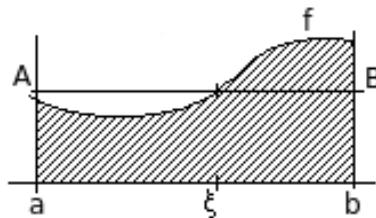
$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \approx f(x_0)$$

ce qui pour $x \rightarrow x_0$ rend la relation $F'(x_0) = f(x_0)$ plausible. Une démonstration rigoureuse utilise le théorème suivant :

Théorème de la moyenne.² Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, il existe un $\xi \in [a, b]$ avec

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a). \quad (5.4)$$

Interprétation : $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$ est la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.



aire du rectangle $abBA$ = aire sous le graphe de f

Preuve. La continuité de f garantit l'existence d'un minimum et d'un maximum de f dans $[a, b]$, c'est-à-dire il existe deux points $x_1, x_2 \in [a, b]$ avec

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

²en allemand : Mittelwertsatz der Integralrechnung

pour tout $x \in [a, b]$. En intégrant cette inégalité, on obtient

$$f(x_1) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(x_2) \cdot (b - a),$$

donc

$$f(x_1) \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \leq f(x_2).$$

Selon le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un ξ entre x_1 et x_2 avec

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. La fonction

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

est différentiable et sa dérivée est $F' = f$.

2. Soit $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction primitive de f , c'est-à-dire une fonction avec dérivée $G' = f$. Alors

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) =: \left[G(x) \right]_a^b. \quad (5.5)$$

Preuve. 1. Soit $x_0 \in]a, b[$ quelconque. En utilisant (5.1) et le théorème de la moyenne, on obtient pour $x \neq x_0$ dans $[a, b]$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{x - x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0} = f(\xi)$$

pour un ξ entre x_0 et x , donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} f(\xi) = f(x_0).$$

2. Soit

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt;$$

alors (d'après 1.) $F' = f$. Comme $G' = f$, on a $(G - F)' = 0$, et $G - F$ doit être une constante. Par conséquent, $G(b) - F(b) = G(a) - F(a)$ et donc

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

La fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, où la borne a est considérée comme fixe, mais arbitrairement choisie, et x comme variable — et, plus généralement, toute primitive de f — est appelée une *intégrale indéfinie* de f , tandis que $\int_a^b f(t) dt$, avec des bornes a, b fixes, est une *intégrale définie*. Une intégrale indéfinie de la fonction $f(x)$ est souvent notée $\int f(x) dx$, comme dans les exemples suivants :

$$\int dx = \int 1 dx = x + C, \quad \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

où C s'appelle la *constante d'intégration*. Cette notation veut indiquer que pour toute constante $C \in \mathbb{R}$ la fonction $\sin x + C$ est une intégrale indéfinie, c'est-à-dire une primitive, de la fonction $\cos x$. La notation est standard mais légèrement incorrecte : il serait mieux d'écrire $\int^x f(t) dt$ ou $\int_{\dots}^x f(t) dt$ au lieu de $\int f(x) dx$.

Exemples

1. Calculer la dérivée de la fonction $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_1^{x^2} t^t dt$.

Solution. Si l'on définit $g(x) = \int_1^x t^t dt$, alors $g'(x) = x^x$ d'après le théorème fondamental. En plus,

$$f(x) = \int_1^{x^2} t^t dt = g(x^2).$$

Donc, avec la règle de la chaîne

$$f'(x) = g'(x^2)(x^2)' = (x^2)^{(x^2)} 2x = 2x^{2x^2+1}.$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire du tout de calculer l'intégrale $\int t^t dt$.

2. Calculer la dérivée de la fonction $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_x^{x^2} x^3 t^t dt$.

Solution. Remarquons qu'on peut sortir le facteur x^3 de l'intégrale, parce que l'intégration est par rapport à la variable t . Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \int_x^{x^2} t^t dt = x^3 \left(\int_x^1 t^t dt + \int_1^{x^2} t^t dt \right) \\ &= x^3 \left(- \int_1^x t^t dt + \int_1^{x^2} t^t dt \right). \end{aligned}$$

(Au lieu de 1 on pourrait choisir n'importe quel autre point dans le domaine de définition.) En utilisant la règle du produit et l'exemple précédent, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \int_x^{x^2} t^t dt + x^3 (-x^x + 2x^{2x^2+1}) \\ &= 3x^2 \int_x^{x^2} t^t dt - x^{x+3} + 2x^{2x^2+4}. \end{aligned}$$

Une conséquence importante de la relation entre intégration et différentiation est le *calcul intégral* proprement dit : les lois du calcul différentiel se traduisent en lois pour le calcul intégral, dont nous présentons les plus importantes.

Règles du calcul intégral

Linéarité de l'intégrale. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, et $c \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b cf(x) dx &= c \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la définition de l'intégrale comme limite de sommes de Riemann : on vérifie facilement que $S(f + g, \Delta_m) = S(f, \Delta_m) + S(g, \Delta_m)$ et $S(cf, \Delta_m) = cS(f, \Delta_m)$. Puis la limite $m \rightarrow \infty$ donne le résultat.

Intégration par parties. Soient $U, V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ différentiables avec dérivées continues $U' = u$ et $V' = v$. Alors,

$$\int_a^b u(x)V(x) dx = \left[U(x)V(x) \right]_a^b - \int_a^b U(x)v(x) dx. \quad (5.6)$$

Preuve. La règle du produit pour la différentiation nous donne $U'V = (UV)' - UV'$, et donc $UV = (UV)' - Uv$. On prend l'intégrale $\int_a^b (\dots) dx$ de cette identité en utilisant le fait que $\int_a^b (UV)'(x) dx = [U(x)V(x)]_a^b$ selon (5.5) dans le théorème fondamental.

Règle de substitution. Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable avec dérivée continue, et soit f une fonction continue définie sur $\varphi([a, b])$. Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (5.7)$$

Preuve. On considère la fonction $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(s) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(s)} f(x) dx - \int_a^s f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Pour vérifier la règle de substitution, il faut montrer que $h(b) = 0$. Avec la partie 1 du théorème fondamental et la règle de la chaîne on trouve que la dérivée $h'(s) = f(\varphi(s))\varphi'(s) - f(\varphi(s))\varphi'(s)$ est nulle pour tout s . Par conséquent, h est une fonction constante, et comme $h(a) = 0$, on conclut qu'elle est nulle. En particulier, $h(b) = 0$.

Des exemples montrent que la règle de substitution s'applique dans les deux sens, en la lisant de gauche à droite et en la lisant de droite à gauche. Pour son application correcte, il ne faut pas oublier d'effectuer la substitution $x = \varphi(t)$ partout dans l'intégrale, c'est-à-dire qu'il ne faut pas seulement poser $x = \varphi(t)$ et prendre les bornes correctes a et b pour l'intégrale avec la variable t , mais il faut aussi poser $dx = \varphi'(t) dt$. Le symbole dx dans l'intégrale est donc très utile pour une application correcte de la règle de substitution.

Intégrales indéfinies. Souvent on utilise l'intégration par parties et la règle de substitution pour des intégrales *indéfinies* :

$$\int u(x)V(x) dx = U(x)V(x) - \int U(x)v(x) dx \quad (5.8)$$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (5.9)$$

L'égalité (5.9) exige des explications. Rappelons que $\int f(x) dx$ signifie une fonction primitive de f , disons $F(x)$, déterminée à l'addition d'une constante C près. L'expression de droite signifie une primitive de la fonction $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$, disons $G(t)$. La formule dit (ou devrait dire) que les deux primitives sont égales, à une constante près, aux *points correspondants*, c'est-à-dire pour $x = \varphi(t)$, donc que

$$F(\varphi(t)) = G(t) + C. \quad (5.10)$$

C'est une conséquence de (5.7), mais voici une vérification directe : avec la règle de la chaîne et la définition de G , on trouve

$$\frac{d}{dt} (F(\varphi(t)) - G(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t) - f(\varphi(t))\varphi'(t) = 0,$$

si bien que $F(\varphi(t)) - G(t)$ est une constante.

Intégration des séries entières. Soit $f :]x_0 - R, x_0 + R[\rightarrow \mathbb{R}$ la somme d'une série entière

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

avec rayon de convergence $R > 0$. Alors la série

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

obtenue en intégrant terme à terme possède le même rayon de convergence R , et sa somme $F :]x_0 - R, x_0 + R[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction primitive de f .

En effet, d'après un théorème du chapitre 4 (page 41) on peut calculer la dérivée F' en dérivant sa série terme à terme, et ainsi on obtient f .

Les lois du calcul intégral permettent de calculer un grand nombre d'intégrales à partir d'une liste de quelques fonctions et leurs primitives. On trouve ces listes de fonctions avec leurs primitives dans des recueils de formules et, plus complètes, dans des *tables d'intégrales*. Ces tables existent sous forme imprimée ou comme base de données, souvent intégrée dans un logiciel appliquant plus ou moins automatiquement les lois du calcul intégral pour ramener les intégrales à calculer à celles de la table. MathematicaTM et MapleTM sont deux logiciels de ce type. Voici une mini-table d'intégrales pour quelques fonctions élémentaires. Dans chaque formule, il faut ajouter $+C$ avec une constante arbitraire $C \in \mathbb{R}$ au membre de droite.

$$\int x^a dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} & \text{pour } a \neq -1 \\ \ln|x| & \text{pour } a = -1 \end{cases}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} \quad \text{pour } a > 0, a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) \quad \int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan(x) \\
\int \frac{dx}{1-x^2} &= \operatorname{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \quad \text{pour } |x| < 1 \\
\int \frac{dx}{x^2-1} &= -\operatorname{Arcoth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \quad \text{pour } |x| > 1 \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin(x) \quad \text{pour } |x| < 1 \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \operatorname{Arsinh}(x) = \ln \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \operatorname{Arcosh}(x) = \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| \quad \text{pour } |x| > 1 \\
\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} \quad \text{pour } n = 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

Exemples

3. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx$

Comme $\cos' x = -\sin x$, l'intégrale est de la forme

$$-\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$$

avec $\varphi(x) = \cos x$ et $f(x) = 1/\sqrt{x}$. La règle de substitution donne

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx &= -\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\int u^{-1/2} du \\
&= -\frac{1}{1/2} u^{1/2} + C = -2\sqrt{u} + C \\
&= -2\sqrt{\cos x} + C.
\end{aligned}$$

Vérification du résultat par différentiation :

$$\frac{d}{dx}(-2\sqrt{\cos x} + C) = -2 \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} (-\sin x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \quad \checkmark$$

En pratique, on pose simplement $u = \cos x$ et, en profitant de la notation de Leibniz, $du = \frac{du}{dx} dx = -\sin x dx$ et $dx = -(1/\sin x)du$. Remarquer que la règle pour la dérivation de la fonction inverse s'écrit

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dx}}.$$

On remplace toutes les expressions en x sous le signe d'intégration par des expressions correspondantes en u afin d'arriver à une intégrale de la forme $\int g(u) du$ qu'on sait calculer. A la fin, on exprime le résultat en termes de la variable x .

En principe, cette procédure exige que la fonction $u = \varphi(x)$ utilisée pour la substitution soit bijective de sorte qu'on puisse exprimer x en termes de u . Elle est donc justifiée seulement sur des intervalles où φ est bijective. Mais en pratique, on fait le calcul sans spécifier de tels intervalles, et on justifie le résultat obtenu en calculant sa dérivée, comme nous l'avons fait dans cet exemple.

$$4. \int \ln(x) dx$$

On sait que $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Donc, en utilisant l'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \int 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln(x) - x + C \end{aligned}$$

Contrôle du résultat par dérivation :

$$\frac{d}{dx}(x \ln(x) - x + C) = \ln(x) + x \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) \quad \checkmark$$

$$5. \int \sin^2 x dx$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \sin x \cdot \sin x dx \\ &= -\cos x \sin x - \int (-\cos x) \cos x dx \\ &= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx. \end{aligned}$$

A ce point, on est arrivé à la même intégrale $\int \sin^2 x dx$ que l'on voulait calculer. Mais on peut résoudre l'égalité obtenue par rapport à l'intégrale cherchée : on a $2 \int \sin^2 x dx = -\cos x \sin x + \int 1 dx$, et ainsi

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C.$$

Comme auparavant, on peut vérifier le résultat par différentiation.

$$6. \int \sin \sqrt{x-1} dx$$

On utilise la substitution $u = \sqrt{x-1}$. Alors $x = u^2 + 1$ et $dx = 2u du$. Ensuite, on continue avec une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int \sin \sqrt{x-1} dx &= 2 \int u \sin u du = -2u \cos u + 2 \int \cos u du \\ &= -2u \cos u + 2 \sin u + C \\ &= -2\sqrt{x-1} \cos \sqrt{x-1} + 2 \sin \sqrt{x-1} + C \end{aligned}$$

$$7. \int_0^1 x^2 2^{x^3+1} dx$$

On utilise la substitution $u = x^3 + 1$ et la formule $2^u = e^{u \ln 2}$ (voir chapitre 6). Alors $du = 3x^2 dx$. Pour $x = 0$ on a $u = 1$, et à $x = 1$ correspond $u = 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 2^{x^3+1} dx &= \frac{1}{3} \int_1^2 2^u du = \frac{1}{3} \int_1^2 e^{u \ln 2} du \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\ln 2} e^{u \ln 2} \right]_{u=1}^{u=2} = \frac{1}{3 \ln 2} (e^{2 \ln 2} - e^{\ln 2}) \end{aligned}$$

Comme alternative, on pourrait calculer l'intégrale *indéfinie* $\int x^2 2^{x^3+1} dx$ et évaluer $\left[\dots \right]_{x=0}^{x=1}$.

$$8. \int_0^{\pi/4} e^x \cos(2x) dx$$

Avec une intégration par parties on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} e^x \cos(2x) dx &= [e^x \cdot \cos(2x)]_{x=0}^{x=\pi/4} + 2 \int_0^{\pi/4} e^x \sin(2x) dx \\ &= -1 + 2 \int_0^{\pi/4} e^x \sin(2x) dx. \end{aligned}$$

Pour la dernière intégrale, une deuxième intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} e^x \cdot \sin(2x) dx &= [e^x \sin(2x)]_{x=0}^{x=\pi/4} - 2 \int_0^{\pi/4} e^x \cos(2x) dx \\ &= e^{\pi/4} - 2 \int_0^{\pi/4} e^x \cos(2x) dx. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} e^x \cos(2x) dx &= -1 + 2(e^{\pi/4} - 2 \int_0^{\pi/4} e^x \cos(2x) dx) \\ &= -1 + 2e^{\pi/4} - 4 \int_0^{\pi/4} e^x \cos(2x) dx, \end{aligned}$$

d'où l'on tire $5 \int_0^{\pi/4} e^x \cos(2x) dx = -1 + 2e^{\pi/4}$, et enfin le résultat

$$\int_0^{\pi/4} e^x \cos(2x) dx = \frac{1}{5} (-1 + 2e^{\pi/4}).$$

Résolution d'équations différentielles

On traitera ce sujet plus tard, mais expliquons brièvement le rôle du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral dans la résolution d'équations différentielles. L'exemple le plus simple d'une équation différentielle est une équation de la forme

$$y' = f$$

avec une fonction donnée f . Ici on cherche une fonction y qui satisfasse à l'équation, c'est-à-dire une fonction primitive y de f . Le théorème fondamental nous dit que, si f est continue, la fonction

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

est une solution. Cette solution remplit la *condition initiale* $y(x_0) = 0$, et pour la déterminer il faut calculer l'intégrale, ce qui revient au calcul d'une aire. Comme la construction d'un carré de même aire permet le calcul de celle-ci, on parlait aussi d'une *quadrature*. (La célèbre *quadrature du cercle* est la construction—avec règle et compas—d'un carré ayant l'aire πr^2 d'un cercle de rayon r donné.) C'est pourquoi on dit encore aujourd'hui qu'une équation différentielle peut être «résolue par quadrature» si elle se ramène à une équation du type $y' = f$. L'intégration joue donc un rôle dans la résolution d'équations différentielles, et on parle même de l'«intégration» d'une équation différentielle au lieu de sa résolution.

Exemple. Considérons la chute libre sous l'hypothèse galiléenne d'accélération constante (un cas particulier de la deuxième loi de Newton). Soit $s(t)$ la distance parcourue au temps t . On cherche la fonction s . La vitesse au temps t est la dérivée $v(t) = \dot{s}(t)$, et l'accélération est la dérivée seconde $\ddot{s}(t)$. Nous pouvons donc reformuler l'hypothèse de Galilée comme une équation différentielle

$$\ddot{s}(t) = a,$$

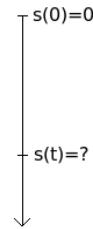
avec une constante a . Une intégration $\int_0^t (\dots) dt$ donne $\dot{s}(t) - \dot{s}(0) = at$, et ainsi

$$\dot{s}(t) = v_0 + at$$

avec la vitesse initiale $v_0 = \dot{s}(0)$. Une intégration supplémentaire conduit à

$$s(t) = \int_0^t (v_0 + a\tau) d\tau = v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

puisque $s(0) = 0$.



Intégration numérique

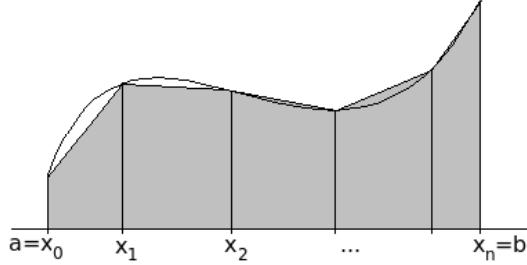
Quand on ne connaît pas de primitive de f , on utilise des méthodes d'approximation pour trouver la valeur approchée de l'intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$. Une approximation simple est donnée par les sommes de Riemann avec un pas $h(\Delta)$ suffisamment petit. Nous présentons deux autres méthodes d'approximation. Les deux utilisent les valeurs de la fonction f en un nombre fini de points x_k de l'intervalle $[a, b]$. Elles sont de la forme générale

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n w_k f(x_k),$$

où les constantes w_k sont appelées *poids* de la méthode utilisée.

Règle du trapèze. Découpons l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles en choisissant $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$. Dans chaque sous-intervalle $[x_{k-1}, x_k]$,

nous interpolons la fonction f linéairement, c'est-à-dire que nous remplaçons le graphe de la fonction entre x_{k-1} et x_k par un segment de droite :



En posant $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, nous obtenons l'approximation

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k)) \Delta x_k.$$

Dans le cas où les points x_k sont *équidistants* avec $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_n = h := \frac{b-a}{n}$, la formule se simplifie :

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right)$$

avec $x_k = a + kh$ pour $k = 0, \dots, n$.

Comme pour d'autres méthodes approchées, on peut estimer l'*erreur* de cette approximation de l'intégrale, c'est-à-dire la différence entre la valeur effective de l'intégrale et la valeur donnée par la règle du trapèze. Une analyse détaillée démontre :

Estimation d'erreur. Si la fonction f est deux fois continûment différentiable, avec $|f^{(2)}(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors l'erreur d'intégration par la règle du trapèze satisfait

$$\left| \int_a^b f(x) dx - h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right) \right| \leq (b-a) \frac{M}{12} h^2.$$

Règle de Simpson. Découpons l'intervalle $[a, b]$ en un nombre pair $2n$ de sous-intervalles en choisissant $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{2n} = b$. Sur chacun des intervalles $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$ nous remplaçons la fonction f par un polynôme d'interpolation de degré ≤ 2 .

Pour l'intervalle $[x_0, x_2]$, on choisit le polynôme p_1 de degré ≤ 2 qui prend les mêmes valeurs que f en x_0 , x_1 et x_2 . La formule d'interpolation de Lagrange (chapitre 1, p. 7) nous donne p_1 sous la forme

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) \\ &\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \end{aligned}$$

Un calcul direct donne

$$\int_{x_0}^{x_2} p_1(x) dx = \frac{x_2 - x_0}{6} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)).$$

D'une manière analogue on construit les polynômes interpolants p_2, \dots, p_n . Prenant comme approximation de l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_k(x) dx,$$

on arrive à la *règle de Simpson* :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6} (f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})).$$

Dans le cas où les points x_k sont équidistants avec $x_k - x_{k-1} = h := \frac{b-a}{2n}$ pour $k = 1, \dots, 2n$, la formule devient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})) \\ &= \frac{h}{3} \sum_{k=1}^n (f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})) \end{aligned}$$

avec $x_k = a + kh$ pour $k = 0, \dots, 2n$.

Estimation d'erreur. Si la fonction f est quatre fois continûment différentiable, avec $|f^{(4)}(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors l'erreur d'intégration par la règle de Simpson avec points équidistants satisfait à

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{3} \sum_{k=1}^n (f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})) \right| \leq (b-a) \frac{M}{180} h^4.$$

Intégrales improches

Jusqu'ici, nous avons étudié l'intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ fermé et borné. Considérons maintenant le cas d'un intervalle de la forme $[a, b[$. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Notez que f n'est pas définie en b . On parle d'un intégrale «impropre en b », et on définit

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\xi \nearrow b} \int_a^\xi f(x) dx$$

si cette limite existe. On dit alors que l'intégrale impropre «existe», ou qu'elle converge. La même définition s'applique lorsqu'on intègre jusqu'à une borne infinie :

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{\xi \nearrow \infty} \int_a^\xi f(x) dx.$$

D'une manière analogue, pour $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on pose

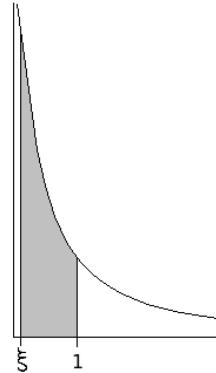
$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\xi \searrow a} \int_\xi^b f(x) dx$$

si cette limite existe. Finalement, pour une intégrale impropre en les deux bornes a et b , c'est-à-dire pour une fonction continue $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, on choisit un $c \in]a, b[$

arbitrairement et définit

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &:= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{\xi \searrow a} \int_\xi^c f(x) dx + \lim_{\xi \nearrow b} \int_c^\xi f(x) dx\end{aligned}$$

si *les deux* limites de droite existent. On voit facilement que le résultat ne dépend pas du choix de c .



Exemples

$$9. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\xi \searrow 0} \int_\xi^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\xi \searrow 0} [2\sqrt{x}]_\xi^1 = 2$$

$$10. \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\xi \searrow 0} \int_\xi^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\xi \searrow 0} \left[-\frac{1}{x} \right]_\xi^1 = +\infty$$

$$11. \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^\xi \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} [\arctan x]_0^\xi = \pi/2.$$

$$12. \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

$$13. \int_{-\infty}^\infty x dx \text{ n'existe pas, parce qu'on a } \int_{-\infty}^0 x dx = -\infty \text{ et } \int_0^\infty x dx = +\infty.$$

Mais la limite $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_{-\xi}^\xi dx$ existe et est égale à 0.

14. Plus tard nous verrons que

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Avec la méthode de la substitution on en déduit que

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)} dt = 1$$

pour tout $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$ avec $\sigma > 0$. En statistique, cette relation dit que la densité du loi normale gaussienne est une densité de probabilité.

Chapitre 6

Logarithmes et fonctions exponentielles

Le logarithme naturel

La fonction $\ln : \mathbb{R}_+ =]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, appelée *logarithme naturel*, est définie par

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}. \quad (6.1)$$

On a

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t}.$$

Avec la substitution $t = xs$, $dt = x ds$ on trouve

$$\ln(xy) = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^y \frac{ds}{s},$$

et donc «l'équation fonctionnelle» du logarithme

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y. \quad (6.2)$$

Pour $y = 1/x$, il s'ensuit que

$$\ln x + \ln \frac{1}{x} = \ln \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) = \ln 1 = 0,$$

et ainsi

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x. \quad (6.3)$$

Puisque $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$, on obtient comme conséquence de (6.2) et (6.3)

$$\ln \left(\frac{x}{y} \right) = \ln x - \ln y.$$

Par sa définition, la fonction \ln satisfait $\ln'(x) = 1/x$ et $\ln(1) = 0$. Comme la primitive d'une fonction définie sur un intervalle est uniquement déterminée à l'addition d'une constante près, la fonction \ln est uniquement déterminée par ces deux propriétés : \ln est la seule primitive de $1/x$ sur \mathbb{R}_+ avec $\ln(1) = 0$.

La loi (6.2) peut être également vérifiée d'une autre façon. Pour cela, fixons $y > 0$ en laissant x variable. Alors (y étant fixé)

$$\frac{d}{dx}(\ln(xy) - \ln x - \ln y) = \frac{1}{xy} \frac{d}{dx}(xy) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

Par conséquent, $\ln(xy) - \ln x - \ln y = c$ avec une « constante » c (qui dépend de y). En posant $x = 1$ dans cette identité on obtient $c = 0$, d'où le résultat.

Note historique. La découverte des logarithmes au début du 17^e siècle était bienvenue, car ils permettaient de ramener une multiplication à une addition. Bien que la première table de logarithmes, publiée par John Napier en 1614, contint une autre fonction avec une autre loi, les mathématiciens se rendirent vite compte qu'une fonction $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

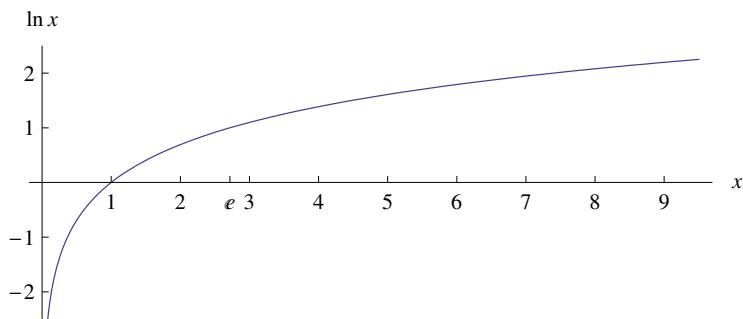
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

et dont on trouve les valeurs dans une table, était le moyen idéal pour ramener une multiplication à une addition : pour le calcul du produit xy on cherche les logarithmes $\ln x$ et $\ln y$ dans la table, on les additionne, et on cherche dans la même table le nombre ayant cette somme $\ln x + \ln y$ comme logarithme. (Par une procédure analogue on ramène une division à une soustraction.) Si on veut utiliser les logarithmes pour la réduction d'une multiplication à une addition, on a besoin de l'injectivité de la fonction $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$: sinon il n'est pas possible de retrouver le nombre xy à partir de son logarithme $\ln(xy)$. En effet :

Proposition. *Le logarithme naturel $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bijective.*

Preuve. Par construction, il s'agit d'une fonction différentiable avec dérivée $\ln' x = 1/x > 0$. Le logarithme naturel est donc une fonction strictement monotone croissante et, par conséquent, injective. Pour voir qu'elle est surjective, il suffit (à cause du théorème des valeurs intermédiaires, p. 21) de montrer que

$$\lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$



Montrons d'abord la deuxième égalité : soit $x \geq 2$ et soit n le plus grand nombre entier $\leq x$. On a alors

$$\begin{aligned} \ln x &= \int_1^x \frac{dt}{t} \geq \int_1^n \frac{dt}{t} = \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \dots + \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} \\ &\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

car $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k+1}$ pour t dans l'intervalle $[k, k+1]$. Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, puisque la série $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ diverge. La première égalité est une conséquence de la deuxième, car $\ln(1/x) = -\ln x$:

$$\lim_{x \searrow 0} \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1/x) = -\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = -\infty.$$

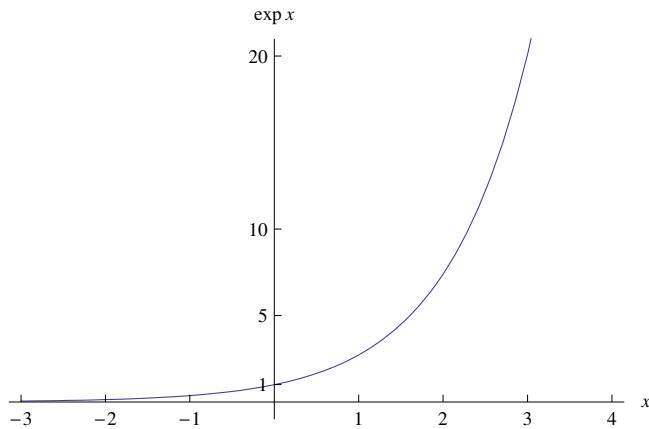
La fonction exponentielle

La bijectivité de $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ permet de définir la fonction réciproque. Définissons la *fonction exponentielle*

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

comme la fonction réciproque du logarithme naturel, c'est-à-dire $\exp = \ln^{-1}$. A la place de $\exp x$ on écrit aussi e^x , car cela peut être interprété comme une puissance d'un certain nombre e - voir plus bas. Donc

$$y = e^x \iff x = \ln y. \quad (6.4)$$



Propriétés de la fonction exponentielle.

- $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$ pour tous les $x, y \in \mathbb{R}$
- $\exp(0) = 1$
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\exp x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- La fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bijective ; plus précisément : elle est strictement croissante et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty.$$

- La fonction \exp est différentiable. Elle est égale à sa propre dérivée :

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Ces propriétés découlent des propriétés du logarithme naturel. Le fait suivant était déjà mentionné au chapitre 4.

Proposition. *La série de Taylor de la fonction \exp en $x_0 = 0$ converge vers $\exp x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Preuve. Soit T_n le n -ième polynôme de Taylor de la fonction exponentielle :

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Il faut montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(x)$ converge vers $\exp x$ lorsque n tend vers ∞ . A cette fin, nous utilisons l'estimation (4.7) (page 37) du reste $|\exp x - T_n(x)|$ dans la formule de Taylor pour montrer que $|\exp x - T_n(x)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Rappelons l'estimation (4.7) du reste : si M_{n+1} est un nombre tel que $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M_{n+1}$ pour tout ξ entre x_0 et x , alors

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}. \quad (*)$$

Dans le cas présent, $x_0 = 0$ et $f = \exp$, et on a

$$|f^{(n+1)}(\xi)| = |\exp^{(n+1)}(\xi)| = \exp(\xi) \leq 1 + e^x$$

pour tout¹ ξ entre 0 et x . On peut donc choisir $M_{n+1} = 1 + e^x$ indépendamment de n , et l'estimation (*) devient

$$|\exp x - T_n(x)| \leq (1 + e^x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On voit facilement que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Par conséquent, $|\exp x - T_n(x)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Proposition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Preuve. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $1 + \frac{x}{n} > 0$ pour tout $n \geq n_0$. Pour de tels n , considérons l'expression

$$\ln \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right).$$

La formule de Taylor donne pour la fonction $f(y) = \ln(1 + y)$

$$\ln(1 + y) = y + R(y)$$

¹En fait, $\exp(\xi) \leq 1$ si $x \leq \xi \leq 0$, et $\exp(\xi) \leq \exp x = e^x$ si $0 \leq \xi \leq x$, donc en tout cas $\exp(\xi) \leq 1 + e^x$.

avec $\frac{R(y)}{y} \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow 0$. En remplaçant y par x/n , il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) &= n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = n\left(\frac{x}{n} + R\left(\frac{x}{n}\right)\right) \\ &= x + x\frac{n}{x}R\left(\frac{x}{n}\right) = x\left(1 + \frac{R(x/n)}{x/n}\right) \longrightarrow x\end{aligned}$$

pour $n \rightarrow \infty$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) \\ &= \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) \\ &= \exp x.\end{aligned}$$

exp(x) comme puissance

Nous voulons maintenant justifier l'écriture de $\exp x$ comme une puissance e^x . Soit le *nombre e (d'Euler)*

$$e := \exp(1) = 2.71828\dots$$

Rappelons que, pour $a \in \mathbb{R}$ positif et pour tout nombre *rationnel* positif $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (avec $p, q \in \mathbb{N}$ et $q > 0$), la puissance a^x est définie comme

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

Pour $x \in \mathbb{Q}$ négatif on définit alors $a^x := \frac{1}{a^{-x}}$. Ainsi,

$$a^{-3/4} = \frac{1}{a^{3/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}.$$

Considérons maintenant $a = e$.

Proposition. Pour tout $x \in \mathbb{Q}$ on a

$$\exp(x) = e^x. \quad (*)$$

La valeur $\exp(x)$ est donc vraiment une puissance au sens habituel de e quand x est rationnel, ce qui justifie la notation.

Preuve. Pour démontrer l'égalité $(*)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$ positif, c'est-à-dire pour montrer que

$$e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p}, \quad (**)$$

pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q > 0$, on utilise la règle $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$ plusieurs fois. On procède en trois étapes. Commençons avec le cas $p > 0$ et $q = 1$:

$$\exp p = \exp(1 + \dots + 1) = \exp(1) \cdot \dots \cdot \exp(1) = e \cdot \dots \cdot e = e^p.$$

Dans le cas plus général où $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q > 0$,

$$\left(\exp\frac{p}{q}\right)^q = \exp\left(\frac{p}{q} + \dots + \frac{p}{q}\right) = \exp\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = \exp p = e^p,$$

où nous avons utilisé le fait déjà établi que $\exp p = e^p$. En prenant la racine $\sqrt[q]{\cdot}$ on obtient (**). Enfin pour $x \in \mathbb{Q}$ négatif, $-x$ est un nombre rationnel positif et donc, comme nous l'avons déjà montré, $\exp(-x) = e^{-x}$. Par conséquent,

$$\exp x = \frac{1}{\exp(-x)} = \frac{1}{e^{-x}} = e^x,$$

d'où le résultat (*) pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

Puissances et logarithmes généraux

Le logarithme naturel et la fonction exponentielle nous permettent de donner une définition raisonnable de la puissance a^x pour tout $a > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Fixons $a > 0$; alors la fonction $f(x) = e^{x \ln a}$ satisfait à l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ avec les conditions $f(0) = 1$ et $f(1) = a$. En suivant la preuve de la proposition précédente on obtient pour x rationnel $f(x) = f(1)^x = a^x$, c'est-à-dire

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (6.5)$$

pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Nous définissons a^x par cette formule pour $x \notin \mathbb{Q}$. Pour $a = 1$, nous obtenons la fonction peu intéressante $a^x \equiv 1$, et pour $a \neq 1$ une fonction strictement monotone. La fonction inverse

$$\log_a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R},$$

le *logarithme de base a*, est donc bien définie si $a \neq 1$:

$$x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x = e^{x \ln a} \Leftrightarrow x \ln a = \ln y.$$

Par conséquent,

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}. \quad (6.6)$$

Pour $a = e$ on a $\log_e y = \ln y$ puisque $\ln e = 1$. Le nombre e est donc la base du logarithme naturel.

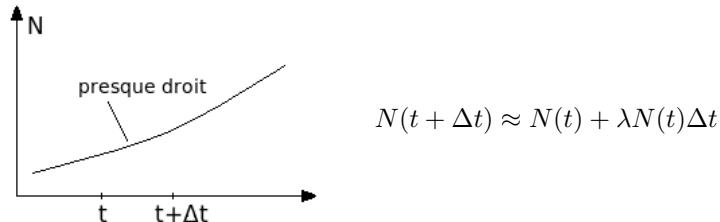
Croissance exponentielle

Soit $N(t)$ le nombre d'individus d'une population (par exemple de bactéries) au temps t . Souvent, l'*hypothèse* suivante n'est pas trop irréaliste :

Sur un petit intervalle de temps Δt , l'accroissement $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$ est (à peu près) proportionnel au produit $N(t)\Delta t$, avec un facteur de proportionnalité $\lambda > 0$:

$$N(t + \Delta t) - N(t) \approx \lambda N(t)\Delta t$$

Pour t fixe, la fonction $N(t + \Delta t)$ de Δt est donc à peu près linéaire dans cet intervalle, avec pente $\lambda N(t)$:



Pour l'étudier avec les méthodes du calcul différentiel, nous faisons abstraction du fait que N ne prend que des valeurs entières et admettons aussi des valeurs réelles quelconques. (En étudiant par exemple la croissance de bactéries, on ne va pas compter les individus, mais peser toute la culture ; notre idéalisation est donc raisonnable.) L'allure locale presque linéaire de la fonction $N(t)$ implique maintenant

$$\dot{N}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lambda N(t),$$

c'est-à-dire que la fonction $N(t)$ satisfait l'*équation différentielle*

$$\dot{N} = \lambda N.$$

Cherchons donc les fonctions $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\dot{N} = \lambda N$, où $\lambda > 0$ est une constante. La proposition suivante montre que, si nous y ajoutons encore une *condition initiale* $N(t_0) = N_0$, il y a une et une seule solution, à savoir la fonction

$$N(t) = N_0 e^{\lambda(t-t_0)}. \quad (6.7)$$

Proposition. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. Alors les solutions $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\dot{y} = \lambda y$$

sont les fonctions

$$y(t) = A e^{\lambda t}$$

avec $A \in \mathbb{R}$. Donné t_0 et y_0 , l'unique solution remplissant la condition initiale $y(t_0) = y_0$ est la fonction

$$y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}.$$

Preuve. Pour toute constante $A \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto A e^{\lambda t}$ est une solution de l'équation différentielle. Soit maintenant $t \mapsto y(t)$ une solution quelconque de cette équation. Il faut montrer qu'elle est de la forme $A e^{\lambda t}$ pour une constante A . A cette fin, étudions la fonction $h(t) = \frac{y(t)}{e^{\lambda t}}$. Pour sa dérivée on trouve

$$\dot{h}(t) = \frac{\dot{y}(t)e^{\lambda t} - y(t)\lambda e^{\lambda t}}{(e^{\lambda t})^2} = \frac{\lambda y(t)e^{\lambda t} - y(t)\lambda e^{\lambda t}}{(e^{\lambda t})^2} = 0.$$

Par conséquent, h est une fonction constante, disons $h(t) \equiv A$, et par suite $y(t) = A e^{\lambda t}$. Enfin, la condition initiale $y(t_0) = y_0$ permet de déterminer la constante A : on a $y_0 = A e^{\lambda t_0}$, donc $A = y_0 e^{-\lambda t_0}$ et ainsi

$$y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}.$$

Décroissance exponentielle : décomposition radioactive

On utilise le même modèle mathématique pour la décomposition radioactive, mais avec un facteur de proportionnalité négatif. Soit $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs d'une élément donnée présents dans un échantillon au temps t . Alors

$$\dot{N} = -\lambda N$$

avec $\lambda > 0$, et par conséquent

$$N(t) = N(t_0) e^{-\lambda(t-t_0)}. \quad (6.8)$$

En général on ne donne pas le facteur λ mais plutôt la *demi-vie* τ , le temps après lequel il ne reste que la moitié de la masse initiale :

$$N(t_0 + \tau) = N(t_0)e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2}N(t_0) \iff e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2} \iff \lambda\tau = \ln 2.$$

La relation entre λ et τ est donc

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{\tau}.$$

Exemple. Si la demi-vie d'une substance radioactive vaut 400 ans, après combien d'années 90% de cette substance se seront désintégrés ?

On calcule le temps en années après lesquelles il reste 10% de la substance. On a donc l'équation $N(t) = \frac{1}{10}N(t_0)$, et on cherche $\Delta t = t - t_0$. Avec (6.8)

$$N(t) = N(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} = N(t_0)e^{-\lambda\Delta t}$$

on obtient $\frac{1}{10} = e^{-\lambda\Delta t}$, ce qui donne $\ln(\frac{1}{10}) = -\lambda\Delta t$ et

$$\Delta t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\frac{400}{\ln 2} \ln\left(\frac{1}{10}\right) \approx 1328.8$$

Il faut donc environ 1328.8 années pour que 90% de la substance se désintègrent.

Exemple. On considère des substances radioactives A et B . La demi-vie de la substance A vaut 500 ans, la substance B perd un pour mille par an. Laquelle de ces deux substances se décompose le plus vite ?

On compare les demi-vies en années des deux substances, $\tau_A = 500$ et τ_B . Pour la substance B on a $N(t+1) = N(t) - \frac{1}{1000}N(t)$, donc

$$N(t+1) = \frac{999}{1000}N(t)$$

D'autre part, $N(t+1) = N(t)e^{-\lambda_B(t+1-t)} = N(t)e^{-\lambda_B}$, et ainsi

$$\frac{999}{1000}N(t) = N(t)e^{-\lambda_B}$$

d'où on déduit que $\lambda_B = -\ln \frac{999}{1000}$. Pour la demi-vie on obtient

$$\tau_B = \frac{\ln 2}{\lambda_B} \approx 692.8$$

C'est donc la substance A qui se décompose le plus vite.

Exemple. Dans un délai d'un mois, la concentration d'une substance radioactive dans un échantillon de glace a diminué par décomposition radioactive de 45,62% à 45,61% de la concentration originelle. Quel est l'âge de la glace ? Quelle était la concentration il y a 100 ans ?

On mesure le temps en années. Soit $N(t)$ la quantité de substance radioactive dans l'échantillon au temps t . Si t_0 dénote le moment de la formation de la glace, et si t_1 est le moment présent, on sait que $N(t_1) = 0.4561N(t_0)$ et $N(t_1 - \frac{1}{12}) = 0.4562N(t_0)$. On a alors les deux équations

$$\begin{aligned} 0.4561N(t_0) &= N(t_0)e^{-\lambda(t_1-t_0)} \\ 0.4562N(t_0) &= N(t_0)e^{-\lambda(t_1-\frac{1}{12}-t_0)}. \end{aligned}$$

La première équation donne

$$(1) \quad -\lambda(t_1 - t_0) = \ln 0.4561.$$

En divisant les équations, on obtient aussi $\frac{4561}{4562} = e^{\lambda/12}$, donc la valeur

$$\lambda = 12 \ln \left(\frac{4562}{4561} \right) \approx 0.00263 \dots$$

L'âge de la glace est égal à la différence $t_1 - t_0$. L'équation (1) ci-dessus donne

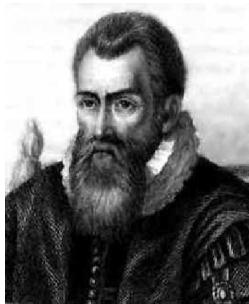
$$t_1 - t_0 = -\frac{\ln 0.4561}{\lambda} = -\frac{\ln 0.4561}{12 \ln(4562/4561)} \approx 298.414 \dots$$

La glace date donc d'environ 298 ans. La concentration il y a 100 ans est donnée par

$$\begin{aligned} N(t_1 - 100) &= N(t_0) e^{-\lambda(t_1 - 100 - t_0)} = N(t_0) e^{-\lambda(t_1 - t_0)} e^{100\lambda} \\ &= N(t_0) 0.4561 \left(\frac{4562}{4561} \right)^{1200} \approx 0.593 N(t_0) \end{aligned}$$

Elle était donc environ 59.3% de la concentration initiale.

La croissance ou décroissance exponentielle n'est qu'un exemple parmi beaucoup d'autres d'applications de la fonction exponentielle. C'est effectivement une des fonctions les plus importantes. Mais à son origine était bien l'idée de simplifier des calculs grâce aux logarithmes.



Le baron écossais John NAPIER (1550 – 1617) publia sa table de logarithmes sous le titre *Mirifici logarithmorum canonis descriptio, ejusque usus, in utraque trigonometria; ut etiam in omni logistica mathematica, amplissimi, facillimi, & expeditissimi explicatio* en 1614 à Edimbourg.



L'horloger et mécanicien suisse Jost Bürgi (1552 – 1632) publia sa table de logarithmes sous le titre *Aritmetische und Geometrische Progress Tabulen, sambt gründlichem unterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen und verstanden werden sol* en 1620 à Prague.

Chapitre 7

Équations différentielles : introduction

Terminologie

Une *équation différentielle* est une équation exprimant une relation entre une fonction et ses dérivées. Quand il s'agit d'une fonction de plusieurs variables et de ses dérivées partielles (voir le chapitre 10), on parle d'une *équation aux dérivées partielles*. Nous ne traitons ici que des équations différentielles *ordinaires*, où l'on a des fonctions d'une seule variable $x \mapsto y(x)$. L'*ordre* d'une telle équation différentielle est le plus grand ordre des dérivées qui y figurent :

$$\begin{aligned} y' = 3y + x^2 & \quad \text{premier ordre} \\ y' \sin(y'') + ay + y^5 = x & \quad \text{second ordre} \end{aligned}$$

avec¹ $y = y(x)$, $y' = y'(x)$ etc. Commençons par les équations différentielles de premier ordre. Une telle équation est appelée *explicite* si sa forme est $y' = F(x, y)$, *implicite* dans le cas contraire :

$$\begin{aligned} y' = F(x, y) & \quad \text{explicite} \\ G(x, y, y') = 0 & \quad \text{implicite} \end{aligned}$$

En général, il faut préciser le *domaine de définition* de l'équation, c'est-à-dire celui de la fonction F pour une équation explicite :

$$y' = F(x, y) \quad \text{pour } (x, y) \in D, \tag{7.1}$$

où D est un sous-ensemble du plan \mathbb{R}^2 , par exemple un rectangle ou tout le plan. Une *solution* de cette équation différentielle est une fonction différentiable $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle dans \mathbb{R} , telle que

1. le graphe de φ est contenu dans D , c'est-à-dire que $(x, \varphi(x)) \in D$ pour tout $x \in I$;
2. la fonction φ satisfait l'équation : $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$ pour tout $x \in I$.

¹Dans ce contexte, il est courant de désigner la fonction en question par y . Traditionnellement, on regardait y comme une «quantité variable» qui dépend d'une autre quantité x . Mais pour éviter toute confusion, il est souvent préférable d'utiliser un autre symbole, et d'écrire la première équation, par exemple, comme $\varphi' = 3\varphi + g$, où g est la fonction $g(x) = x^2$. Evidemment, d'autres désignations pour les variables sont possibles.

Interprétation géométrique

A une équation différentielle

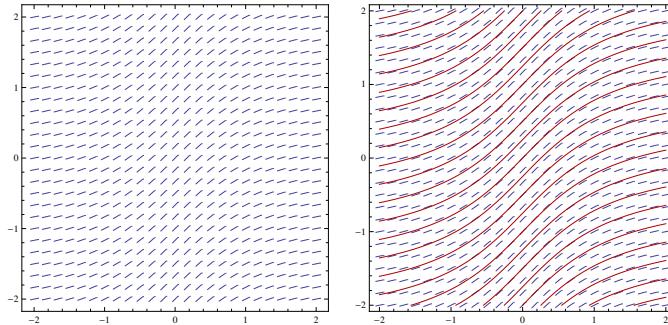
$$y' = F(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

on peut associer un *champ de directions* dans D : pour chaque point $(x, y) \in D$ on considère la droite passant par ce point et ayant la pente $F(x, y)$. Une solution est alors une fonction φ dont le graphe est une courbe dans D telle que ses tangentes font partie de cette famille de droites. Dans une représentation graphique, on symbolise quelques-unes de ces droites par des petits traits.

Exemples

$$1. \quad y' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pour } (x, y) \in D = \mathbb{R}^2.$$

Solutions : $y = \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

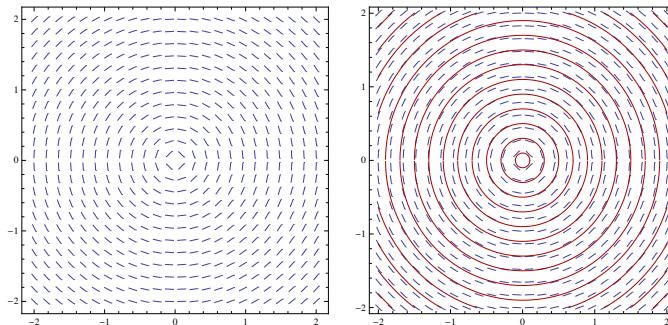


Champs de directions et quelques solutions

$$2. \quad y' = -\frac{x}{y} \quad \text{pour } (x, y) \in D \text{ avec } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}.$$

Solutions : $y = \pm \sqrt{C^2 - x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$.

Les solutions sont obtenues en utilisant la méthode de la séparation des variables expliquée ci-dessous. Pour un $C \in \mathbb{R}$ donné, la solution est définie pour $|x| \leq C$, c'est-à-dire sur l'intervalle $I =]-C, C[$. Son graphe est un demi-cercle.



Problèmes à valeur initiale

Souvent, on cherche une solution de l'équation (7.1) remplissant une certaine *condition initiale* $y(x_0) = y_0$, où le point $(x_0, y_0) \in D$ est donné. On parle alors

d'un *problème à valeur initiale* ou d'un *problème de Cauchy*. Ce problème se formule donc ainsi : trouver une fonction y , définie sur un intervalle I contenant x_0 , telle que

$$\begin{aligned} y'(x) &= F(x, y(x)) \quad \text{pour tout } x \in I, \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Géométriquement, on cherche une solution dont le graphe contient le point (x_0, y_0) . Dans les exemples 1 et 2 on voit que chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est situé sur une seule courbe. Il y a donc une seule solution de l'équation différentielle qui satisfasse à la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

On peut montrer que *tout problème à valeur initiale (7.2) possède une solution unique* définie sur un certain intervalle I , pourvu que F satisfasse à des hypothèses de régularité assez peu exigeantes. Il suffit par exemple de demander que F possède des dérivées partielles $\partial F / \partial x$ et $\partial F / \partial y$ qui soient des fonctions continues sur D (voir le chapitre 10 pour la notion de dérivée partielle).

Une autre condition suffisante, la *condition de Lipschitz*, est qu'il existe une constante c telle que

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq c|y_1 - y_2|$$

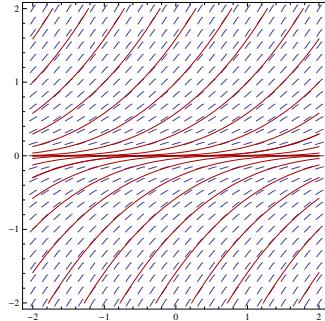
pour tout $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ (théorème de Picard–Lindelöf, également appelé théorème de Cauchy–Lipschitz). Mais voici un exemple d'un problème à valeur initiale dont la solution n'est pas unique :

$$\begin{aligned} y' &= |y|^{2/3} \\ y(0) &= 0. \end{aligned} \tag{7.3}$$

On vérifie que la fonction constante $y(x) = 0$ et la fonction $y(x) = x^3/27$ sont deux solutions différentes. En fait, il y a un nombre infini de solutions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: pour toutes constantes a, b avec $a \leq 0 \leq b$, la fonction

$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^3/27 & \text{si } x < a \\ 0 & \text{si } a \leq x \leq b \\ (x-b)^3/27 & \text{si } b < x \end{cases}$$

est une solution du problème (7.3).



Une méthode de résolution : la séparation des variables

On a déjà considéré au chapitre 5 l'exemple le plus simple d'une équation différentielle, une équation de la forme $y'(x) = f(x)$ dans laquelle on cherche

une primitive $y(x)$ d'une fonction $f(x)$ donnée. On trouve les solutions par « quadrature », c'est-à-dire par intégration :

$$y(x) = \int f(x) dx + C.$$

Ici nous traitons une classe plus large d'équations différentielles qui peuvent être également résolues par quadrature. La méthode s'applique aux équations $y' = F(x, y)$ dans lesquelles F est un produit d'une fonction $f(x)$ et une fonction de y que nous écrivons sous la forme $1/g(y)$ pour simplifier la notation dans ce qui suit.

Considérons donc une équation différentielle de la forme

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (7.4)$$

avec deux fonctions continues $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, où I et J sont des intervalles, et où la fonction g ne s'annule pas : $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in J$. On peut *séparer* les variables, c'est-à-dire écrire l'équation sous la forme équivalente

$$g(y) \cdot y' = f(x).$$

On prend l'intégrale des deux côtés de cette égalité :

$$\int g(y(x))y'(x) dx = \int f(x) dx + C,$$

et avec la substitution $u = y(x)$, $du = y'(x)dx$ on a

$$\int g(u) du = \int f(x) dx + C. \quad (7.5)$$

Soient F et G des primitives de f et g respectivement. Alors (7.5) s'écrit $G(u) = F(x) + C$, et comme $u = y(x)$, nous avons obtenus les solutions $y = y(x)$ sous la forme implicite

$$G(y) = F(x) + C. \quad (7.6)$$

Pour calculer $y(x)$, il reste à isoler y dans l'équation (7.6). Ce dernier pas est souvent difficile ou impossible. Mais même si on ne parvient pas à résoudre par rapport à y , l'équation (7.6) donne les graphes des solutions comme courbes dans le plan x, y , et on peut souvent se contenter de cette description implicite.

Pour décrire le passage de l'équation différentielle donnée à l'équation $G(y) = F(x) + C$, la notation de Leibniz est très pratique, car elle permet de résumer nos raisonnements comme suit.

Méthode de la séparation des variables : Pour résoudre l'équation différentielle

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

on procède en trois étapes :

1. *Séparer* les variables entre les deux membres, c'est-à-dire utiliser la relation $y' = \frac{dy}{dx}$ et écrire l'équation différentielle comme

$$g(y) dy = f(x) dx;$$

2. intégrer cette équation :

$$G(y) = \int g(y) dy = \int f(x) dx = F(x) + C;$$

3. résoudre l'équation $G(y) = F(x) + C$ par rapport à y , c'est-à-dire isoler y , ou trouver les courbes $\{(x, y) \in I \times J; G(y) - F(x) = C\}$.

Condition initiale. La solution $y = y(x)$ trouvée dépend encore d'une constante C . On peut choisir C de manière à satisfaire à une *condition initiale* $y(x_0) = y_0$. Mais pour cela il est souvent avantageux de prendre les primitives F et G de sorte que $G(y_0) = F(x_0) = 0$ (et donc $C = 0$), c'est-à-dire de remplacer les intégrales indéfinies du deuxième pas par les intégrales définies :

$$G(y) = \int_{y_0}^y g(s) ds = \int_{x_0}^x f(s) ds = F(x).$$

Exemples

3. $y' = \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons déjà vu les solutions au chapitre 6 : ce sont les fonctions $y = Ae^{\lambda x}$ avec $A \in \mathbb{R}$. Retrouvons-les par la méthode de la séparation des variables dans le cas où $y \neq 0$:

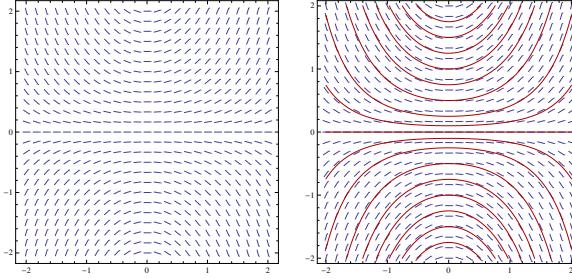
$$\begin{aligned} \text{séparation : } \frac{dy}{dx} &= \lambda y \rightarrow \frac{1}{y} dy = \lambda dx \\ \text{intégration : } \ln |y| &= \lambda x + C \\ \text{résolution : } |y| &= e^{\lambda x + C} = B e^{\lambda x} \\ &\text{avec une constante positive } B = e^C. \end{aligned}$$

L'égalité $|y(x)| = B e^{\lambda x}$ montre que la fonction y n'a pas de zéro et par conséquent ne change pas de signe sur \mathbb{R} . Ainsi on a soit $y(x) = B e^{\lambda x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ soit $y(x) = -B e^{\lambda x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En tout cas on peut écrire la solution sous la forme $y = A e^{\lambda x}$ avec une constante $A \in \mathbb{R}$.

4. $y' = xy$ pour $(x, y) \in D = \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \text{séparation : } \frac{dy}{dx} &= xy \rightarrow \frac{1}{y} dy = x dx \text{ pour } y \neq 0 \\ \text{intégration : } \ln |y| &= \frac{x^2}{2} + C \\ \text{résolution : } |y| &= B e^{x^2/2} \\ &\text{avec une constante positive } B = e^C. \end{aligned}$$

Comme dans l'exemple précédent, l'égalité $|y(x)| = B e^{x^2/2}$ montre que la fonction y n'a pas de zéro et par conséquent ne change pas de signe sur \mathbb{R} . Ainsi on a soit $y(x) = B e^{x^2/2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $y(x) = -B e^{x^2/2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En tout cas la solution s'écrit sous la forme $y = A e^{x^2/2}$ avec une constante $A \in \mathbb{R}$.



5. $y' = \frac{1}{y}$ pour $y > 0$, avec condition initiale $y(x_0) = y_0 > 0$.

$$\begin{aligned} \text{séparation : } \quad & \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \rightarrow y \, dy = dx \\ \text{intégration : } \quad & \frac{1}{2}(y^2 - y_0^2) = x - x_0 \\ \text{résolution : } \quad & y^2 = 2(x - x_0) + y_0^2 \\ & y = \sqrt{2(x - x_0) + y_0^2} \end{aligned}$$

Pour que $y(x_0) = y_0$, il faut prendre la racine *positive*, parce que $y_0 > 0$. La solution remplissant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ n'existe que pour $x > x_0 - \frac{1}{2}y_0^2$.

6. $\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2$.

Noter que dans cet exemple t est la variable indépendante, et on cherche des fonctions $x = x(t)$.

$$\begin{aligned} \text{séparation : } \quad & \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = dt \\ \text{intégration : } \quad & \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = t + C \\ & \text{Avec complétion du carré } x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \\ & \text{et substitution } x - 1 = u, \text{ on obtient} \\ & \arctan(x - 1) = t + C \\ \text{résolution : } \quad & x(t) = 1 + \tan(t + C) \\ & \text{avec } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vérifions que les fonctions trouvées satisfont à l'équation différentielle : de $x(t) = 1 + \tan(t + C)$ on obtient $x'(t) = \tan'(t + C) = 1 + \tan^2(t + C)$. D'autre part, $x^2 - 2x + 2 = (1 + \tan)^2 - 2(1 + \tan) + 2 = 1 + \tan^2(t + C)$.

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{y + \cos y}$.

Séparation des variables et intégration donnent le résultat

$$\frac{1}{2}y^2 + \sin y = -\cos x + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$. On ne peut pas résoudre par rapport à y , donc on n'obtient pas de formule explicite pour la solution $y = y(x)$.

Réduction au cas séparable

Dans certains cas, on peut ramener l'équation différentielle $y' = F(x, y)$ à une équation à variables séparables avec une substitution convenable. C'est le cas si la fonction F est *homogène*, c'est-à-dire si elle satisfait à l'identité

$$F(tx, ty) = F(x, y) \quad (7.7)$$

pour tout $t \neq 0$. Pour la fonction y cherchée, on fait l'ansatz

$$y(x) = x u(x). \quad (7.8)$$

La substitution dans $y' = F(x, y)$ donne la condition

$$u + xu' = F(x, xu) \quad (7.9)$$

pour la fonction u . Comme F est homogène, on a $F(x, xu) = F(1, u)$, et (7.9) équivaut à $u + xu' = F(1, u)$. Donc u satisfait l'équation

$$u' = \frac{1}{x}(F(1, u) - u).$$

On peut alors souvent déterminer u par la méthode de la séparation des variables. Enfin, $y(x) = xu(x)$ est une solution de $y' = F(x, y)$.

Exemples

$$8. \ y' = \frac{y+x}{x}$$

L'équation n'est pas séparable. Comme la fonction $F(x, y) = (y+x)/x$ est homogène, on utilise l'ansatz $y(x) = xu(x)$. L'équation différentielle devient alors

$$u + xu' = \frac{xu+x}{x},$$

c'est-à-dire $xu' = 1$. Séparation des variables et intégration conduisent à $u = \ln|x| + C$, et enfin

$$y(x) = x(\ln|x| + C)$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

9. On cherche la solution du problème à valeur initiale

$$y' = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}, \ y(1) = 2.$$

Notons que la domaine de définition de l'équation est $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$, c'est-à-dire le plan privé des axes x et y . Si $x \mapsto y(x)$ est une solution, alors les fonctions $x \mapsto -y(x)$ et $x \mapsto y(-x)$ sont des solutions. Il suffit donc de considérer les solutions dans le quadrant $x, y > 0$.

La fonction $F(x, y) = (x^2 + 2y^2)/xy$ est homogène. L'ansatz $y(x) = xu(x)$ donne l'équation

$$xu' = \frac{1+u^2}{u}.$$

La séparation des variables conduit à

$$\int \frac{u}{1+u^2} du = \int \frac{1}{x} dx + C_1. \quad (7.10)$$

On trouve l'intégrale du côté gauche de l'équation par la substitution $1+u^2 = v, 2u du = dv$:

$$\int \frac{u}{1+u^2} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{v} dv = \frac{1}{2} \ln|v| + C_2 = \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C_2.$$

L'équation (7.10) devient

$$\ln(1+u^2) = 2 \ln|x| + C = \ln(x^2) + C$$

avec $C = 2(C_1 - C_2)$ et donc $1+u^2 = Bx^2$ avec $B = e^C$. La résolution par rapport à u donne $u = \pm\sqrt{Bx^2 - 1}$, et les solutions dans le quadrant $x, y > 0$ sont

$$y(x) = x\sqrt{Bx^2 - 1}$$

avec une constante $B > 0$.

Reste à choisir B telle que la condition initiale $y(1) = 2$ soit satisfaite : pour $x = 1$,

$$2 = y(1) = 1\sqrt{B1^2 - 1} = \sqrt{B - 1}.$$

Il faut donc que $B = 5$, et la solution du problème à valeur initiale est la fonction

$$y(x) = x\sqrt{5x^2 - 1}.$$

Elle est définie sur l'intervalle $\left] \frac{1}{\sqrt{5}}, \infty \right[$.

Considérons un autre cas qui se laisse ramener à une équation séparable : ce sont les équations différentielles de la forme

$$y' = f(ax + by + c) \quad (7.11)$$

avec des constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Dans ce cas, on pose $u = ax + by + c$ ou, plus précisément,

$$u(x) = ax + by(x) + c,$$

c'est-à-dire que l'on fait l'ansatz $y(x) = (u(x) - ax - c)/b$ avec une fonction u à déterminer. Pour u on obtient $u' = a + by'$. Par conséquent, y est une solution de (7.11) si et seulement si u est une solution de l'équation séparable

$$u' = a + b f(u).$$

Exemple

$$10. \quad y' = (x + y)^2.$$

C'est une équation différentielle de la forme (7.11) avec $a = b = 1$ et $c = 0$. La fonction $u(x) = x + y(x)$ satisfait

$$u' = 1 + y' = 1 + (x + y)^2 = 1 + u^2,$$

donc on a l'équation différentielle

$$u' = 1 + u^2.$$

La séparation des variables donne

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \int dx + C.$$

Par suite, $\arctan u = x + C$ et $u = \tan(x + C)$. Pour la fonction $y = u - x$ on obtient finalement

$$y(x) = \tan(x + C) - x$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Application : l'équation logistique

Le modèle. Rappelons le modèle de croissance d'une population (par exemple de bactéries)

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t),$$

où $\dot{N} = dN/dt$. Nous avons vu que ce modèle décrit une *croissance exponentielle* :

$$N(t) = N_0 e^{\alpha t}.$$

Mais une telle croissance n'est pas très réaliste sur une longue période, car elle serait illimitée. C'est pourquoi le mathématicien belge Pierre François Verhulst proposa en 1838 l'*équation différentielle logistique* pour la description de certains processus de croissance :

$$\dot{N} = \alpha N - \beta N^2, \tag{7.12}$$

avec deux coefficients positifs α et β . Le coefficient α est le taux de croissance non freinée, tandis que le coefficient β tient compte de la «concurrence» entre les individus de la population : la croissance est freinée par le nombre de rencontres entre les individus, et celui-ci est à peu près proportionnel à N^2 .

Un autre raisonnement pour justifier la présence du terme $-\beta N^2$ est le suivant : l'espace vital et la nourriture de la population étant limités, il y a une taille maximale possible N_∞ , et on suppose que la vitesse de croissance $\dot{N}(t)$ est proportionnelle et à la taille actuelle $N(t)$ et à la «marge» disponible $N_\infty - N(t)$. Cela nous donne une équation différentielle de la forme

$$\dot{N} = \lambda N(N_\infty - N) : \tag{7.13}$$

nous retrouvons l'équation logistique avec $\alpha = \lambda N_\infty$ et $\beta = \lambda$.

Solution de l'équation. Ecrivons l'équation logistique sous la forme $\dot{N} = N(\alpha - \beta N)$, ce qui nous permet de trouver déjà les deux solutions *stationnaires*, c'est-à-dire constantes : $N \equiv 0$ et $N \equiv \alpha/\beta$. Afin de trouver les autres solutions, nous séparons les variables :

$$\frac{dN}{N(\alpha - \beta N)} = dt.$$

Pour l'intégration nous écrivons le premier membre comme

$$\frac{1}{N(\alpha - \beta N)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{N} + \frac{\beta}{\alpha - \beta N} \right).$$

(Une méthode pour trouver de tels décompositions est expliquée dans l'application suivante.) Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \frac{dN}{N(\alpha - \beta N)} &= \frac{1}{\alpha} \left(\int \frac{dN}{N} + \int \frac{\beta dN}{\alpha - \beta N} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\ln |N| - \ln |\alpha - \beta N| \right) = \frac{1}{\alpha} \ln \left| \frac{N}{\alpha - \beta N} \right|.\end{aligned}$$

Donc

$$\ln \left| \frac{N}{\alpha - \beta N} \right| = \alpha t + c,$$

et par conséquent

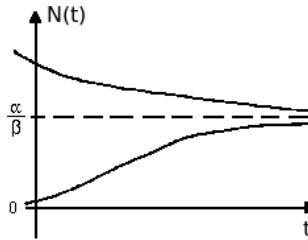
$$\frac{N(t)}{\alpha - \beta N(t)} = C e^{\alpha t} \quad (7.14)$$

avec $C = \pm e^c$. La résolution par rapport à $N(t)$ donne le résultat

$$N(t) = \frac{\alpha C e^{\alpha t}}{1 + \beta C e^{\alpha t}} \quad (7.15)$$

avec $C \in \mathbb{R}$. (Pour $C = 0$ c'est la solution constante $N \equiv 0$.) On peut exprimer la constante C à l'aide d'une valeur initiale $N(0) = N_0$: posant $t = 0$ dans (7.14) on obtient $C = N_0/(\alpha - \beta N_0)$, et la substitution de cette valeur dans (7.15) donne finalement la solution

$$N(t) = \frac{\alpha N_0 e^{\alpha t}}{\alpha + \beta N_0 (e^{\alpha t} - 1)}. \quad (7.16)$$



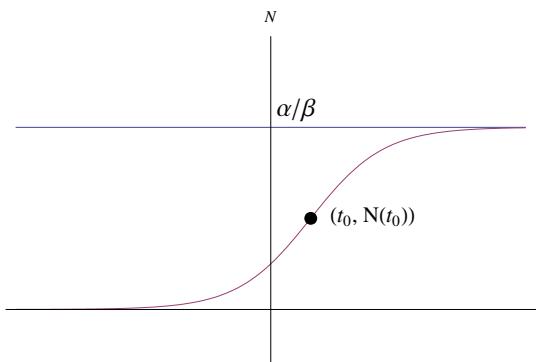
Solutions de l'équation logistique

Remarque : en voyant la solution (7.16), il est difficile de «comprendre» la signification des constantes α et β , tandis que dans l'équation différentielle $\dot{N} = \alpha N - \beta N^2$ leur rôle est clair. Cet exemple est typique : il est souvent plus facile de comprendre une loi naturelle si elle est exprimée par une équation différentielle que si l'on connaît seulement la solution explicite.

Discussion des solutions

- La formule a un sens pour $N_0 = 0$ et donne dans ce cas la solution triviale $N(t) \equiv 0$.
- Pour $N_0 = \alpha/\beta$, on obtient la solution constante $N(t) \equiv \alpha/\beta$, c'est-à-dire que la taille de la population reste constante : c'est une solution d'*équilibre*. Pour cette taille, les deux termes du côté droit de l'équation (7.12) se compensent, puisque $\alpha N = \alpha^2/\beta = \beta N^2$.

- Pour $0 < N_0 < \alpha/\beta$, la solution est strictement croissante, car $\dot{N} = \alpha N - \beta N^2 > 0$ pour $0 < N < \alpha/\beta$. De plus, $N_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \alpha/\beta$.
- Pour $N_0 > \alpha/\beta$, la solution est strictement décroissante vers $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \alpha/\beta = N_\infty$.
- Pour $0 < N < N_\infty$, la vitesse $\dot{N}(t)$ de croissance est maximale lorsque $N(t) = \alpha/(2\beta)$, c'est-à-dire au moment où la population atteint la moitié de sa taille asymptotique N_∞ .
- Considérons une solution $N(t)$ avec $0 < N < N_\infty$. Elle est alors définie sur \mathbb{R} , avec $\lim_{t \rightarrow -\infty} N(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N_\infty$. Soit t_0 le temps auquel \dot{N} est maximal, c'est-à-dire avec $N(t_0) = N_\infty/2$. Alors, le graphe de la fonction $N(t)$ est symétrique par rapport au point $(t_0, N(t_0))$.



Application : Réaction bimoléculaire

L'équation différentielle. Considérons une réaction chimique bimoléculaire $A + B \rightarrow X$ entre deux réactifs A, B dans une solution, dont le produit est la substance X . Au cours de la réaction, une molécule de A réagit avec une molécule de B pour former une molécule de la substance X . Soient $a(t)$, $b(t)$ et $x(t)$ les concentrations (molécules par volume) de A, B, X au temps t , avec les valeurs initiales données $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$ et $x(0) = 0$. Alors

$$a(t) + x(t) = a_0, \quad b(t) + x(t) = b_0.$$

On cherche la concentration $x(t)$ pour $t > 0$. Un raisonnement analogue à celui utilisé pour la loi de la décomposition radioactive conduit à

$$\dot{x}(t) = k a(t)b(t) \tag{7.17}$$

avec une constante $k > 0$. Il faut donc résoudre le problème à valeur initiale

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= k (a_0 - x(t))(b_0 - x(t)), \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Notons que l'équation différentielle est du même type que l'équation logistique (7.13). Supposons que $0 < a_0 < b_0$, c'est-à-dire qu'il y a un surplus de la substance B . La séparation des variables donne

$$\int \frac{1}{(a_0 - x)(b_0 - x)} dx = \int k dt. \tag{7.19}$$

Calcul de l'intégrale. Pour calculer le premier membre de (7.19), nous utilisons une méthode standard, la *décomposition en éléments simples* (en allemand : *Partialbruchzerlegung*) de la fonction rationnelle $\frac{1}{(x-a_0)(x-b_0)}$: on peut déterminer des constantes c_1 et c_2 telles que

$$\frac{1}{(x-a_0)(x-b_0)} = \frac{c_1}{x-a_0} + \frac{c_2}{x-b_0} \quad (7.20)$$

pour tout $x \neq a_0, b_0$. En fait, si l'on multiplie l'égalité (7.20) par $(x-a_0)(x-b_0)$, on obtient $1 = c_1(x-b_0) + c_2(x-a_0)$ ou

$$1 = (c_1 + c_2)x - c_1b_0 - c_2a_0.$$

Cette dernière condition est remplie pour tout $x \in \mathbb{R}$ (et donc (7.20) l'est pour tout $x \neq a_0, b_0$) si l'on choisit c_1 et c_2 tels qu'ils satisfassent au système linéaire

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_1b_0 - c_2a_0 &= 1 \end{aligned}$$

dont les solutions sont $c_1 = 1/(a_0 - b_0)$ et $c_2 = -1/(a_0 - b_0)$. En substituant ces valeurs dans (7.19), on a la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(x-a_0)(x-b_0)} = \frac{1}{a_0-b_0} \frac{1}{x-a_0} - \frac{1}{a_0-b_0} \frac{1}{x-b_0}.$$

Pour l'intégrale, on obtient alors

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-a_0)(x-b_0)} dx &= \frac{1}{a_0-b_0} \int \left(\frac{1}{x-a_0} - \frac{1}{x-b_0} \right) dx \\ &= \frac{1}{a_0-b_0} (\ln|x-a_0| - \ln|x-b_0|) \\ &= \frac{1}{a_0-b_0} \ln \left| \frac{x-a_0}{x-b_0} \right| \end{aligned}$$

Solution de l'équation différentielle. Retournons à l'équation (7.19) : nous avons maintenant

$$\frac{1}{a_0-b_0} \ln \left| \frac{x-a_0}{x-b_0} \right| = kt + C$$

et ainsi

$$\frac{x-a_0}{x-b_0} = B e^{k(a_0-b_0)t} \quad (7.21)$$

avec une constante $B = \pm e^{(a_0-b_0)C}$. La résolution de cette égalité par rapport à x (multiplier par $x-b_0$ et isoler x) nous donne les solutions

$$x(t) = \frac{a_0-b_0 B e^{k(a_0-b_0)t}}{1 - B e^{k(a_0-b_0)t}}$$

avec $B \in \mathbb{R}$. Finalement, la constante B est déterminée par la condition initiale $x(0) = 0$: posons $t = 0$ dans (7.21) ; alors $x(0) = 0$ implique que $B = a_0/b_0$. Avec cette valeur pour B , nous obtenons la solution de notre problème (7.18) :

$$x(t) = a_0 b_0 \frac{1 - e^{k(a_0-b_0)t}}{b_0 - a_0 e^{k(a_0-b_0)t}}. \quad (7.22)$$

Nous laissons l'étude détaillée de cette fonction comme exercice, mais notons que $\dot{x}(t) > 0$ et que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a_0$, car $a_0 - b_0 < 0$.

Méthodes numériques

Pour la plupart des équations différentielles aucune solution explicite (en termes de fonctions connues) ne peut être trouvée. Dans ce cas, on utilise des *méthodes numériques* pour calculer des solutions approchées. Là encore, il n'y a pas de méthode miracle, mais il faut bien choisir la méthode appropriée pour traiter une équation différentielle donnée, ce qui est l'affaire du spécialiste.

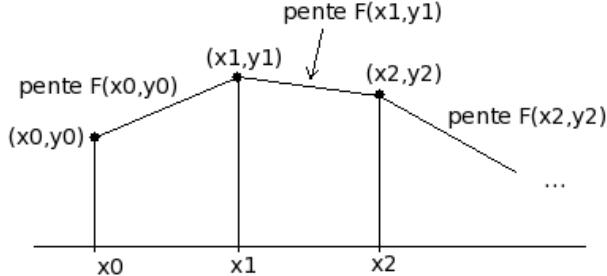
Nous présentons ici la méthode numérique la plus élémentaire, dite *méthode du polygone d'Euler*.

L'idée est très simple, car liée à la représentation géométrique d'une équation différentielle par son champ de directions. Au lieu de chercher une solution exacte φ du problème

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \text{ avec } (x, y) \in D \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

nous construisons une fonction ψ linéaire par morceaux, c'est-à-dire une fonction dont le graphe est un *polygone*, de sorte que chaque segment de droite ait la pente prescrite par l'équation différentielle en son extrémité gauche.

Plus précisément, afin d'obtenir une valeur approximative en $x > x_0$ d'une solution φ , considérons des points $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = x$, et la fonction ψ définie comme suit sur l'intervalle $[x_0, x]$:



$$\begin{aligned} \psi(t) &:= y_0 + F(x_0, y_0)(t - x_0) \quad \text{pour } x_0 \leq t \leq x_1 \\ y_1 &:= \psi(x_1) = y_0 + F(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \\ \psi(t) &:= y_1 + F(x_1, y_1)(t - x_1) \quad \text{pour } x_1 \leq t \leq x_2 \\ y_2 &:= \psi(x_2) = y_1 + F(x_1, y_1)(x_2 - x_1) \\ &\vdots \\ \psi(t) &:= y_{n-1} + F(x_{n-1}, y_{n-1})(t - x_{n-1}) \quad \text{pour } x_{n-1} \leq t \leq x \\ y_n &:= \psi(x_n) = y_{n-1} + F(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Enfin la valeur y_n est prise comme valeur approximative en $x_n = x$ d'une solution φ :

$$\varphi(x) \approx y_n$$

On procède d'une manière analogue pour $x < x_0$.

Exemple. Considérons le problème à valeur initiale $y' = y$, $y(0) = 1$ et fixons $x > 0$. Nous décomposons l'intervalle $[0, x]$ en n parties de longueur x/n , c'est-à-dire que nous posons

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{x}{n}, \quad \dots, \quad x_k = \frac{kx}{n}, \quad \dots, \quad x_n = x.$$

La méthode d'Euler donne les valeurs suivantes y_k pour $k = 0, \dots, n$:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \text{ (condition initiale)} \\ y_1 &= y_0 + y_0 \frac{x}{n} = 1 + \frac{x}{n} \\ y_2 &= y_1 + y_1 \frac{x}{n} = y_1 \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + y_{n-1} \frac{x}{n} = y_{n-1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

En passant à des subdivisions toujours plus fines de l'intervalle $[0, x]$, c'est-à-dire pour $n \rightarrow \infty$, nous trouvons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

la solution exacte du problème.

Chapitre 8

Équations différentielles linéaires

8.1. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Soit I un intervalle dans \mathbb{R} , et soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue* donnée. Nous considérons l'équation différentielle

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0, \quad (8.1)$$

ou encore, avec une deuxième fonction continue donnée $g : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$y'(x) + a(x)y(x) = g(x). \quad (8.2)$$

On appelle (8.1) une *équation différentielle linéaire homogène*, et (8.2) une *équation différentielle linéaire inhomogène*.

Résolution de l'équation homogène. Traitons d'abord l'équation homogène (8.1) par séparation des variables. Supposons que nous ayons une solution $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\varphi(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. L'équation (8.1) est alors équivalente à

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -a(x).$$

En intégrant de $x_0 \in I$ à x et utilisant le théorème fondamental, on obtient

$$\ln |\varphi(x)| = - \int_{x_0}^x a(t) dt + C$$

avec $x_0 \in I$ et $C = \ln |\varphi(x_0)| \in \mathbb{R}$, ou

$$|\varphi(x)| = e^C e^{- \int_{x_0}^x a(t) dt}$$

et finalement

$$\varphi(x) = c e^{- \int_{x_0}^x a(t) dt} \quad (8.3)$$

avec une constante $c = \pm e^C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En admettant aussi $c = 0$, on obtient encore une solution, la *solution triviale* $\varphi \equiv 0$. Posant $x = x_0$ on voit que $c = \varphi(x_0)$.

Vérifions que nous avons trouvé *toutes* les solutions. Soit $x_0 \in I$, et soit φ_0 la solution

$$\varphi_0(x) = e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt}.$$

Soit φ une solution quelconque de (8.1). Alors, la fonction φ/φ_0 satisfait

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)' = \frac{\varphi'\varphi_0 - \varphi'_0\varphi}{\varphi_0^2} = \frac{(-a\varphi)\varphi_0 + (a\varphi_0)\varphi}{\varphi_0^2} \equiv 0.$$

La fonction φ/φ_0 est donc constante, c'est-à-dire que

$$\varphi(x) = d\varphi_0(x) = d e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Donc toute solution est de la forme (8.3) avec une constante $c \in \mathbb{R}$.

Résolution de l'équation inhomogène. Soit $\varphi_1(x)$ une solution non-triviale de l'équation *homogène*. Alors, comme nous venons de le voir, la solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$\varphi = c\varphi_1 \tag{8.4}$$

avec une constante $c \in \mathbb{R}$. La méthode de la «*variation de la constante*», permet de trouver une solution $\psi(x)$ de l'équation *inhomogène* (8.2) : on remplace la constante c dans la formule (8.4) par une *fonction* $\gamma(x)$. On fait donc l'ansatz

$$\psi(x) = \gamma(x)\varphi_1(x),$$

d'où

$$\psi' + a\psi = \gamma'\varphi_1 + \underbrace{\gamma\varphi'_1 + \gamma a\varphi_1}_{=0}.$$

Donc la fonction ψ vérifie l'équation $\psi' + a\psi = g$ si et seulement si $\gamma'\varphi_1 = g$, c'est-à-dire

$$\gamma' = \frac{g}{\varphi_1}.$$

On trouve alors γ par intégration :

$$\gamma(x) = c_0 + \int_{x_0}^x \frac{g(t)}{\varphi_1(t)} dt$$

où $c_0 \in \mathbb{R}$. Avec ce $\gamma(x)$ (et un choix arbitraire de la constante c_0) nous obtenons une solution

$$\psi_1(x) := \gamma(x)\varphi_1(x) \tag{8.5}$$

de l'équation inhomogène (8.2). La proposition suivante nous donne alors *toutes* les solutions.

Proposition 1. Fixons une solution ψ_1 de l'équation inhomogène (8.2). Alors on obtient la solution générale de (8.2) sous la forme

$$\psi = \psi_1 + \varphi, \tag{8.6}$$

où φ est la solution générale de l'équation homogène (8.1).

Donc la solution générale de l'équation inhomogène (8.2) est

$$\psi = \psi_1 + c\varphi_1 \tag{8.7}$$

avec une constante $c \in \mathbb{R}$.

Preuve de la proposition. On vérifie que, pour toute solution φ de l'équation homogène, la fonction $\psi = \psi_1 + \varphi$ est une solution de l'équation inhomogène. Inversément, pour toute solution ψ de l'équation inhomogène, la fonction φ définie par $\varphi := \psi - \psi_1$ est une solution de l'équation homogène :

$$\begin{aligned}\varphi' + a\varphi &= \psi' - \psi'_1 + a(\psi - \psi_1) \\ &= (\psi' + a\psi) - (\psi'_1 + a\psi_1) \\ &= g - g = 0\end{aligned}$$

Donc ψ s'écrit sous la forme $\psi = \psi_1 + \varphi$ avec une solution φ de l'équation homogène. Remarquons que la proposition est un cas particulier de la proposition 2 plus bas.

Exemples

1. $y' + xy = x$

Équation homogène : $y' + xy = 0$;

solution générale de l'équation homogène selon (8.3) :

$$y = c e^{-\int_0^x t dt} = c e^{-x^2/2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

solution particulière de l'équation inhomogène : $y \equiv 1$ (devinée)

solution générale de l'équation inhomogène :

$$y = 1 + c e^{-x^2/2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. $y' + \frac{y}{x} = e^{2x}, \quad x > 0$

Solution générale de l'équation homogène :

$$\varphi(x) = c e^{-\ln x} = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R};$$

variation de la constante :

$$\text{ansatz : } \psi(x) = \frac{\gamma(x)}{x}$$

substituer l'ansatz dans l'équation inhomogène :

$$\begin{aligned}\psi' + \frac{\psi}{x} &= \frac{\gamma' x - \gamma}{x^2} + \frac{\gamma}{x^2} = \frac{\gamma'}{x} \stackrel{!}{=} e^{2x} \\ \gamma' &= x e^{2x}\end{aligned}$$

intégration :

$$\gamma(x) = \int_0^x t e^{2t} dt + C_0 = \dots = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) e^{2x} + C_1$$

une solution particulière de l'équation inhomogène :

$$\psi_1(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) \frac{e^{2x}}{x}.$$

Solution générale de l'équation inhomogène :

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

8.2. Equations différentielles linéaires d'ordre n

Une *équation différentielle linéaire d'ordre n* est une équation de la forme

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x)$$

ou, de manière plus concise,

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = g \quad (8.8)$$

avec des fonctions continues données $a_{n-1}, \dots, a_0, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Les fonctions a_{n-1}, \dots, a_0 sont appelées *coefficients* de l'équation. Celle-ci est dite *homogène* quand $g \equiv 0$, c'est-à-dire

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0. \quad (8.9)$$

Dans le cas $n = 1$ on retrouve les équations (8.1) et (8.2).

Afin de mieux comprendre la structure de (8.8) et (8.9), considérons les ensembles de fonctions

$$\mathcal{C}^0(I) := \{\psi : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \psi \text{ continue}\}$$

$$\mathcal{C}^n(I) := \{\varphi : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ } n\text{-fois continûment différentiable}\}$$

et l'application (un « *opérateur différentiel* ») $L : \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}^0(I)$ définie par

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0. \quad (8.10)$$

Avec cette notation, les équations (8.8) et (8.9) s'écrivent simplement

$$L(y) = g, \quad (8.8a)$$

$$L(y) = 0. \quad (8.9a)$$

On vérifie facilement que L est une application \mathbb{R} -linéaire, c'est-à-dire

$$L(\varphi_1 + \varphi_2) = L(\varphi_1) + L(\varphi_2)$$

$$L(c\varphi) = cL(\varphi).$$

pour tout $c \in \mathbb{R}$ et $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^n(I)$. Les équations différentielles (8.8) et (8.9) sont donc des *équations linéaires* dans le sens de l'algèbre linéaire.

Solutions de l'équation homogène

Soit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble de toutes les solutions $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation homogène (8.9), c'est-à-dire

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in \mathcal{C}^n(I) \mid L(\varphi) = 0\}.$$

Alors \mathcal{S} est un *sous-espace linéaire* de $\mathcal{C}^n(I)$, c'est-à-dire si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$ et $c \in \mathbb{R}$, alors $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathcal{S}$ et $c\varphi_1 \in \mathcal{S}$.

Supposons en effet que $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$, donc que φ_1 et φ_2 soient des fonctions n -fois continûment différentiables avec $L(\varphi_1) = 0$ et $L(\varphi_2) = 0$. Alors $\varphi_1 + \varphi_2$ est n -fois continûment différentiable, et, puisque L est une application linéaire,

$$L(\varphi_1 + \varphi_2) = L(\varphi_1) + L(\varphi_2) = 0 + 0 = 0.$$

Ainsi $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathcal{S}$. Par un argument similaire, $c\varphi_1 \in \mathcal{S}$.

Par conséquent, l'équation homogène satisfait un *principe de superposition* : toute *combinaison linéaire*

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_k\varphi_k$$

de solutions (avec des coefficients constants $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$) est encore une solution. Afin de donner une description générale de l'ensemble \mathcal{S} des solutions, introduisons une autre notion de l'algèbre linéaire.

Definition. Un ensemble $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ de fonctions $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dit *linéairement dépendant* (sur l'intervalle I) si l'on peut écrire la fonction constante 0 comme une combinaison linéaire non-triviale des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, c'est-à-dire s'il existe des constantes $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ qui ne sont pas toutes nulles avec¹

$$c_1\varphi_1 + \dots + c_k\varphi_k = 0.$$

Sinon on l'appelle *linéairement indépendant*. Autrement dit : $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ est linéairement indépendant si la relation

$$c_1\varphi_1(x) + \dots + c_k\varphi_k(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

avec des constantes c_1, \dots, c_k entraîne que $c_1 = \dots = c_k = 0$.

Exemples

3. L'ensemble de fonctions $\{x, e^x, 2x\}$ est linéairement dépendant sur tout intervalle I , puisque

$$1 \cdot x + 0 \cdot e^x + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2x = 0,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. (Ici $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ et $c_3 = -1/2$.)

4. Par contre, le sous-ensemble $\{x, e^x\}$ est linéairement indépendant sur tout intervalle I non dégénéré, c'est-à-dire qui contient au moins deux points différents. Supposons en effet une relation

$$c_1x + c_2 e^x = 0 \quad \forall x \in I$$

avec des constantes c_1 et c_2 . Il faut déduire que $c_1 = c_2 = 0$. En prenant la dérivée seconde de la relation par rapport à x on arrive à $c_2 e^x = 0$, d'où $c_2 = 0$. Donc $c_1x = 0$ pour tout $x \in I$ et ainsi $c_1 = 0$.

Il existe un critère, facile à vérifier quand k est petit, pour l'indépendance linéaire d'un ensemble de fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ qui sont $(n-1)$ -fois dérivables sur I .

Definition. Le *déterminant de Wronski* (le «Wronskien») $W(x)$ des k fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ est le déterminant

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_k(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \dots & \varphi'_k(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(k-1)}(x) & \varphi_2^{(k-1)}(x) & \dots & \varphi_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

¹C'est une égalité entre *fonctions*, i.e. $c_1\varphi_1(x) + \dots + c_k\varphi_k(x) = 0$ pour *tout* $x \in I$.

Nous renvoyons à la littérature pour la définition générale d'un déterminant, mais rappelons que pour $k = 2$,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Donc le Wronskien de *deux* fonctions φ_1, φ_2 est donné par

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) \end{vmatrix} = \varphi_1(x)\varphi'_2(x) - \varphi_2(x)\varphi'_1(x).$$

Critère de Wronski. *S'il existe un $x \in I$ tel que $W(x) \neq 0$, alors $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sont linéairement indépendants.*

Exemple

5. Considérons de nouveau les fonctions $\varphi_1(x) = x$ et $\varphi_2(x) = e^x$ sur un intervalle non dégénéré. Le Wronskien est

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = x e^x - e^x = (x - 1)e^x.$$

On a $W(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 1$. Par le critère, les fonctions x et e^x sont linéairement indépendantes sur I .

Retournons à l'équation homogène (8.9).

Théorème. (i) *L'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients continus*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (8.9)$$

possède n solutions indépendantes sur I . Un tel ensemble de n solutions indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ s'appelle un système fondamental de solutions.

(ii) *Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ est un système fondamental de solutions, alors toute solution de (8.9) est une combinaison linéaire*

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n$$

avec des coefficients constants $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, si l'on dispose d'un système fondamental, la solution générale de (8.9) est donnée par

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n \quad (8.11)$$

avec des constantes arbitraires $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Le théorème garantit l'existence d'un système fondamental. En général il n'est pas possible de donner un système fondamental explicite pour une équation donnée. Ceci est cependant possible lorsque les coefficients a_j sont des constantes. Nous retournerons plus tard à cette question. Remarquons que, dans la terminologie de l'algèbre linéaire, un système fondamental est une *base* de l'espace vectoriel \mathcal{S} de solutions. Donc \mathcal{S} est un espace vectoriel de dimension n .

Solutions de l'équation inhomogène

Considérons maintenant l'équation inhomogène $L(y) = g$, c'est-à-dire

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = g. \quad (8.8)$$

Proposition 2. Fixons une solution ψ_1 de l'équation inhomogène $L(y) = g$. Alors on obtient la solution générale de cette équation par

$$\psi = \psi_1 + \varphi,$$

où φ est la solution générale (donnée par (8.11)) de l'équation homogène $L(y) = 0$.

En termes des ensembles de solutions, on peut exprimer ce résultat comme suit. Rappelons que \mathcal{S} dénote l'ensemble de toutes les solutions de l'équation homogène. Soit maintenant

$$\mathcal{S}_g := \{\varphi \in \mathcal{C}^n(I) \mid L(\varphi) = g\}$$

l'ensemble des solutions $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation inhomogène. Soit $\psi_1 \in \mathcal{S}_g$ un élément arbitraire. Alors

$$\mathcal{S}_g = \psi_1 + \mathcal{S} := \{\psi_1 + \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S}\}.$$

Pour la *preuve* de la proposition 2, montrons que $\mathcal{S}_g \subseteq \psi_1 + \mathcal{S}$ et que, inversément, $\psi_1 + \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_g$. Si $\psi \in \mathcal{S}_g$, alors la fonction $\varphi := \psi - \psi_1$ satisfait à $L(\varphi) = L(\psi - \psi_1) = g - g = 0$. Donc $\varphi \in \mathcal{S}$, et $\psi = \psi_1 + \varphi \in \psi_1 + \mathcal{S}$. Inversément, si $\psi \in \psi_1 + \mathcal{S}$, alors il existe $\varphi \in \mathcal{S}$ tel que $\psi = \psi_1 + \varphi$. Par conséquent

$$L(\psi) = L(\psi_1 + \varphi) = L(\psi_1) + L(\varphi) = g + 0 = g,$$

et donc $\psi \in \mathcal{S}_g$.

Suivant la proposition 2, la **procédure** pour trouver la solution générale de l'équation inhomogène (8.8) est la suivante :

1. Trouver un système fondamental $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de l'équation homogène.
2. Trouver une solution ψ_1 de l'équation inhomogène.
3. La solution générale de l'équation inhomogène est alors

$$\psi = \psi_1 + c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n \quad (8.12)$$

pour des constantes arbitraires $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Quand on connaît la solution générale, on peut choisir les n constantes c_1, \dots, c_n afin de remplir des conditions auxiliaires, par exemple n conditions initiales $\psi(x_0) = y_0, \psi'(x_0) = y_1, \dots, \psi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ avec x_0, y_0, \dots, y_{n-1} donnés.

Méthode de variation des constantes

Pour réaliser la deuxième étape de la procédure ci-dessus, il faut déterminer une solution ψ_1 de l'équation inhomogène $L(y) = g$. A cette fin, il existe des méthodes directes quand les coefficients a_j sont constants et pour certains types de fonctions g , utilisant un ansatz convenable. Dans quelques cas très simples, on peut même deviner une solution.

Par contre, la *méthode variation des constantes* est une méthode générale pour trouver une solution ψ_1 , mais à condition qu'on dispose déjà d'un système fondamental $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de l'équation homogène. Considérons le cas $n=2$ pour simplifier la notation. L'équation $L(y) = g$ est alors de la forme

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x). \quad (8.13)$$

Supposons que φ_1, φ_2 soit un système fondamental, donc en particulier que

$$\begin{aligned} \varphi_1'' + a_1\varphi_1' + a_0\varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2'' + a_1\varphi_2' + a_0\varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (8.14)$$

La solution générale de l'équation *homogène* est alors

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$$

avec des constantes c_1 et c_2 . Pour trouver une solution de l'équation *inhomogène*, considérons maintenant l'ansatz

$$y(x) = \gamma_1(x)\varphi_1(x) + \gamma_2(x)\varphi_2(x) \quad (8.15)$$

avec des *fonctions* $\gamma_1(x)$ et $\gamma_2(x)$ à déterminer. En le substituant dans l'équation différentielle (8.13) et à l'aide de (8.14) on obtient la condition

$$\gamma_1''\varphi_1 + \gamma_2''\varphi_2 + 2\gamma_1'\varphi_1' + 2\gamma_2'\varphi_2' + a_1\gamma_1'\varphi_1 + a_1\gamma_2'\varphi_2 = g$$

pour les fonctions γ_1 et γ_2 . On peut réarranger cette équation sous la forme

$$(\varphi_1\gamma_1' + \varphi_2\gamma_2')' + (\varphi_1'\gamma_1' + \varphi_2'\gamma_2') + a_1 \cdot (\varphi_1\gamma_1' + \varphi_2\gamma_2') = g.$$

Cette dernière équation est certainement satisfaite si l'on trouve des fonctions γ_1 et γ_2 telles que

$$\begin{aligned} \varphi_1\gamma_1' + \varphi_2\gamma_2' &= 0 \\ \varphi_1'\gamma_1' + \varphi_2'\gamma_2' &= g, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \varphi_1(x)\gamma_1'(x) + \varphi_2(x)\gamma_2'(x) &= 0 \\ \varphi_1'(x)\gamma_1'(x) + \varphi_2'(x)\gamma_2'(x) &= g(x). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Notons que, pour tout $x \in I$ fixé, le système (8.16) est un système linéaire pour les inconnues $\gamma_1'(x)$ et $\gamma_2'(x)$ avec des coefficients connus $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$. Et si l'on connaît leurs dérivées γ_1' , γ_2' , les fonctions γ_1 et γ_2 s'en déduisent par intégration. La méthode de variation des constantes procède donc comme suit :

1. Partir d'un système fondamental donné φ_1, φ_2 de l'équation homogène.
2. Résoudre (8.16) afin d'obtenir les dérivées γ_1', γ_2' des fonctions cherchées.
3. Calculer des fonctions primitives de γ_1' et γ_2' par intégration afin d'obtenir γ_1 et γ_2 .
4. Alors la fonction $\psi_1(x) := \gamma_1(x)\varphi_1(x) + \gamma_2(x)\varphi_2(x)$ est une solution de l'équation inhomogène.

Le raisonnement et la méthode se généralisent aux cas $n \geq 3$: on obtient une solution de la forme

$$\psi_1(x) = \gamma_1(x)\varphi_1(x) + \dots + \gamma_n(x)\varphi_n(x).$$

Le système (8.16) est alors un système de n équations linéaires pour les n inconnues $\gamma'_1(x), \dots, \gamma'_n(x)$.

Exemples

6. Considérons l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (8.17)$$

sur l'intervalle $I =]0, \infty[$. On en cherche la solution générale.

Notons que (8.17) est une équation différentielle linéaire inhomogène d'ordre $n = 2$ à coefficients continus (en fait constants). On vérifie que les fonctions $\varphi_1(x) = e^x$ et $\varphi_2(x) = xe^x$ sont des solutions de l'équation homogène correspondante

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

(On verra plus tard comment arriver à ces solutions.) A l'aide du critère de Wronski on confirme facilement que φ_1, φ_2 sont linéairement indépendantes. Donc ils forment un système fondamental de l'équation homogène.

Appliquons la méthode de variation des constantes pour trouver une solution ψ_1 de l'équation inhomogène. Dans le cas présent, le système linéaire (8.16) devient

$$\begin{aligned} e^x\gamma'_1(x) + x e^x\gamma'_2(x) &= 0 \\ e^x\gamma'_1(x) + (e^x + xe^x)\gamma'_2(x) &= \frac{e^x}{x}. \end{aligned}$$

La résolution de ce système par rapport à $\gamma'_1(x)$ et $\gamma'_2(x)$ fournit

$$\gamma'_1(x) = -1 \quad \gamma'_2(x) = \frac{1}{x}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= \int (-1) dx + C_1 = -x + C_1 \\ \gamma_2(x) &= \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C_2 = \ln x + C_2 \end{aligned}$$

car $x > 0$ sur l'intervalle I . On peut choisir les constantes d'intégration $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$ parce qu'on n'a besoin que d'une seule solution ψ_1 de l'équation inhomogène. Ainsi

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \gamma_1(x)\varphi_1(x) + \gamma_2(x)\varphi_2(x) \\ &= -x e^x + x e^x \ln x, \end{aligned}$$

et la solution générale de l'équation différentielle (8.17) est

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_1(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) \\ &= -x e^x + x e^x \ln x + c_1 e^x + c_2 x e^x \\ &= x e^x \ln x + c_1 e^x + c_3 x e^x \end{aligned}$$

$(c_3 = c_2 - 1)$ avec des constantes arbitraires $c_1, c_3 \in \mathbb{R}$.

7. Pour l'équation (8.17) de l'exemple précédent, on cherche la solution ψ qui satisfasse aux conditions initiales $\psi(1)=3$ et $\psi'(1)=-1$.

On substitue la solution générale

$$\psi(x) = x e^x \ln x + c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

dans le système de deux équations

$$\begin{aligned}\psi(1) &= 3 \\ \psi'(1) &= -1,\end{aligned}$$

ce qui donne deux équations pour les deux constantes c_1, c_2 inconnues

$$\begin{aligned}c_1 e + c_2 e &= 3 \\ c_1 e + 2 c_2 e &= -1 - e.\end{aligned}$$

En soustrayant la deuxième équation de la première, on a $-c_2 e = 4 + e$ d'où $c_2 = -\frac{4}{e} - 1$ et $c_1 = \frac{3 - c_2 e}{e} = \frac{7}{e} + 1$. La solution cherchée est donc

$$\psi(x) = x e^x \ln x + \left(\frac{7}{e} + 1\right) e^x - \left(\frac{4}{e} + 1\right) x e^x.$$

8.3. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Il s'agit d'équations différentielles de la forme

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

avec des *constantes* $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ ou, dans une autre notation (que nous utilisons pour le reste du chapitre),

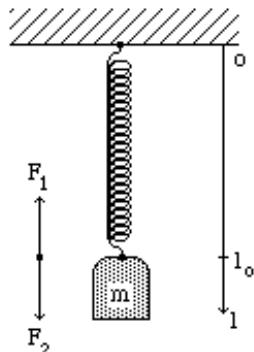
$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = f(t) \quad (8.18)$$

avec $b, c \in \mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I . Nous utilisons la lettre t pour désigner la variable indépendante, car elle représente souvent le temps. Voici plusieurs variantes d'un exemple physique :

Exemples

8. Une masse m est suspendue à un ressort de longueur ℓ_0 qui suit la loi de Hooke.

Forces :



$$F_1 = k \cdot (\ell - \ell_0), \quad F_2 = g \cdot m.$$

La force totale est donc

$$F = g \cdot m - k \cdot (\ell - \ell_0)$$

et, selon la loi de Newton $m\ddot{\ell} = F$, on a :

$$\ddot{\ell} + \frac{k}{m}\ell = g + \frac{k}{m}\ell_0.$$

9. En ajoutant un *amortissement* par une force proportionnelle à la vitesse, par exemple un frottement, on obtient l'équation plus générale

$$\ddot{\ell} + a\dot{\ell} + \frac{k}{m}\ell = g + \frac{k}{m}\ell_0$$

avec $a > 0$.

10. Supposons que le point de suspension du ressort soit en mouvement vertical oscillatoire. On a donc pour la hauteur de ce point (relative à la position neutre)

$$h(t) = h_0 \sin(\omega t),$$

et, si $x(t)$ est la position de la masse au temps t , la longueur du ressort est

$$\ell(t) = x(t) + h(t).$$

L'équation du mouvement est maintenant

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{k}{m}\ell_0 - \frac{k}{m}h_0 \sin(\omega t).$$

Polynôme caractéristique

Pour trouver les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0 \quad (8.19)$$

avec $b, c \in \mathbb{R}$, nous essayons des fonctions de la forme $x(t) = e^{\lambda t}$. En substituant cet ansatz dans (8.19), on obtient

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0$$

et donc, comme $e^{\lambda t} \neq 0$ pour tout t ,

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (8.20)$$

Définition. Le polynôme

$$\chi(\lambda) := \lambda^2 + b\lambda + c \quad (8.21)$$

s'appelle le *polynôme caractéristique* de l'équation différentielle linéaire homogène (8.19).

Il en résulte que la fonction $x(t) = e^{\lambda t}$ est une solution de l'équation différentielle (8.19) si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique. Mais est-ce qu'on trouve ainsi deux solutions linéairement indépendantes, c'est-à-dire un système fondamental ?

Rappelons d'abord la formule de résolution de l'équation quadratique

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

avec $b, c \in \mathbb{R}$. Les solutions de cette équation sont

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2},$$

où

$$\Delta := b^2 - 4c$$

est le *discriminant* de l'équation. Il faut distinguer trois cas :

1. lorsque $\Delta > 0$, on a deux solutions réelles distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
2. lorsque $\Delta = 0$, on a une solution réelle «double» $\lambda_1 = \lambda_2$;
3. lorsque $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution réelle.

Dans le cas où $\Delta < 0$, il y a deux solutions *complexes* (voir le chapitre 9 pour la justification)

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $i := \sqrt{-1}$. En effet,

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{-1 \cdot |\Delta|}}{2} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{-1} \sqrt{|\Delta|}}{2} \\ &= -\frac{b}{2} \pm i \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}\end{aligned}$$

et donc $\alpha = -b/2$ et $\beta = \sqrt{|\Delta|}/2$. Comme dans les deux premiers cas, on a $\lambda_1 + \lambda_2 = -b$ et $\lambda_1 \lambda_2 = c$. Retournons maintenant à l'équation différentielle (8.19).

Système fondamental

Considérons d'abord le cas $\Delta > 0$. Le polynôme caractéristique $\chi(\lambda)$ possède deux racines réelles distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Nous avons donc les deux solutions $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$, dont le Wronskien en $t = 0$ est égal à

$$\begin{vmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) & \dot{x}_2(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0.$$

Les deux solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ forment donc un système fondamental.

Dans le cas $\Delta = 0$, le polynôme caractéristique possède l'unique racine $\lambda_1 = \lambda_2$. L'ansatz nous donne une seule solution $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$. Mais on vérifie que, dans ce cas, la fonction $x_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ est une deuxième solution.

En fait, avec $\Delta = 0$ les formules pour $\lambda_{1,2}$ donnent $b = -2\lambda_1$ et $c = \lambda_1^2$. Par conséquent, l'équation (8.20) s'écrit

$$\ddot{x} - 2\lambda_1 \dot{x} + \lambda_1^2 x = 0$$

et un calcul direct montre que la fonction $x(t) = te^{\lambda_1 t}$ en est une solution.

Calculons le Wronskien des fonctions $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ et $x_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ en $t = 0$:

$$\begin{vmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) & \dot{x}_2(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Les deux solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ forment donc un système fondamental.

Dans le cas $\Delta < 0$, le polynôme caractéristique $\chi(\lambda)$ possède deux racines complexes distinctes $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Ce cas est mieux traité en

utilisant la fonction exponentielle complexe introduite au chapitre 9. On trouve que les fonctions

$$x_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad x_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

forment un système fondamental. Résumons les résultats :

Théorème. Soient λ_1, λ_2 les racines du polynôme caractéristique

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$$

de l'équation différentielle linéaire homogène

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0$$

aux coefficients $b, c \in \mathbb{R}$ constants. On trouve alors un système fondamental de solutions comme suit :

- 1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ réels : $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$
- 2. $\lambda_1 = \lambda_2$ réel : $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = te^{\lambda_1 t}$
- 3. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ non réels ($\beta \neq 0$) : $x_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t, x_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$.

Remarquons qu'un théorème plus général donne un système fondamental pour les équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants d'ordre arbitraire n . Comme dans le cas $n=2$ considéré ici, on arrive au polynôme caractéristique $\chi(\lambda)$ en substituant l'ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ dans l'équation. Le degré du polynôme $\chi(\lambda)$ est alors égal à n , et la forme du système fondamental dépend des zéros $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Nous nous limitons cependant au cas le plus simple et important $n=2$.

Exemples de la physique

Leur équation homogène était de la forme $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ avec $b \geq 0$ et $c > 0$. En posant $\delta := b/2$ et $\omega_0 := \sqrt{c}$, nous pouvons écrire

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

et les racines du polynôme caractéristique sont

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

On distingue quatre cas selon la valeur du coefficient d'amortissement δ .

- $\delta = 0$: On a $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, et la solution générale est donc de la forme

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$; on peut aussi l'écrire sous la forme

$$x(t) = C \sin \omega_0(t - \tau)$$

avec $C \geq 0$ et $0 \leq \tau < 2\pi/\omega_0$. C'est une oscillation non amortie d'amplitude C et de fréquence $\nu = \omega_0/2\pi$.

- $0 < \delta < \omega_0$: Les racines

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

du polynôme caractéristique ne sont pas réelles ; après avoir posé $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, la solution générale est

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \cos \omega t + Be^{-\delta t} \sin \omega t,$$

ce que nous pouvons de nouveau écrire comme

$$x(t) = Ce^{-\delta t} \sin(\omega(t - \tau))$$

avec $C \geq 0$ et $0 \leq \tau < 2\pi$. C'est une *oscillation amortie*. La fréquence est $\nu = \omega/2\pi$, donc plus petite que la fréquence du même oscillateur non amorti, et l'amplitude $C(t) = Ce^{-\delta t}$ décroît exponentiellement.

- $\delta = \omega_0$: Le polynôme caractéristique a la racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$; la solution générale est par conséquent

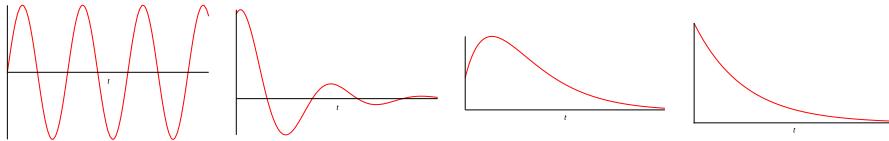
$$x(t) = (A + Bt)e^{-\delta t}.$$

- $\delta > \omega_0$: Le polynôme caractéristique a deux racines réelles négatives :

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0.$$

La solution générale est donc de la forme

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}.$$



Dans les trois derniers cas, on a $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ pour les solutions. Mais pour un amortissement faible, c'est-à-dire dans le cas $0 < \delta < \omega_0$, une solution non triviale (i.e. non nulle) décrit encore une sorte d'oscillation : $x(t)$ s'annule en une infinité de points t équidistants. Lorsque l'amortissement devient plus fort, c'est-à-dire pour $\delta \geq \omega_0$, le caractère oscillatoire disparaît : une solution non triviale s'annule au plus une fois. C'est pourquoi on parle aussi du «cas-limite apériodique» lorsque $\delta = \omega_0$.

Résolution de l'équation inhomogène

Afin de trouver une solution particulière de l'équation inhomogène (8.18),

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = g(t)$$

on peut appliquer la méthode de variation des constantes. Mais, dans certains cas, on trouve une solution en l'essayant avec une fonction du même type que l'inhomogénéité $g(t)$. Nous illustrons ceci par quelques exemples.

Exemples

11. $g(t) \equiv d$ avec $d \in \mathbb{R}$ constante : En cherchant une solution « du même type » que l'inhomogénéité, on trouve la solution constante $x(t) \equiv d/c$ si $c \neq 0$. (Dans le cas $c = 0$, on a une équation du premier ordre pour la fonction $y := \dot{x}$, à savoir $\dot{y} + by = d$, et dans le cas $b = c = 0$, l'équation est simplement $\ddot{x} = d$ avec la solution générale $x(t) = At + B$.)
12. $g(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$ un polynôme en t . En cherchant un polynôme du même degré comme solution, disons

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_m t^m,$$

on obtient un système d'équations linéaires pour les coefficients inconnus $\alpha_0, \dots, \alpha_m$:

$$\begin{aligned} c\alpha_0 + b\alpha_1 + 2\alpha_2 &= a_0, \\ c\alpha_1 + 2b\alpha_2 + 6\alpha_3 &= a_1, \\ &\vdots \\ c\alpha_m &= a_m \end{aligned}$$

Pour $c \neq 0$, ce système admet une solution : on détermine les α_j dans l'ordre $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \alpha_{m-2}, \dots, \alpha_0$. (De nouveau, le cas $c=0$ doit être traité différemment.)

13. $g(t) = k_1 \sin \beta x + k_2 \cos \beta x$. On cherche une solution de la forme

$$x(t) = A \sin \beta x + B \cos \beta x$$

avec des constantes A, B à déterminer. La substitution de cet ansatz dans l'équation différentielle conduit à une équation de la forme

$$(\gamma_1 A + \gamma_2 B) \sin \beta x + (\gamma_3 A + \gamma_4 B) \cos \beta x = k_1 \sin \beta x + k_2 \cos \beta x$$

avec certains coefficients $\gamma_1, \dots, \gamma_4$. On trouve alors A, B en résolvant le système linéaire

$$\begin{aligned} \gamma_1 A + \gamma_2 B &= k_1 \\ \gamma_3 A + \gamma_4 B &= k_2. \end{aligned}$$

Chapitre 9

Les nombres complexes

Nous avons vu l'utilité des nombres complexes dans le traitement des équations différentielles linéaires du second ordre. Ici, nous allons approfondir le sujet et trouver une façon moins mystérieuse d'obtenir les solutions dans le cas où le polynôme caractéristique ne possède pas de racine réelle.

Nombres entiers et nombres rationnels. Au début, «nombre» signifie *entier naturel* : $0, 1, 2, 3, \dots$. Ces nombres servent surtout à compter ou à numérotter des objets. Il est encore assez facile d'étendre cette notion en introduisant les nombres négatifs. On obtient ainsi l'ensemble \mathbb{Z} des nombres *entiers*.

On sait aussi calculer avec les *fractions* ou *nombres rationnels*, c'est-à-dire les quotients d'entiers : on a les quatre opérations élémentaires *addition*, *soustraction*, *multiplication* et *division*, avec les lois de calcul bien connues, où les nombres 0 et 1 jouent des rôles particuliers. Le mathématicien dit que les nombres rationnels forment un *corps*, que l'on dénote normalement par \mathbb{Q} pour rappeler qu'il s'agit de *quotients* de nombres entiers. Si les nombres naturels servent à compter des objets, les nombres rationnels peuvent servir à *mesurer* des grandeurs, et la relation “ $<$ ” permet de *comparer* les résultats de ces mesures.

Nombres réels. Pensant aux nombres rationnels comme résultats de mesure, on les représente souvent par des longueurs ou comme points d'une droite. Déjà les Pythagoréens avaient découvert qu'il existe sur cette droite des points auxquels ne correspond aucun nombre rationnel : la longueur de la diagonale dans un carré de côté 1 représente un tel point sur la droite ; autrement dit : il n'existe pas de nombre rationnel a avec $a^2 = 2$.

En comblant pour ainsi dire les «places» non occupées sur la droite par les nombres rationnels, on obtient le corps \mathbb{R} des *nombres réels*. Il est *complet* dans le sens suivant :

Si $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$ est une suite monotone croissante de nombres réels et si cette suite est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un $M \in \mathbb{R}$ avec $x_n \leq M$ pour tout n , alors la suite converge : il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Remarquons encore que tout nombre réel s'écrit comme limite d'une suite de nombres rationnels. En effet, chaque fois que nous écrivons un nombre réel comme fraction décimale infinie, nous le décrivons comme limite d'une telle suite. Par exemple, $\pi = 3,1415926\dots$ signifie que π est la limite de la suite

$$\frac{3}{1}, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000}, \frac{31415}{10000}, \dots \text{ etc.}$$

L'extension du corps \mathbb{Q} des nombres rationnels en \mathbb{R} , le corps des nombres réels, a – entre autres – l'effet que l'équation $x^2 = 2$ admet maintenant des solutions, à savoir $\pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Plus généralement, $x^2 = a$ admet des solutions dans \mathbb{R} pour $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$. Par contre, l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} puisque $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Arithmétique des nombres complexes

On va construire une extension de \mathbb{R} , le corps \mathbb{C} des *nombres complexes*, dans lequel l'équation $x^2 = -1$ a une solution. Pour arriver à la construction de \mathbb{C} , nous faisons provisoirement comme si nous l'avions déjà, avec notamment une solution de l'équation $x^2 = -1$ que nous désignons par la lettre i (pour nombre «imaginaire»). Un *nombre complexe* est alors une «expression» de la forme

$$a + bi$$

avec deux nombres *réels* a et b . Nous calculons avec ces expressions comme avec les polynômes $a + bx$ de degré un, mais en utilisant la règle

$$i^2 = -1.$$

Nous obtenons ainsi les formules suivantes pour l'addition, la soustraction et la multiplication :

$$\begin{aligned} (u + vi) + (x + yi) &= (u + x) + (v + y)i \\ (u + vi) - (x + yi) &= (u - x) + (v - y)i \\ (u + vi) \cdot (x + yi) &= ux + vxi + uyi + vyi^2 \\ &= (ux - vy) + (vx + uy)i \end{aligned} \tag{9.1}$$

car $vyi^2 = vy(-1) = -vy$. Pour la division

$$\frac{u + vi}{x + yi},$$

quand $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, on amplifie la fraction par le nombre $x - yi$ dit *conjugué* de $x + yi$:

$$\begin{aligned} \frac{u + vi}{x + yi} &= \frac{(u + vi)(x - yi)}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{(ux + vy) + (vx - uy)i}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{ux + vy}{x^2 + y^2} + \frac{vx - uy}{x^2 + y^2} i. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Ainsi, on arrive de nouveau à une expression de la forme $a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Par exemple,

$$\frac{1 + 2i}{3 - 4i} = \frac{(1 + 2i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{-5 + 10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Si l'on regarde les nombres réels comme des nombres complexes $a + bi$ avec $b = 0$, les opérations arithmétiques (9.1) et (9.2) se réduisent aux opérations connues pour les nombres réels, par exemple

$$(u + 0i) \cdot (x + 0i) = (ux - 0 \cdot 0) + (0x + u0)i = ux + 0i.$$

Justification

Apparemment, nous sommes capables de calculer avec les expressions de la forme $a + bi$ comme nous avons l'habitude de calculer avec les nombres réels. Mais les nombres complexes existent-ils ? Qu'est-ce qu'une « expression » ? Remarquons que $a + bi$ est caractérisé de manière unique par le couple (a, b) de nombres réels. En termes de tels couples, nos calculs (9.1) et (9.2) s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}(u, v) \pm (x, y) &= (u \pm x, v \pm y) \\ (u, v) \cdot (x, y) &= (ux - vy, vx + uy) \\ \frac{(u, v)}{(x, y)} &= \left(\frac{ux + vy}{x^2 + y^2}, \frac{vx - uy}{x^2 + y^2} \right).\end{aligned}\tag{9.3}$$

On *définit* maintenant le corps des nombres complexes en posant

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

et on *définit* les opérations arithmétiques par les formules (9.3). Un *nombre complexe* $z \in \mathbb{C}$ est donc simplement un *couple*

$$z = (x, y)$$

de nombres réels.

On vérifie que \mathbb{C} , muni des opérations (9.3), est un corps, c'est-à-dire qu'on a les mêmes lois de calcul que pour les nombres rationnels ou pour les nombres réels, par exemple la commutativité et l'associativité de la multiplication : $z_1 z_2 = z_2 z_1$ et $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ pour $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. L'élément nul est $(0, 0)$, et l'unité est $(1, 0)$.

\mathbb{R} comme sous-ensemble de \mathbb{C}

\mathbb{C} est une *extension* de \mathbb{R} dans le sens suivant : considérons l'application

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto (t, 0).$$

Cette application est compatible avec les opérations arithmétiques dans \mathbb{R} resp. \mathbb{C} : si pour un instant $+_{\mathbb{R}}$ denote l'addition dans \mathbb{R} et $+_{\mathbb{C}}$ celle de \mathbb{C} , alors

$$\alpha(t +_{\mathbb{R}} s) = (t +_{\mathbb{R}} s, 0) = (t, 0) +_{\mathbb{C}} (s, 0),$$

et de manière analogue pour les autres opérations. Calculer dans \mathbb{R} avec les nombres réels s, t, \dots ou calculer dans \mathbb{C} avec les nombres complexes $(s, 0), (t, 0), \dots$ revient donc au même. En *identifiant* le nombre réel $x \in \mathbb{R}$ avec le nombre complexe $(x, 0) \in \mathbb{C}$, on considère \mathbb{R} comme un sous-ensemble de \mathbb{C} . Les opérations algébriques dans \mathbb{C} sont alors compatibles avec celles de \mathbb{R} .

Le nombre i

Définissons l'*unité imaginaire* i par

$$i := (0, 1)$$

Alors on peut écrire $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ comme

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + yi$$

et ainsi¹

$$z = (x, y) = x + yi,$$

ce qui justifie l'écriture $x + yi$ ($= x + iy$) à la place de (x, y) .

Vérifions que le nombre i est bien une solution de l'équation $z^2 = -1$ (l'autre étant $-i$) : selon (9.3) on a

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0),$$

et comme $(-1, 0) = -1$ on obtient

$$i^2 = -1.$$

Pour un nombre complexe $z = x + yi$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ on appelle

x	la partie réelle de z	$\operatorname{Re} z := x$
y	la partie imaginaire de z	$\operatorname{Im} z := y$
$x - yi$	le (nombre) conjugué de z	$\bar{z} := x - yi$.

Un nombre complexe iy avec $x = 0$ et $y \neq 0$ est dit *purement imaginaire*.

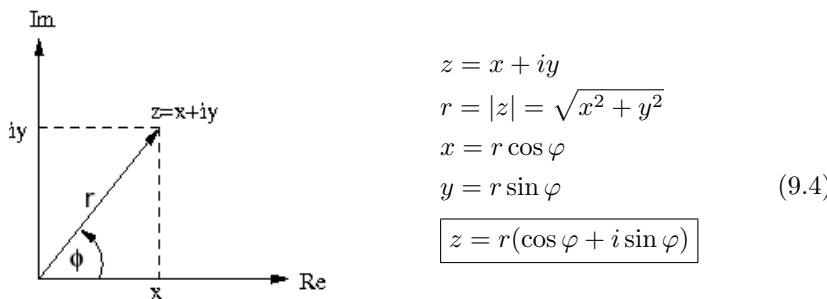
Géométrie des nombres complexes

Identifions le nombre complexe $z = x + iy$ avec le point du plan dont les coordonnées cartésiennes sont x et y . Si φ dénote l'angle entre l'axe des x et le vecteur \overrightarrow{Oz} , alors

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{y}{r},$$

où $r = |z|$ est la *valeur absolue* ou la *norme* de z , c'est-à-dire la longueur euclidienne du vecteur \overrightarrow{Oz} :

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \quad (\implies z\bar{z} = |z|^2).$$



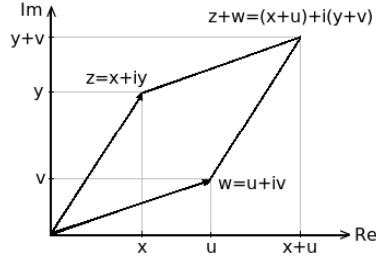
r et φ sont les *coordonnées polaires* de z ; l'angle φ s'appelle aussi *argument* de z , noté $\arg z$. Il n'est pas unique mais seulement déterminé à un multiple entier de 2π près, et pour $z = 0$ il n'est pas du tout défini.

Le conjugué \bar{z} est le point symétrique de z par rapport à l'axe réel (des x).

¹Normalement, on préfère les lettres z, w pour les nombres complexes, et x, y, r, s, t, \dots pour les réels.

Interprétation géométrique des opérations arithmétiques

Addition : C'est l'addition vectorielle usuelle dans le plan, si nous identifions le point z avec le vecteur $\overrightarrow{0z}$.



Multiplication : Pour le produit de deux nombres complexes

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$w = u + iv = s(\cos \psi + i \sin \psi)$$

on trouve en utilisant les formules

$$\begin{aligned}\sin(\varphi + \psi) &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \\ \cos(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi\end{aligned}$$

le résultat

$$z \cdot w = rs (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)). \quad (9.5)$$

Donc on a

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \text{et} \quad \arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w). \quad (9.6)$$

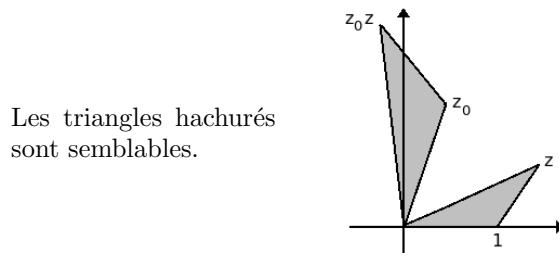
Pour une interprétation géométrique, fixons maintenant un nombre complexe

$$z_0 = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0) \neq 0,$$

et considérons l'application $m_{z_0} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par la multiplication avec z_0 , c'est-à-dire donnée par $m_{z_0}(z) = z_0 z$. Alors la formule

$$m_{z_0}(z) = z_0 z = r_0 r (\cos(\varphi + \varphi_0) + i \sin(\varphi + \varphi_0))$$

montre que m_{z_0} est une *similitude directe* (en allemand : *Drehstreckung*) composée de la *rotation* d'angle $\varphi_0 = \arg(z_0)$ et de centre 0 et de l'*homothétie* de facteur $r_0 = |z_0|$.



Si l'on applique l'égalité (9.5) plusieurs fois pour calculer $z^n = z \cdot \dots \cdot z$ avec $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, on obtient la *formule de De Moivre* :

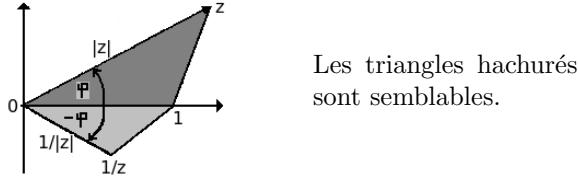
$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \quad (9.7)$$

Passage d'un nombre complexe à son inverse : Pour $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ on obtient avec $z\bar{z} = |z|^2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{z\bar{z}} \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} |z|(\cos \varphi - i \sin \varphi) \\ &= \frac{1}{|z|} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)).\end{aligned}\quad (9.8)$$

Ainsi,

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z). \quad (9.9)$$



De (9.6) et (9.9) on obtient

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w). \quad (9.10)$$

Distance et limites

La *distance* entre deux points $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ dans le plan complexe $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ est définie par

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (9.11)$$

C'est donc la longueur du segment de droite entre z_1 et z_2 . A l'aide de cette notion de distance, on définit la *convergence* d'une suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} = (z_0, z_1, z_2, \dots)$ comme pour les nombres réels dans le chapitre 3. On voit facilement qu'une suite $z_k = x_k + iy_k$ converge vers $z = x + iy$ si et seulement si les parties réelles x_k et les parties imaginaires y_k convergent : $x_k \rightarrow x$ et $y_k \rightarrow y$.

En fait, avec la définition (9.11) on trouve que la distance $|z - z_k|$ satisfait aux inégalités

$$\max\{|x - x_k|, |y - y_k|\} \leq |z - z_k| \leq \sqrt{2} \max\{|x - x_k|, |y - y_k|\},$$

où $\max\{a, b\}$ est le plus grand des deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$. Par conséquent $|z - z_k| \rightarrow 0$ si et seulement si $|x - x_k| \rightarrow 0$ et $|y - y_k| \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow \infty$.

On obtient ainsi les notions de limite, continuité et différentiabilité (complexe) d'une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. La convergence d'une série

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k$$

à termes complexes est de nouveau définie comme la convergence de la suite des sommes partielles $s_n := \sum_{k=0}^n z_k$.

Équations algébriques

Par construction, \mathbb{C} est le plus petit corps contenant \mathbb{R} et une solution de l'équation $z^2 + 1 = 0$. Il est donc surprenant que *toute* équation algébrique

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

de degré $n \geq 1$ admette des solutions dans \mathbb{C} . Plus précisément :

Théorème fondamental de l'algèbre. Soit $P(z)$ un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients (réels ou) complexes :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

avec $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. Alors P possède n zéros $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ (pas nécessairement distincts) et s'écrit comme

$$P(z) = a_n \cdot (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n). \quad (9.12)$$

Remarquons néanmoins que la résolution effective d'une équation algébrique n'est pas facile, car il n'existe pas de formule générale pour les solutions z_1, \dots, z_n , sauf pour les polynômes degrés ≤ 4 . Rappelons celle des deux solutions d'une équation quadratique $az^2 + bz + c = 0$:

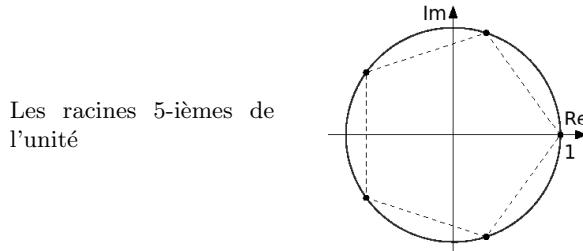
$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Lorsque les coefficients a , b et c sont réels, nous pouvons distinguer trois cas suivant la valeur du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$: Si $\Delta > 0$, alors il existe deux solutions réelles $z_1 \neq z_2$; pour $\Delta = 0$ il existe une solution réelle double $z_1 = z_2$; et si $\Delta < 0$ il existe deux solutions complexes non réelles et conjuguées $z_2 = \bar{z}_1$.

Racines n -ièmes de l'unité. A l'aide de la formule de De Moivre (9.7) on voit facilement que les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont les n nombres complexes

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

pour $k = 0, 1, \dots, n-1$, appelés les *racines n -ièmes de l'unité*. Ils sont situés sur le cercle unité et sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés.



La fonction exponentielle complexe

La série exponentielle

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (9.13)$$

converge pour tout nombre complexe z . Comme dans le cas réel considéré au chapitre 6, on a de plus l'égalité

$$\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n. \quad (9.14)$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ on *définit*, d'après Euler,

$$e^z := \exp z.$$

Théorème. *La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a les propriétés suivantes :*

- (a) *elle est continue ;*
- (b) *$\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w$ pour tous $z, w \in \mathbb{C}$;*
- (c) *pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a la formule d'Euler :*

$$\boxed{\exp(it) = \cos t + i \sin t} \quad (9.15)$$

Conséquences

- (i) $\exp(z) \exp(-z) = \exp(z-z) = \exp(0) = 1$, donc $\exp(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- (ii) Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ on a

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

et ainsi $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ et $\arg(e^z) = \operatorname{Im}(z)$.

- (iii) La représentation d'un nombre complexe en coordonnées polaires s'écrit à l'aide de la fonction exponentielle

$$\boxed{z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} \quad (9.16)$$

Remarquons qu'on peut arriver à la formule d'Euler en utilisant l'argument fallacieux suivant : la formule de De Moivre implique notamment

$$\cos t + i \sin t = \left(\cos \frac{t}{n} + i \sin \frac{t}{n}\right)^n.$$

Or, pour n assez grand, $\cos \frac{t}{n} \approx 1$ et $\sin \frac{t}{n} \approx \frac{t}{n}$. Donc,

$$\cos t + i \sin t = \left(\cos \frac{t}{n} + i \sin \frac{t}{n}\right)^n \approx \left(1 + \frac{it}{n}\right)^n \approx e^{it}.$$

Une preuve rigoureuse de la formule d'Euler s'obtient en utilisant les séries connues pour \sin et \cos : avec $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$ on obtient

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos t + i \sin t. \end{aligned}$$

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes

On définit la différentiabilité et la *dérivée* d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ d'argument réel, mais à valeurs complexes, comme pour une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs réelles :

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}. \quad (9.17)$$

On démontre facilement que $f = u + iv$ est différentiable si et seulement si ses parties réelle u et imaginaire v le sont, et que

$$f'(t) = u'(t) + iv'(t). \quad (9.18)$$

On a les mêmes notations alternatives pour la dérivée, $f'(t_0) = \dot{f}(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0)$, que dans le cas réel.

Exemple. Pour un nombre complexe λ , considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(t) = e^{\lambda t}$. Le calcul direct de la dérivée est facile :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda(t+\tau)} - e^{\lambda t}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda\tau} - 1}{\tau} e^{\lambda t} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tau} \left(\lambda + \lambda\tau + \frac{(\lambda\tau)^2}{2!} + \dots - \lambda \right) \right) e^{\lambda t} \\ &= \lambda e^{\lambda t} = \lambda f(t). \end{aligned}$$

On arrive au même résultat en utilisant la formule (9.18), c'est-à-dire en passant par la décomposition de $f(t)$ en parties réelle $u(t)$ et imaginaire $v(t)$: si $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\lambda t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) \\ &= e^{\alpha t} \cos \beta t + i e^{\alpha t} \sin \beta t. \end{aligned}$$

Donc $f(t) = u(t) + iv(t)$ avec

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\alpha t} \cos \beta t \\ v(t) &= e^{\alpha t} \sin \beta t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On trouve} \quad u'(t) &= \alpha e^{\alpha t} \cos \beta t - e^{\alpha t} \beta \sin \beta t \\ v'(t) &= \alpha e^{\alpha t} \sin \beta t + e^{\alpha t} \beta \cos \beta t, \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} u'(t) + iv'(t) &= e^{\alpha t} \left(\alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t + i(\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t) \right) \\ &= (\alpha + i\beta) e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) = \lambda e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Exemple. On peut prouver la formule d'Euler en utilisant la dérivée de la fonction $f(t) = (\cos t + i \sin t)/e^{it}$:

$$f'(t) = \frac{(-\sin t + i \cos t)e^{it} - (\cos t + i \sin t)ie^{it}}{e^{2it}} = 0.$$

Cette fonction est donc constante, et ainsi $f(t) \equiv f(0) = 1$, ce qui démontre

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Les équations différentielles linéaires revisitées

Rappelons le problème : *Comment résoudre l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants*

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

dans le cas où son polynôme caractéristique $\chi(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$ n'a pas de racine réelle ?

Admettons maintenant des solutions complexes de l'équation différentielle, c'est-à-dire des fonctions différentiables $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ avec $\ddot{\varphi}(t) + b\dot{\varphi}(t) + c\varphi(t) = 0$. Nous venons de voir que, pour une fonction de la forme $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ on a la même forme de la dérivée que pour $\lambda \in \mathbb{R}$, à savoir $\dot{\varphi}(t) = \lambda e^{\lambda t}$. Cela nous donne le

Théorème. Une fonction $z(t) = e^{\lambda t}$ est une solution (complexe) de l'équation différentielle $\ddot{z} + b\dot{z} + cz = 0$ si et seulement si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une racine du polynôme caractéristique $\chi(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$.

Dans ce théorème, on peut même admettre des coefficients b, c complexes ; mais revenons à notre problème où b et c sont réels mais tels que le polynôme caractéristique n'a pas de racine réelle. Il a donc les deux racines complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ avec $\beta \neq 0$. Elles sont donc différentes, et on voit facilement que les deux solutions

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) \\ z_2(t) &= e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)) \end{aligned}$$

sont linéairement indépendantes et forment un *système fondamental complexe*.

Toute combinaison linéaire $a_1 z_1(t) + a_2 z_2(t)$ à coefficients $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ est une solution. En particulier, nous retrouvons le système fondamental de deux solutions réelles donné à la page 95 comme suit :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2} z_1(t) + \frac{1}{2} z_2(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ x_2(t) &= \frac{1}{2i} z_1(t) - \frac{1}{2i} z_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{aligned}$$

Oscillations et complexification. Les solutions complexes sont utiles pour traiter les oscillations induites. Considérons par exemple l'équation différentielle

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \cos(\omega t). \quad (9.19)$$

avec $\delta, \omega_0 \in \mathbb{R}$. On peut regarder cette équation comme la partie réelle de l'équation complexe

$$\ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \omega_0^2 z = e^{i\omega t}. \quad (9.20)$$

Lorsque $z(t) = x(t) + iy(t)$ est une solution complexe de (9.20), sa partie réelle $x(t)$ résout (9.19).

Pour (9.20) nous cherchons une solution du même type que l'inhomogénéité, c'est-à-dire que nous faisons l'ansatz $z(t) = Ae^{i\omega t}$. On trouve

$$\ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \omega_0^2 z = (-\omega^2 + 2i\delta\omega + \omega_0^2)Ae^{i\omega t}.$$

C'est une solution de (9.20) si l'on choisit

$$A = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}.$$

Exemple. Pour obtenir une solution de $\ddot{x} + x = \cos 2t$, on procède en trois étapes :

1. Complexification : $\ddot{z} + z = e^{2it}$.
2. Résolution de cette équation par l'ansatz $z(t) = Ae^{2it}$: on obtient $A = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$, donc la solution complexe

$$z(t) = -\frac{1}{3} e^{2it}.$$

3. La partie réelle de $z(t)$ est la fonction $x(t) = -\frac{1}{3} \cos 2t$. Elle est bien solution :

$$\ddot{x} + x = \frac{4}{3} \cos 2t - \frac{1}{3} \cos 2t = \cos 2t.$$

Il faut remarquer que cette méthode ne fonctionne pas si $\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega = 0$. Mais ce n'est le cas que lorsque $\delta = 0$ et $\omega = \pm\omega_0$. On trouve alors une solution avec la méthode de la variation des constantes.

Note historique

L'idée de résoudre l'équation $x^2 = -1$ tout simplement en ajoutant encore des nombres — notamment i avec $i^2 = -1$ — n'était pas à l'origine des nombres complexes. On se contentait plutôt de constater que cette équation n'avait pas de solution : si l'équation $x^2 = b$ est interprétée géométriquement comme recherche d'un carré de côté x tel que son aire soit égale à b , l'équation n'a pas de sens pour $b = -1$, et la non-existence d'une solution ne gêne pas.

Par contre, on connaissait au 16ème siècle des formules pour la résolution d'équations cubiques. Une de ces formules de CARDAN donnait comme solution de l'équation

$$x^3 = px + q \quad \text{avec } p, q > 0$$

l'expression

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Pour l'équation $x^3 = 15x + 4$ la formule nous livre

$$x_1 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Cette expression contient le nombre $\sqrt{-121}$, qui n'avait pas de sens pour les gens de l'époque. Mais en ignorant ce fait et en calculant avec ce nombre inexistant ou *imaginaire* suivant certaines règles, on trouva le résultat $x_1 = 4$, une solution parfaitement admissible !

Dans cet exemple, les nombres complexes sont donc un outil qui permet de trouver les solutions réelles d'un problème à données réelles. Nous avons vu une autre application de ce genre, à savoir l'utilisation des nombres complexes dans la résolution de certaines équations différentielles réelles.

L'interprétation géométrique des nombres complexes fut découverte vers la fin du 18ème siècle (Caspar Wessel, Jean-Robert Argand) : comme elle joua un rôle essentiel dans la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre par Gauss, on parle aujourd'hui du plan (numérique) de Gauss. La construction des nombres complexes à partir des nombres réels que nous avons présentée n'a été introduite qu'en 1833 par le mathématicien et physicien irlandais W.R. Hamilton.

Chapitre 10

Gradient et dérivées partielles

Dans ce chapitre, nous traitons des fonctions $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de plusieurs variables, principalement dans les cas $n=2$ et $n=3$ qui montrent déjà les différences essentielles par rapport au cas $n=1$. On utilisera aussi x, y, z comme noms des variables, à la place de x_1, x_2, x_3 . Les fonctions considérées sont en général définies sur des sous-ensembles $D \subseteq \mathbb{R}^n$, tels par exemple

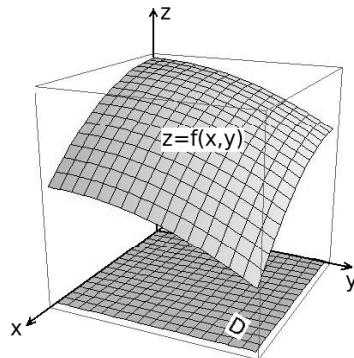
$$\begin{aligned} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r\} \quad (\text{un disque ouvert}), \\ & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad (\text{un rectangle fermé}), \\ & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\} \quad (\text{un octant}). \end{aligned}$$

Représentations graphiques

Graphes. La première méthode de visualisation d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de deux variables (c'est-à-dire avec $D \subseteq \mathbb{R}^2$) est la représentation par son *graph* $G_f \subseteq \mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\}, \end{aligned}$$

une sorte de «tapis flottant» dans l'espace \mathbb{R}^3 au-dessus de D :

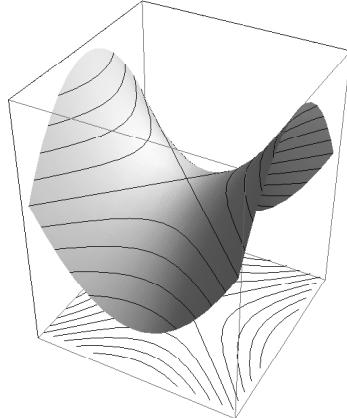


Ensembles de niveau. Une autre méthode de visualisation graphique d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur $D \subseteq \mathbb{R}^2$ est la représentation par ses *lignes de*

niveau (ou *courbes de niveau*, plus précisément ses *ensembles* de niveau). Pour tout $s \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau N_s est l'ensemble des points (x, y) du plan en lesquels la fonction est définie et prend la valeur s :

$$N_s = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = s\}.$$

On obtient N_s comme projection de l'intersection du graphe de f avec le plan horizontal $z = s$ dans le plan x, y .



Exemples

1. Une fonction *linéaire inhomogène* (ou fonction *affine*) de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de la forme

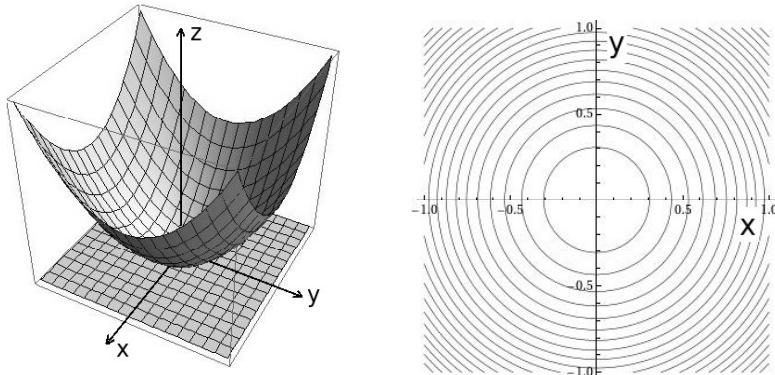
$$f(x, y) = ax + by + c$$

avec des constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$. Son graphe est un plan dans \mathbb{R}^3 . Si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, alors toute ligne de niveau

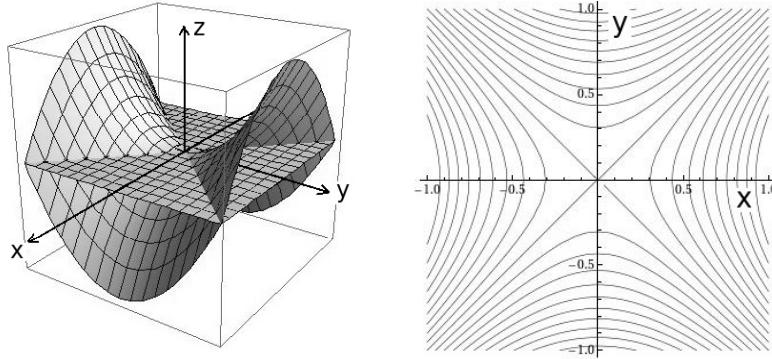
$$N_s = \{(x, y) \mid ax + by + c = s\}$$

est une droite. Mais si $a = b = 0$, alors f est une fonction constante ; dans ce cas, $N_s = \emptyset$ pour $s \neq c$, et $N_s = \mathbb{R}^2$ pour $s = c$.

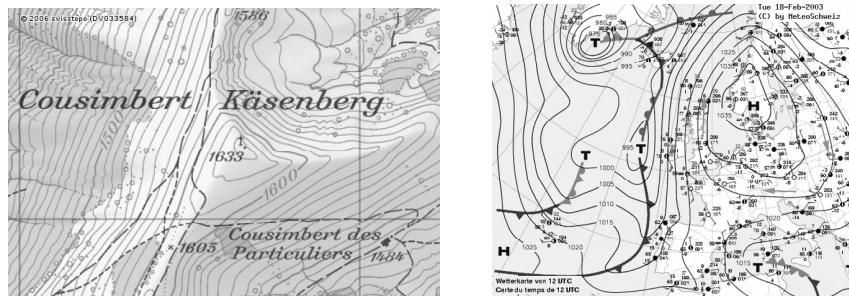
2. Si $f(x, y) = x^2 + y^2$, alors le graphe G_f est un *paraboloïde de révolution*, obtenu en faisant tourner la parabole $z = x^2$ autour de l'axe des z . Pour $s > 0$, la courbe de niveau N_s est un cercle de rayon \sqrt{s} centré à l'origine $(0, 0)$; pour $s < 0$, N_s est l'ensemble vide, tandis que N_0 consiste en un seul point, $(0, 0)$.



3. Le graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$ est un *parabolôde hyperbolique*, une surface qui possède la forme d'une selle. Pour $s \neq 0$, les lignes de niveau N_s sont des hyperboles, tandis que N_0 est une paire de droites.



4. La fonction $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ est définie pour $x^2 + y^2 \leq 1$, c'est-à-dire $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ avec le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Son graphe est un hémisphère de rayon 1. Pour $0 \leq s < 1$, la ligne de niveau $N_s = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 - s^2\}$ est un cercle de rayon $\sqrt{1 - s^2}$.
5. Les lignes de niveau sur une carte topographique sont celles de la fonction $f(x, y) = \text{altitude au point } (x, y)$. Les *isobares* sur une carte météorologique sont les courbes de niveau de la pression atmosphérique.



Cas général. Plus généralement, pour les fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de n variables, c'est-à-dire avec $D \subseteq \mathbb{R}^n$, on a aussi les notions de *graphe* $G_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ et d'*ensemble de niveau*, $N_s \subseteq D$. Dans ce cas général, ils sont définis par

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

$$N_s = \{(x_1, \dots, x_n) \in D \mid f(x_1, \dots, x_n) = s\}.$$

Par exemple les *surfaces équipotielles* d'un champ électrique dans \mathbb{R}^3 sont les ensembles de niveau du potentiel électrique. Pour $n > 3$ les ensembles $N_s \subseteq \mathbb{R}^n$ sont impossibles (ou au moins difficiles) à visualiser, mais ils ont une signification très concrète : les «points» $(x_1, \dots, x_n) \in N_s$ sont les solutions de l'équation $f(x_1, \dots, x_n) = s$.

L'espace \mathbb{R}^n

On peut regarder les fonctions de n variables comme fonctions $\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$ d'une *seule* variable – mais cette variable \vec{x} représente des points dans \mathbb{R}^n . Rappelons que \mathbb{R}^n est l'ensemble des n -uples

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

de nombres réels. Donc $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ est la droite réelle, \mathbb{R}^2 le plan avec ses coordonnées cartésiennes, et $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ l'espace euclidien. Les éléments $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s'appellent les *points* de \mathbb{R}^n ou les *vecteurs*, et x_1, x_2, \dots sont les *composantes* du vecteur \vec{x} . Dans ce contexte, les nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ s'appellent les *scalaires*.

Remarquons que, dans un traitement plus approfondi, on *distingue* entre points $x \in \mathbb{R}^n$ et vecteurs \vec{v} . Géométriquement, les vecteurs sont des «flèches» avec un point initial x et un point final y . On peut formaliser ce concept en définissant qu'un vecteur en x est un couple $\vec{v} = (x, y)$ de points de \mathbb{R}^n . Dans notre régime simplifié, on identifie $\vec{v} = (x, y)$ avec y , et on utilise la notation \vec{y} au lieu de y seulement pour se rappeler qu'il ne s'agit pas d'un scalaire.

Opérations algébriques. Dans \mathbb{R}^n , on utilise les opérations algébriques suivantes : l'*addition* des vecteurs, la *multiplication* des vecteurs par des scalaires λ , et le *produit scalaire* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ de vecteurs. Elles sont définies par

$$\begin{aligned}\vec{x} + \vec{y} &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \vec{x} &= \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &:= \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n\end{aligned}$$

pour $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons en particulier que le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur mais un nombre (ou *scalaire*). Dans la littérature, on trouve souvent la notation $\vec{x} \cdot \vec{y}$ au lieu de $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$. On vérifie facilement les règles

$$\begin{aligned}\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \\ \langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \\ \langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \lambda \vec{y} \rangle \\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle.\end{aligned}$$

Distance. Les notions de longueur, distance et d'angle connues de la géométrie vectorielle dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 se généralisent à \mathbb{R}^n : la *norme* euclidienne (ou longueur) d'un vecteur \vec{x} est définie par

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

la *distance* (euclidienne) entre \vec{x} et \vec{y} par

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) := \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

et l'*angle* $\theta \in [0, 2\pi]$ entre $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ satisfait

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}.$$

(Remarquons que, comme dans le plan \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3 , il y a en fait *deux* angles caractérisés par cette relation, θ et $2\pi-\theta$.) Les vecteurs \vec{x}, \vec{y} sont dits *orthogonaux* (ou *perpendiculaires*) si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. Un *vecteur unitaire* est un vecteur \vec{x} avec $\|\vec{x}\| = 1$.

La *boule* (ouverte) de centre \vec{a} et de rayon $r > 0$, aussi appelée *r-voisinage* de \vec{a} , est l'ensemble de points à distance $< r$ de \vec{a} , c'est-à-dire

$$B_r(\vec{a}) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}.$$

Un point \vec{x} est dit un *point intérieur* d'un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^n$ s'il existe un rayon $r > 0$ tel que la boule $B_r(\vec{x})$ est contenue dans D ; et l'ensemble D est dit un *ensemble ouvert* si tout point de D est un point intérieur de D .

Le concept de distance dans \mathbb{R}^n donne lieu aux notions de convergence et de continuité comme dans le cas $n = 1$. Une suite

$$(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots)$$

de points \vec{x}_k dans \mathbb{R}^n est dite *convergente* vers \vec{a} si la suite de ses distances $\|\vec{x}_k - \vec{a}\|$ à \vec{a} tend vers zéro. Dans ce cas on écrit $\vec{x}_k \rightarrow \vec{a}$ ($k \rightarrow \infty$) ou

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a}.$$

Comme dans le cas $n = 2$ (voir p.101), on montre que $\vec{x}_k \rightarrow \vec{a}$ si et seulement si $x_{k,j} \rightarrow a_j$ pour tout $j = 1, \dots, n$, c'est-à-dire si et seulement si la j ième composante de $\vec{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$ converge vers la j ième composante de $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$.

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dit *continue* en \vec{x} si $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = f(\vec{x})$ pour toute suite \vec{x}_k avec $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}$.

La base standard. Considérons maintenant les vecteurs unitaires

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\vec{e}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0)$$

...

$$\vec{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

(L'ensemble ordonné $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ s'appelle la *base standard* de l'espace \mathbb{R}^n .) Ils satisfont aux «relations d'orthogonalité»

$$\langle \vec{e}_j, \vec{e}_k \rangle = \delta_{jk} := \begin{cases} 1, & \text{si } j = k; \\ 0, & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

On obtient les composantes x_j d'un vecteur $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ comme produit scalaire de \vec{x} avec \vec{e}_j ,

$$x_j = \langle \vec{x}, \vec{e}_j \rangle.$$

Tout \vec{x} s'écrit comme combinaison linéaire des \vec{e}_j : par exemple, pour $n = 3$,

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x_1, x_2, x_3) \\ &= x_1 \cdot (1, 0, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0) + x_3 \cdot (0, 0, 1) \\ &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \\ &= \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{x}, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \langle \vec{x}, \vec{e}_3 \rangle \vec{e}_3 \end{aligned}$$

et en général

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j = \sum_{j=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j.$$

Fonctions différentiables, différentielles, gradients

Rappelons (voir p. 23) qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d'une seule variable réelle est différentiable en x_0 si elle admet une bonne approximation par une fonction linéaire inhomogène $x \mapsto f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$ dans un voisinage de x_0 . Plus précisément,

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + R(x)$$

avec un reste $R(x)$ ayant la propriété

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

Si c'est le cas, alors a est la limite d'un quotient de différences

$$a = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

et on appelle la fonction linéaire $h \mapsto df_{x_0}(h) := f'(x_0) \cdot h$ la différentielle de f en x_0 . Sous cette forme, la définition de la différentiabilité s'étend aux fonctions de plusieurs variables.

Une fonction $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)$ est dite *linéaire* si elle est de la forme

$$L(\vec{h}) = \langle \vec{l}, \vec{h} \rangle = l_1 h_1 + \dots + l_n h_n$$

avec un vecteur constant $\vec{l} = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$. Les composantes l_j sont alors uniquement déterminées par L , car $L(\vec{e}_j) = \langle \vec{l}, \vec{e}_j \rangle = l_j$.

Définition. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$. La fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est (*totalement*) *differentiable* en $\vec{x}_0 \in D$ s'il existe une fonction *linéaire* $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $L(\vec{h}) = \langle \vec{l}, \vec{h} \rangle$, telle que pour tout $\vec{x} \in D$

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + L(\vec{x} - \vec{x}_0) + R(\vec{x}) \tag{10.1}$$

$$= f(\vec{x}_0) + \langle \vec{l}, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle + R(\vec{x}) \tag{10.2}$$

et où le reste R satisfait à la condition

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{R(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0.$$

Nous verrons que \vec{l} et donc L sont alors uniquement déterminés. La fonction L s'appelle la *differentielle*, le vecteur \vec{l} le *gradient* de f en \vec{x}_0 . On désigne la différentielle par $df_{\vec{x}_0}$ et le gradient par $\text{grad}f(\vec{x}_0)$ ou $\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)$ (à lire «nabla f»). Ainsi par définition,

$$df_{\vec{x}_0}(\vec{h}) = \langle \text{grad}f(\vec{x}_0), \vec{h} \rangle \tag{10.3}$$

Donc la différentielle $df_{\vec{x}_0}$, une application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, est donnée par le produit scalaire avec le vecteur $\text{grad}f(\vec{x}_0)$.

En posant $\vec{x} - \vec{x}_0 =: \vec{h}$ on peut maintenant écrire les équations (10.1-2) sous la forme

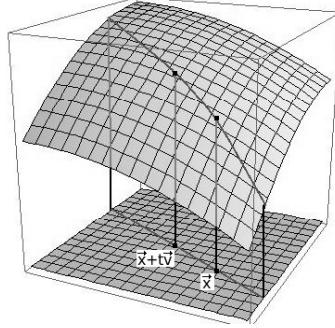
$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + df_{\vec{x}_0}(\vec{h}) + R(\vec{h}) \quad (10.4)$$

$$= f(\vec{x}_0) + \langle \text{grad}f(\vec{x}_0), \vec{h} \rangle + R(\vec{h}) \quad (10.5)$$

avec $\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{R(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$.

Dérivées directionnelles

Fixons \vec{x} et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et considérons la droite paramétrée $t \mapsto \vec{x} + t\vec{v}$ ($t \in \mathbb{R}$) dans \mathbb{R}^n . Considérons la fonction $t \mapsto f(\vec{x} + t\vec{v})$ de la seule variable réelle t .



L'équation (10.5) avec $\vec{h} = t\vec{v}$ nous donne

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + t\vec{v}) &= f(\vec{x}) + \langle \text{grad}f(\vec{x}), t\vec{v} \rangle + R(t\vec{v}) \\ &= f(\vec{x}) + t\langle \text{grad}f(\vec{x}), \vec{v} \rangle + R(t\vec{v}) \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{f(\vec{x} + t\vec{v}) - f(\vec{x})}{t} = \langle \text{grad}f(\vec{x}), \vec{v} \rangle + \frac{R(t\vec{v})}{t}.$$

A la limite $t \rightarrow 0$ nous obtenons

$$df_{\vec{x}}(\vec{v}) = \langle \text{grad}f(\vec{x}), \vec{v} \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{v}) - f(\vec{x})}{t}. \quad (10.6)$$

Cette limite

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\vec{x} + t\vec{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{v}) - f(\vec{x})}{t} \quad (10.7)$$

s'appelle la *dérivée directionnelle* de f le long de \vec{v} , ou suivant \vec{v} , bien qu'elle ne dépende pas seulement de la *direction* de \vec{v} . C'est le taux de variation instantanée de f considérée comme fonction de t sur la droite $t \mapsto \vec{x} + t\vec{v}$, pour $t = 0$. Quand \vec{v} est un vecteur unitaire, c'est simplement la croissance (ou la pente) de f en \vec{x} dans la direction de \vec{v} .

Signification du gradient

La formule (10.6) donne la signification du gradient. Prenons en effet un vecteur unitaire \vec{v} , et soit θ l'angle entre \vec{v} et $\text{grad}f(\vec{x})$. Alors

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\vec{x} + t\vec{v}) = \langle \text{grad}f(\vec{x}), \vec{v} \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \|\operatorname{grad} f(\vec{x})\| |\vec{v}| \cos \theta \\
&= \|\operatorname{grad} f(\vec{x})\| \cos \theta \\
&\leq \|\operatorname{grad} f(\vec{x})\|,
\end{aligned}$$

avec l'égalité si et seulement si $\cos \theta = 1$, c'est-à-dire si \vec{v} et $\operatorname{grad} f(\vec{x})$ ont la même direction. Donc *la croissance de f est maximale dans la direction du gradient, et la valeur de cette croissance maximale est égale à sa longueur $\|\operatorname{grad} f(\vec{x})\|$.*

Dérivées partielles et calcul du gradient

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable en \vec{x} , comment calculer son gradient $\operatorname{grad} f(\vec{x})$? Rappelons qu'on peut calculer les composantes d'un vecteur \vec{w} en prenant les produits scalaires $w_j = \langle \vec{w}, \vec{e}_j \rangle$. Ainsi pour obtenir les composantes $\langle \operatorname{grad} f(\vec{x}), \vec{e}_j \rangle$ du vecteur $\operatorname{grad} f(\vec{x})$, nous appliquons la formule (10.6) avec $\vec{v} = \vec{e}_j$. Par exemple pour $j = 1$,

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{grad} f(\vec{x}), \vec{e}_1 \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{e}_1) - f(\vec{x})}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + t, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{t}
\end{aligned}$$

Mais c'est simplement la dérivée en $\xi = x_1$ de la fonction de la *seule* variable réelle ξ ,

$$\xi \mapsto f(\xi, x_2, \dots, x_n),$$

qu'on obtient à partir de f en *fixant* les autres variables x_2, \dots, x_n . Cette dérivée est dite *dérivée partielle* en \vec{x} de f par rapport à x_1 , et notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \quad \text{ou} \quad \partial_{x_1} f(\vec{x}) \quad \text{ou} \quad \partial_1 f(\vec{x}).$$

De manière analogue existent les dérivées partielles par rapport aux autres variables $\partial_j f = \partial_{x_j} f = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ pour $j = 2, \dots, n$. La dérivée partielle de f par rapport à une variable x_j se détermine en considérant les autres variables comme constantes, c'est-à-dire en traitant f comme fonction de la seule variable x_j , et en calculant la dérivée ordinaire de cette fonction. Pour le gradient, nous avons finalement

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \quad (10.8)$$

et la formule (10.5) (avec \vec{x} à la place de \vec{x}_0) s'écrit

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}) h_j + R(\vec{h}). \quad (10.9)$$

Exemples

6. Dans le cas $n = 2$ et avec la notation (x, y) à la place de $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et (h, k) à la place de $\vec{h} = (h_1, h_2)$, le gradient de f est

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

la différentielle en (x, y) est la fonction linéaire $df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$(h, k) \mapsto df_{(x,y)}(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k$$

et la formule (10.9) devient

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k + R(h, k). \quad (10.10)$$

7. Pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy + \sin(xy^3)$ on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y + \cos(xy^3)y^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x + \cos(xy^3)3xy^2.\end{aligned}$$

8. **Différentiation implicite.** Supposons que la fonction $z = z(x, y)$ satisfasse à l'équation

$$xyz = \sin(x + y + z).$$

Calculer $\partial z / \partial x$ en termes de x, y, z .

Solution. On ne peut pas résoudre l'équation par rapport à z afin d'obtenir une formule explicite pour la fonction $z(x, y)$. Au lieu de cela, on prend la dérivée $\partial / \partial x$ de l'équation en utilisant la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(xyz) &= \frac{\partial}{\partial x} \sin(x + y + z) \\ yz + xy \frac{\partial z}{\partial x} &= \cos(x + y + z) \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

En résolvant cette dernière équation pour $\partial z / \partial x$, on obtient le résultat :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos(x + y + z) - yz}{xy - \cos(x + y + z)}.$$

Noter que cette formule ne donne pas $\partial z / \partial x$ explicitement comme fonction de x et y , mais en termes de x, y et $z = z(x, y)$.

Critère de différentiabilité

Si toutes les dérivées partielles $\partial_j f(\vec{x})$ existent, alors f est dite *partiellement différentiable* en \vec{x} . Nous avons vu que toute fonction totalement différentiable en \vec{x} est partiellement différentiable en \vec{x} . Par contre, il existe des fonctions partiellement différentiables qui ne sont pas totalement différentiables : on peut écrire la formule (10.9), mais le reste ne satisfait pas la condition $\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} R(\vec{h}) / \|\vec{h}\| = 0$. Néanmoins on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Si les dérivées partielles $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ existent en chaque point d'une voisinage de \vec{x} et sont des fonctions continues en \vec{x} , alors f est totalement différentiable en \vec{x} .*

Pour vérifier que f est différentiable dans (chaque point d') un domaine D , il suffit donc de calculer ses dérivées partielles et de contrôler qu'elles sont continues. Selon ce critère, la fonction $f(x, y) = xy + \sin(xy^3)$ de l'exemple précédent est différentiable dans tout \mathbb{R}^2 .

Application : propagation d'erreurs

Soit $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ une fonction de plusieurs variables que l'on aimera évaluer au point $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$. Si l'argument \vec{a} n'est pas connu avec précision mais seulement à une petite erreur ε près, on se pose la question de l'influence de cette erreur sur la valeur de f : si $\vec{x} \approx \vec{a}$ avec $\vec{x} - \vec{a} = \vec{h}$ satisfaisant $\|\vec{h}\| \leq \varepsilon$, comment estimer l'erreur $|f(\vec{x}) - f(\vec{a})|$?

Pour cette estimation, nous utilisons l'approximation

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \langle \vec{\nabla} f(\vec{a}), \vec{h} \rangle + R(\vec{h}) \\ &\approx f(\vec{a}) + \langle \vec{\nabla} f(\vec{a}), \vec{h} \rangle \end{aligned} \quad (10.11)$$

et mesurons l'erreur entre \vec{a} et \vec{x} par leur distance euclidienne, c'est-à-dire nous supposons que

$$\|\vec{x} - \vec{a}\| = \|\vec{h}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n h_j^2} \leq \varepsilon.$$

En négligeant pour le moment l'erreur de l'approximation (10.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| &= |\langle \vec{\nabla} f(\vec{a}), \vec{h} \rangle| \\ &= \|\vec{\nabla} f(\vec{a})\| \cdot \|\vec{h}\| \cdot |\cos \theta| \\ &\leq \varepsilon \|\vec{\nabla} f(\vec{a})\| \\ &= \varepsilon \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{a}) \right)^2}. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une estimation du «premier ordre», ce qui veut dire qu'en tenant compte du fait que (10.9) n'est qu'une approximation, nous avons en réalité

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| \leq \varepsilon \|\vec{\nabla} f(\vec{a})\| + R(\varepsilon)$$

avec $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(\varepsilon)/\varepsilon = 0$.

Règle de la chaîne

Courbes. Une *courbe* (paramétrée) différentiable dans \mathbb{R}^n est une application différentiable $\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Donc

$$\vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)),$$

et la différentiabilité veut dire que tout composante γ_j est une fonction différentiable. L'interprétation cinématique est la trajectoire d'une particule qui se meut dans l'espace \mathbb{R}^n : on considère le paramètre t comme le temps et $\vec{\gamma}(t)$ comme la position de la particule au temps t .

Le *vecteur vitesse* de la courbe γ en $t \in I$ est la dérivée

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\gamma}}(t) &= \frac{d\vec{\gamma}}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\gamma}(t+h) - \vec{\gamma}(t)}{t} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{t}, \dots, \frac{\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t)}{t} \right) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{t}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t)}{t} \right) \\ &= (\dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t)). \end{aligned}$$

C'est un vecteur tangent à la courbe au point $\vec{\gamma}(t)$.

Exemple

9. La courbe $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$, est une paramétrisation du cercle unité dans le plan. Son vecteur vitesse en t est $\dot{\vec{\gamma}}(t) = (-\sin t, \cos t)$.

Théorème. (Règle de la chaîne) Soient $\vec{\gamma} : I \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ une courbe et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors la fonction composée $f \circ \vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ \vec{\gamma})(t) = f(\vec{\gamma}(t))$ est également différentiable, et sa dérivée se calcule par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\vec{\gamma}(t)) &= df_{\vec{\gamma}(t)}(\dot{\vec{\gamma}}(t)) \\ &= \langle (\text{grad } f)(\vec{\gamma}(t)), \dot{\vec{\gamma}}(t) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{\gamma}(t)) \frac{d\gamma_j}{dt}(t). \end{aligned} \quad (10.12)$$

Donc le taux de variation instantanée de f le long de la courbe est donné par le produit scalaire du gradient de f avec la vitesse de la courbe.

Voici une autre façon, moins précise mais souvent utilisée, d'écrire cette formule : la courbe est décrite en donnant les coordonnées comme fonctions $x_1(t), \dots, x_n(t)$ du paramètre t ; alors

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}. \quad (10.13)$$

Dans cette notation, l'application $\vec{\gamma}$ n'est pas explicitement mentionnée : on utilise $x_j(t)$ au lieu de $\gamma_j(t)$. Il faut s'assurer d'évaluer $\partial f / \partial x_j$ au point correct.

Indiquons la *preuve* de (10.12) dans le cas $n = 2$, i.e. montrons que

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t) \quad (10.14)$$

sous l'hypothèse que les dérivées partielles de f soient continues :

$$\begin{aligned} \frac{f(\vec{\gamma}(t+h)) - f(\vec{\gamma}(t))}{h} &= \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} \\ &= \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t+h))}{h} \\ &\quad + \frac{f(x(t), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\theta_1, y(t+h)) \frac{x(t+h) - x(t)}{h} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), \theta_2) \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \end{aligned}$$

avec un θ_1 entre $x(t)$, $x(t+h)$ et un θ_2 entre $y(t)$, $y(t+h)$. Ici nous avons appliqué le théorème des accroissements finis (voir p. 30) à la fonction

$x \mapsto f(x, y(t+h))$ et la fonction $y \mapsto f(x(t), y)$. Quand h tend vers zéro, on a $\theta_1 \rightarrow x(t)$, $y(t+h) \rightarrow y(t)$ et $\theta_2 \rightarrow y(t)$. Par conséquent

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\theta_1, y(t+h)) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), \theta_2) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{\gamma}(t+h)) - f(\vec{\gamma}(t))}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t).$$

Exemples

10. Exprimer la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x}(f(x, g(x, y)))$ en termes des dérivées partielles de f et g .

Solution. Rappelons que $\frac{\partial}{\partial x}(f(x, g(x, y)))$ est la dérivée de la fonction d'une variable $x \mapsto f(x, g(x, y))$ avec y fixé. Soit $\vec{\gamma}$ la courbe $x \mapsto (x, g(x, y))$ dans \mathbb{R}^2 . Nous appliquons la règle de la chaîne pour calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x, g(x, y)) = f(\vec{\gamma}(x))$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, g(x, y))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x, y)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y).$$

Noter la différence entre $\frac{\partial}{\partial x}(f(x, g(x, y)))$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x, y))$, la dérivée partielle $\partial f / \partial x$ évaluée au point $(x, g(x, y))$.

11. (Différentiation implicite.) Supposons que la fonction $z = z(x, y)$ satisfasse à l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

avec une fonction F différentiable connue. Calculer $\partial z / \partial y$ en termes de x, y, z .

Solution. On prend la dérivée $\partial / \partial y$ de l'équation en utilisant la règle de la chaîne pour la fonction $y \mapsto F(x, y, z(x, y))$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, z) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

En résolvant cette dernière équation pour $\partial z / \partial y$, on obtient le résultat :

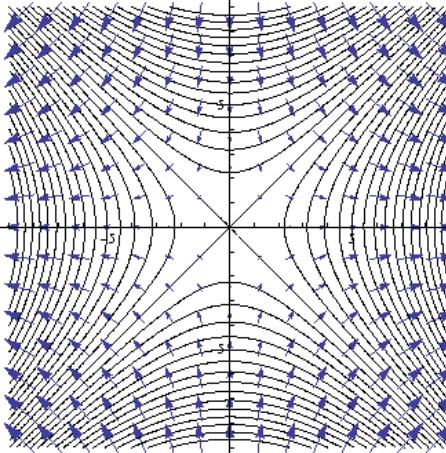
$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)}$$

Gradient et ensembles de niveau

Montrons que le gradient d'une fonction différentiable $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est *orthogonal aux ensembles de niveau* de f dans le sens suivant : soit $N_s = \{\vec{x} \in D \mid f(\vec{x}) = s\}$ un ensemble de niveau, et soit $\vec{\gamma} : I \rightarrow N_s \subseteq \mathbb{R}^n$ une courbe différentiable contenue dans N_s . Alors pour tout $t \in I$, le gradient $\text{grad}f(\vec{\gamma}(t))$ est orthogonal au vecteur tangent $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ de la courbe. En fait, la fonction $t \mapsto f(\vec{\gamma}(t))$ est constante (égale à s), donc sa dérivée s'annule, et en utilisant la règle de la chaîne (10.12) on obtient

$$0 = \frac{d}{dt} f(\vec{\gamma}(t)) = \langle (\text{grad}f)(\vec{\gamma}(t)), \dot{\vec{\gamma}}(t) \rangle.$$

Donc $\text{grad}f(\vec{\gamma}(t))$ est orthogonal au vecteur $\dot{\vec{\gamma}}(t)$.



Courbes de niveau et gradient

Exemple

12. Trouver la droite normale à la surface $S \subseteq \mathbb{R}^3$ donnée par

$$x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$$

au point $\vec{p}_0 = (1, 2, -1)$.

Solution. On vérifie que le point \vec{p}_0 satisfait à l'équation, donc qu'on a vraiment $\vec{p}_0 \in S$. Si \vec{n} est un vecteur perpendiculaire à la surface en \vec{p}_0 , alors la droite normale est donnée sous forme paramétrique par

$$t \mapsto \vec{p}_0 + t\vec{n}.$$

Il suffit donc de trouver \vec{n} . A cette fin, notons que S est l'ensemble de niveau N_0 de la fonction

$$f(x, y, z) := x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z.$$

Comme $\text{grad}f(\vec{p}_0)$ est un vecteur perpendiculaire à S en \vec{p}_0 , on peut prendre $\vec{n} = \text{grad}f(\vec{p}_0)$. Calculons

$$\begin{aligned} \text{grad}f(x, y, z) &= (2xyz - 2z^2, x^2z + 6y, x^2y - 4xz + 8) \\ \vec{n} &= \text{grad}f(1, 2, -1) = (-6, 11, 14). \end{aligned}$$

La droite normale est donc donnée par

$$t \mapsto (1, 2, -1) + t(-6, 11, 14) = (1 - 6t, 2 + 11t, -1 + 14t).$$

Chapitre 11

Extrema des fonctions à plusieurs variables

Considérons une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur $D \subseteq \mathbb{R}^n$. La valeur $f(\vec{a})$ est le *maximum (global)* de la fonction f dans D si pour tout point $\vec{x} \in D$ on a $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$. On dit alors que f possède un maximum en \vec{a} . De même, f a un *minimum (global)* en \vec{a} si $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$ pour tout $\vec{x} \in D$. Un *extremum* (pluriel : extrema ou extremums) de f est un maximum ou un minimum.

On dit que f possède un maximum *local* en \vec{a} s'il existe une boule $B_\delta(\vec{a})$ autour de \vec{a} telle que la restriction de f à cette boule possède un maximum en \vec{a} ; plus explicitement, si on a $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ pour tout $\vec{x} \in B_\delta(\vec{a}) \cap D$.

Rappelons qu'un point \vec{x} est dit un *point intérieur* d'un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^n$ s'il existe une rayon $r > 0$ tel que la boule $B_r(\vec{x}) \subseteq D$.

Théorème. (Condition nécessaire pour un extremum local.) *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède un extremum local au point $\vec{a} \in D$. Si \vec{a} est un point intérieur de D et si le gradient $\text{grad}f(\vec{a})$ existe, alors*

$$\text{grad}f(\vec{a}) = \vec{0}. \quad (11.1)$$

Un point \vec{a} qui satisfait à (11.1) s'appelle un *point critique* de la fonction f . On a donc un système (en général non-linéaire) de n équations pour les composantes a_1, \dots, a_n de \vec{a} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0. \end{aligned}$$

Preuve du théorème. La fonction d'une variable

$$t \mapsto f(t, a_2, \dots, a_n)$$

est définie sur une voisinage de a_1 et possède un extremum local en $t = a_1$. Par conséquent,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=a_1} f(t, a_2, \dots, a_n) = 0.$$

De la même manière on voit que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n) = 0$ pour $j = 2, \dots, n$. \square

Remarquons que la question de l'*existence* d'un maximum ou minimum d'une fonction f sur un ensemble D n'est pas triviale. On peut montrer :

Théorème. *Toute fonction continue sur un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^n$ compact possède (au moins) un maximum et un minimum.*

Ici D est dit *compact* si D est *borné* (c'est-à-dire contenu dans une boule) et *fermé* (c'est-à-dire que le complément $\mathbb{R}^n \setminus D$ est un ensemble ouvert). Par exemple, toute boule fermée $\bar{B}_r(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r\}$ est un ensemble compact. Dans ce cours nous n'insistons pas sur ces notions et sur la question d'*existence*.

Selon le théorème précédent, un extremum de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ peut intervenir seulement en trois sortes de points :

- points intérieurs avec $\text{grad } f(\vec{x}) = \vec{0}$ (points critiques),
- points intérieurs où $\text{grad } f(\vec{x})$ n'existe pas,
- points $\vec{x} \in D$ sur le bord de D .

Le théorème fournit donc une stratégie pour trouver le maximum (et de manière analogue le minimum) d'une fonction dans un domaine D :

Trouver les points intérieurs de D avec $\text{grad } f(\vec{x}) = \vec{0}$ ou dans lesquels $\text{grad } f(\vec{x})$ n'existe pas. Evaluer f en ces points. Comparer avec les valeurs de f sur le bord de D , et prendre la plus grande valeur ainsi trouvée.

Exemples

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^3 - 2y^3.$$

Déterminer si f possède un maximum et/ou un minimum sur $D = \mathbb{R}^2$. Si c'est le cas, les trouver.

Solution. Montrons que $f(x, y) \rightarrow +\infty$ quand $r := \|(x, y)\| \rightarrow \infty$. Par conséquent, f n'a pas de maximum dans \mathbb{R}^2 . A cette fin, écrivons f en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= r^4(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) - r^3(\cos^3 \theta + 2 \sin^3 \theta) \\ &= r^4 \left(A - \frac{B}{r} \right) \rightarrow +\infty \text{ quand } r \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

car

$$A = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \geq \frac{1}{2}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 = \frac{1}{2} \text{ et}$$

$$|B| = |\cos^3 \theta + 2\sin^3 \theta| \leq 1 + 2 = 3.$$

(On a utilisé l'inégalité $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$ pour $a, b \in \mathbb{R}$, que l'on vérifie aisément à partir de l'inégalité $(a-b)^2 \geq 0$.)

Puisque f est continue et comme $f(x, y) \rightarrow +\infty$ quand $r := \|(x, y)\|$ tend vers $+\infty$, il est plausible que f possède un minimum. En fait $f(0, 0) = 0$, et à l'extérieur d'une boule $B_r(\vec{0})$ de rayon r suffisamment grand on a certainement $f \geq 1$ (disons), donc on doit avoir un minimum de valeur ≤ 0 dans un point intérieur de $B_r(\vec{0})$. Comme le gradient de f existe en tout point de \mathbb{R}^2 , les seuls candidats pour le minimum sont les points critiques. On calcule

$$\text{grad } f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (4x^3 - 3x^2, 4y^3 - 6y^2).$$

Les points critiques sont donc les solutions du système

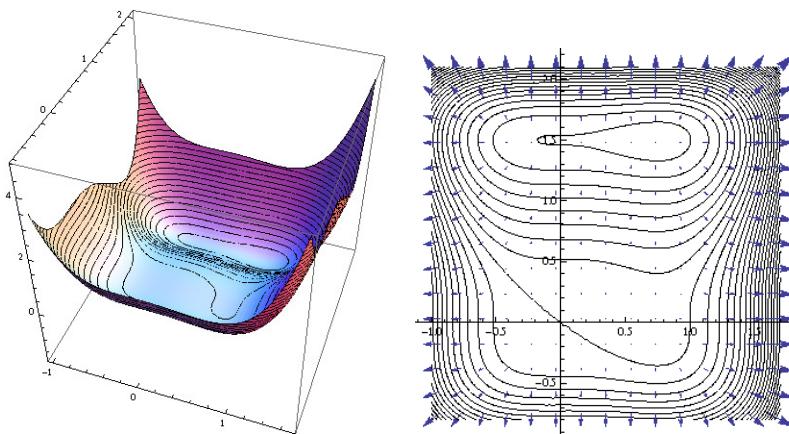
$$\begin{aligned} x^2(4x - 3) &= 0 \\ y^2(4y - 6) &= 0. \end{aligned}$$

On trouve les points critiques $(0, 0)$, $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ et $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$. Les valeurs de f en ces points sont

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, \quad f\left(\frac{3}{4}, 0\right) = -\frac{27}{256}, \quad f\left(0, \frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16} = -1,6875 \\ \text{et } f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right) &= -\frac{459}{256} = -1,79296\dots \end{aligned}$$

Résultat : f n'a pas de maximum dans \mathbb{R}^2 ; l'unique minimum de f est

$$f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{459}{256}.$$



Graphe de f , lignes de niveau et gradient

2. Montrons que la fonction $f(x, y, z) = xy + yz - xz$ n'a pas d'extremum local dans $D = \mathbb{R}^3$. Comme le gradient de f existe partout dans \mathbb{R}^3 , et puisque tout point de \mathbb{R}^3 est un point intérieur de \mathbb{R}^3 , les seuls candidats pour un extremum local sont les points critiques de f . La condition $\text{grad}f(x, y, z) = \vec{0}$ équivaut au système

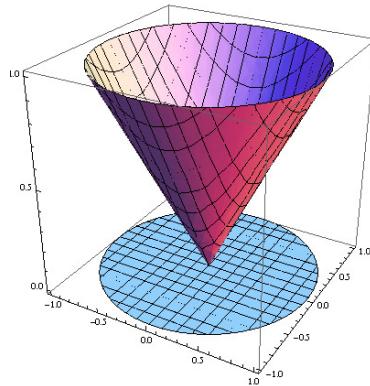
$$\begin{aligned}y - z &= 0 \\x + z &= 0 \\y - x &= 0,\end{aligned}$$

dont la seule solution est $(0, 0, 0)$. Ce point critique n'est pas un extremum local : on a $f(0, 0, 0) = 0$ mais $f(t, t, 0) = t^2 > 0$ et $f(t, 0, t) = -t^2 < 0$ pour tout $t \neq 0$. Ainsi dans tout voisinage de $(0, 0, 0)$ il y a des points où f prend une valeur positive, et d'autre points où f est négative. Donc f n'a pas d'extremum local en $(0, 0, 0)$.

3. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La valeur $f(x, y)$ est la distance du point (x, y) au point $(0, 0)$. Donc f possède le minimum $f(0, 0) = 0$ et pas de maximum dans \mathbb{R}^2 . Le point $(0, 0)$ n'est pas un point critique, mais un point où le gradient n'existe pas.



4. Trouver les maxima et minima de la fonction

$$f(x, y) = xy - x - y + 3$$

dans le triangle $D \subseteq \mathbb{R}^2$ de sommets $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$ et $C = (0, 4)$.

Solution. Le gradient de f existe partout dans \mathbb{R}^2 . Les candidats pour le maximum et le minimum sont donc les points critiques intérieurs à D et les points du bord de D . On trouve $(1, 1)$ comme seul point critique de f , et la valeur correspondante est $f(1, 1) = 2$. Examinons maintenant f sur le bord du triangle, c'est-à-dire sur les segments AB , AC et BC .

- Le segment AB est l'ensemble $AB = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ et } y = 0\}$. Pour la fonction f on obtient sur AB les valeurs $f(x, 0) = -x + 3$ avec $0 \leq x \leq 2$. Cette expression est maximale pour $x = 0$ avec $f(0, 0) = 3$ et minimale pour $x = 2$ avec $f(2, 0) = 1$.

- Le segment AC est l'ensemble $AC = \{(x, y) \mid x = 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 4\}$. Pour la fonction f on obtient sur AC les valeurs $f(0, y) = -y + 3$ avec $0 \leq y \leq 4$. Cette expression est maximale pour $y = 0$ avec $f(0, 0) = 3$ et minimale pour $y = 4$ avec $f(0, 4) = -1$.
- Le segment BC se trouve sur la droite $y = -2x + 4$, en fait BC est l'ensemble $BC = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ et } y = -2x + 4\}$. Pour la fonction f on obtient sur BC les valeurs

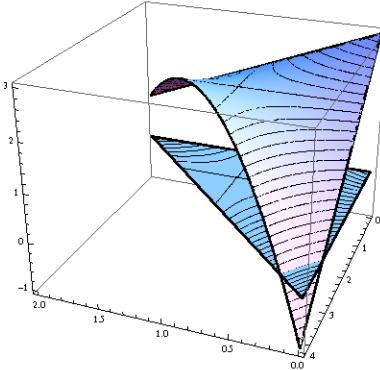
$$f(x, y) = f(x, -2x + 4) = -2x^2 + 5x - 1$$

avec $0 \leq x \leq 2$. Par conséquent, le maximum de f restreint au segment BC est le maximum de la fonction $g(x) = -2x^2 + 5x - 1$ sur l'intervalle $0 \leq x \leq 2$, et de même pour le minimum. Cherchons donc les extrema de g sur $[0, 2]$. On a $g'(x) = -4x + 5$ qui s'annule pour $x = 5/4$, et on trouve $g(0) = -1$, $g(2) = 1$ et $g(5/4) = 17/8 = 2,125$. Le maximum de f sur BC est donc $f(5/4, 3/2) = g(5/4) = 17/8$ et le minimum $f(0, 4) = g(0) = -1$.

Résumons les candidats pour le maximum et le minimum de f sur D :

$$f(1, 1) = 2, \quad f(0, 0) = 3, \quad f(2, 0) = 1, \quad f(0, 4) = -1, \quad f\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right) = \frac{17}{8}.$$

Résultat : le maximum de f est $f(0, 0) = 3$, le minimum $f(0, 4) = -1$.



Dérivées partielles d'ordres supérieurs

Pour une fonction partiellement différentiable dans D , c'est-à-dire en tout point de D , les dérivées partielles $\partial f / \partial x_k$ sont des fonctions sur D . Lorsque ces fonctions sont partiellement différentiables, on définit les n^2 dérivées partielles d'ordre 2,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \partial_{x_j} (\partial_{x_k} f) = \partial_j (\partial_k f).$$

Pour $j = k$, on utilise la notation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} = \partial_{x_k}^2 f = \partial_k^2 f.$$

En prenant les dérivées partielles de ces dérivées partielles, on obtient les dérivées partielles d'ordre 3, 4, etc. La fonction est dite *m-fois continûment différentiable* si toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leq m$ existent et sont continues.

Remarquons qu'il existe des fonctions f pour lesquelles l'ordre des dérivées successives n'est pas indifférent : il arrive que $\partial_{x_j}(\partial_{x_k} f) \neq \partial_{x_k}(\partial_{x_j} f)$. Mais en pratique, c'est plutôt une exception :

Théorème de Schwarz. *Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois continûment différentiable, c'est-à-dire si les dérivées partielles d'ordre deux existent et sont continues, alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}.$$

En appliquant ce théorème plusieurs fois, on conclut que, si f est m -fois continûment différentiable, alors pour chaque dérivée partielle d'ordre $\leq m$ de f l'ordre des dérivées successives est indifférent.

Exemple

5. Vérifions le théorème de Schwarz pour la fonction $f(x, y) = \sin(xy^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sin(xy^2) &= \frac{\partial}{\partial x} (\cos(xy^2) \cdot 2xy) \\ &= -\sin(xy^2) \cdot y^2 \cdot 2xy + \cos(xy^2) \cdot 2y \\ &= -2xy^3 \sin(xy^2) + 2y \cos(xy^2) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \sin(xy^2) &= \frac{\partial}{\partial y} (\cos(xy^2) \cdot y^2) \\ &= -\sin(xy^2) \cdot 2xy \cdot y^2 + \cos(xy^2) \cdot 2y \\ &= -2xy^3 \sin(xy^2) + 2y \cos(xy^2) \end{aligned}$$

et on a bien

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

La formule de Taylor

Rappelons¹ la formule de Taylor pour une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ d'une variable réelle ($m+1$)-fois différentiable (voir p. 35) :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2 + \dots + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0)t^m + R_{m+1} \quad (11.2)$$

avec le reste de Lagrange

$$R_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\vartheta) t^{m+1} \quad (11.3)$$

pour un ϑ entre 0 et t .

¹Si vous trouvez cette section indigeste, continuez avec la version simplifiée (11.6) de la section suivante.

Considérons maintenant une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de n variables qui soit $(m+1)$ -fois continûment différentiable. Fixons un point $\vec{x} \in D$ et un vecteur $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, et supposons que le segment entre \vec{x} et $\vec{x} + \vec{h}$, donné par $\vec{x} + t\vec{h}$ ($0 \leq t \leq 1$), soit contenu dans D . Alors la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(t) := f(\vec{x} + t\vec{h})$$

est $(m+1)$ -fois différentiable, et on peut appliquer la formule (11.2). Calculons les dérivées de φ en utilisant la règle de la chaîne plusieurs fois :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= f(\vec{x} + t\vec{h}) \\ \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n \partial_i f(\vec{x} + t\vec{h}) h_i \\ \varphi''(t) &= \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(\vec{x} + t\vec{h}) h_i h_j \\ \varphi'''(t) &= \sum_{i,j,k=1}^n \partial_i \partial_j \partial_k f(\vec{x} + t\vec{h}) h_i h_j h_k\end{aligned}$$

et donc pour $t = 0$

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= f(\vec{x}) \\ \varphi'(0) &= \sum_{i=1}^n \partial_i f(\vec{x}) h_i \\ \varphi''(0) &= \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(\vec{x}) h_i h_j \\ \varphi'''(0) &= \sum_{i,j,k=1}^n \partial_i \partial_j \partial_k f(\vec{x}) h_i h_j h_k.\end{aligned}$$

Afin d'écrire le terme général, il est préférable de désigner les indices d'une manière systématique, par exemple $j_1, j_2, j_3 \dots$ au lieu de i, j, k, \dots . On arrive alors à

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \partial_{j_1} \partial_{j_2} \dots \partial_{j_k} f(\vec{x} + t\vec{h}) h_{j_1} h_{j_2} \dots h_{j_k}.$$

En substituant ces résultats dans (11.2) et en posant $t = 1$ nous obtenons la **formule de Taylor** pour les fonctions de n variables :

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(\vec{x}) h_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(\vec{x}) h_i h_j + \dots + R_{m+1}(\vec{h}) \quad (11.4)$$

A l'aide de la formule (11.3), on trouve

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{R_{m+1}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|^m} = 0. \quad (11.5)$$

La valeur $f(\vec{x} + \vec{h})$ s'écrit donc comme polynôme de degré m dans les n variables h_1, \dots, h_n plus un reste R_{m+1} . Notons que pour $m = 1$ cette formule se réduit à l'égalité (10.9).

Le second terme du côté droit de (11.4) nous est bien connu :

$$\sum_{i=1}^n \partial_i f(\vec{x}) h_i = \langle \text{grad} f(\vec{x}), \vec{h} \rangle = df_{\vec{x}}(\vec{h}),$$

la différentielle de f en \vec{x} , appliquée au vecteur \vec{h} (voir (10.3)).

Le troisième terme est un exemple d'une *forme quadratique* dans le sens de l'algèbre linéaire, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$q(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j.$$

On appelle le système des n^2 coefficients a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ la *matrice* de la forme quadratique. Dans notre cas c'est la matrice

$$\partial_i \partial_j f(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x})$$

des dérivées partielles d'ordre 2, appelée *matrice hessienne* de f en \vec{x} , d'après le mathématicien Ludwig Otto Hesse (1811–1874). Elle est symétrique ($a_{ij} = a_{ji}$) en raison du théorème de Schwarz.

Formule de Taylor et extrema locaux

Pour simplifier la discussion, considérons maintenant des fonctions de deux variables $f(x_1, x_2) = f(x, y)$ et la formule de Taylor (11.4) dans le cas particulier $m = 2$. Cette formule s'écrit maintenant, avec la notation abrégée $\partial_{xx} f = \partial_x \partial_x f$ et, en utilisant le théorème de Schwarz, $\partial_{xy} f = \partial_x \partial_y f = \partial_{yx} f$,

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) \\ &\quad + \partial_x f(x, y)h + \partial_y f(x, y)k \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\partial_{xx} f(x, y)h^2 + 2\partial_{xy} f(x, y)hk + \partial_{yy} f(x, y)k^2 \right) \\ &\quad + R_3(h, k). \end{aligned} \tag{11.6}$$

avec

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R_3(h, k)}{h^2 + k^2} = 0. \tag{11.7}$$

La dernière égalité dit que, pour $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, le reste $R_3(h, k)$ tend vers zéro plus vite que $h^2 + k^2$. Donc aux points $(x+h, y+k)$ d'un voisinage suffisamment petit de (x, y) , la fonction f est bien approchée par un polynôme de degré ≤ 2 dans les variables h, k .

On peut utiliser la formule de Taylor afin de décider si un point critique (x, y) de f est un extremum local. Dans un tel point, on a

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= 0 \\ \partial_y f(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

et la formule (11.6) se simplifie. Ecrivons pour le moment

$$a = \partial_{xx} f(x, y), \quad b = \partial_{xy} f(x, y) \quad \text{et} \quad c = \partial_{yy} f(x, y),$$

afin d'alléger la notation. Alors

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) \\ &\quad + \frac{1}{2}(ah^2 + 2bhk + ck^2) + R_3(h, k). \end{aligned} \tag{11.8}$$

Si le terme

$$\frac{1}{2}(ah^2 + 2bhk + ck^2) + R_3(h, k) \tag{11.9}$$

est positif pour tout (h, k) suffisamment proche de $(0, 0)$, alors on a

$$f(x+h, y+k) \geq f(x, y)$$

pour de tels (h, k) , et donc f possède un minimum local en (x, y) . S'il est négatif, f possède un maximum local en (x, y) . Et si dans tout voisinage de $(0, 0)$ il existe des points (h, k) où le terme prend une valeur strictement positive, et d'autre points où il est strictement négatif, alors f n'a pas d'extremum local en (x, y) . Il faut donc comprendre le signe de l'expression (11.9) pour tout (h, k) «suffisamment proche» de $(0, 0)$.

Comme R_3 est «petit» pour (h, k) proche de $(0, 0)$, c'est le terme

$$q(h, k) := ah^2 + 2bhk + ck^2$$

qui devrait déterminer le signe dans (11.9), sauf dans certains cas dégénérés comme $a = b = c = 0$. Supposons que $a \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} q(h, k) &= a \left(h^2 + \frac{2b}{a}hk + \frac{c}{a}k^2 \right) \\ &= a \left(\left(h + \frac{b}{a}k \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2} \right)k^2 \right) \\ &= a \left(\xi^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}k^2 \right) \end{aligned}$$

avec $\xi = h + \frac{b}{a}k$. On voit qu'il y a plusieurs cas :

- si $ac - b^2 > 0$ et $a > 0$, alors $q(h, k) > 0$ pour tout $(h, k) \neq 0$;
- si $ac - b^2 > 0$ et $a < 0$, alors $q(h, k) < 0$ pour tout $(h, k) \neq 0$;
- si $a \neq 0$ et $ac - b^2 < 0$, alors $q(h, k)$ prend des valeurs positives et des valeurs négatives dans tout voisinage de $(0, 0)$.

On peut montrer que, sous la condition $ac - b^2 \neq 0$, le reste R_3 n'a pas d'influence sur le signe de l'expression (11.9) pour les (h, k) suffisamment proches de $(0, 0)$. On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème. (Condition suffisante pour un extremum local.) *Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un point critique de la fonction f , et soit f deux fois continûment différentiable dans un voisinage de (x, y) . Soit*

$$\Delta := \partial_{xx}f \partial_{yy}f - (\partial_{xy}f)^2. \tag{11.10}$$

- si au point critique (x, y) on a $\Delta > 0$ et $\partial_{xx}f > 0$, alors f possède un minimum local en (x, y) ;

- si au point critique (x, y) on a $\Delta > 0$ et $\partial_{xx}f < 0$, alors f possède un maximum local en (x, y) ;
- si au point critique (x, y) on a $\Delta < 0$, alors f ne possède pas d'extremum local en (x, y) .

Remarques

1. Le terme $\Delta = \partial_{xx}f \partial_{yy}f - (\partial_{xy}f)^2$ est le déterminant de la matrice hessienne de f :

$$\text{Hess } f := \begin{pmatrix} \partial_{xx}f & \partial_{xy}f \\ \partial_{yx}f & \partial_{yy}f \end{pmatrix}.$$

2. Si $\Delta = 0$, alors le théorème ne permet pas de conclusion sur la nature du point critique.
3. On peut étendre le théorème aux fonctions d'un nombre arbitraire n de variables, donnant des conditions suffisantes pour un extremum (ou non-extremum) en termes de la matrice hessienne de f .

Exemples

6. $f(x, y) = xy$.

Le seul point critique est $(0, 0)$ avec $\Delta(0, 0) = -1 < 0$. Donc f ne possède pas d'extremum local dans \mathbb{R}^2 .

7. $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$.

Recherche des points critiques :

$$\begin{aligned}\partial_x f &= \cos x \cdot \sin y = 0 \\ \partial_y f &= \sin x \cdot \cos y = 0.\end{aligned}$$

Il y a deux cas : si x est tel que $\sin x = 0$, alors $\cos x \neq 0$ et donc $\sin y = 0$. Mais si x est tel que $\sin x \neq 0$, alors $\cos y = 0$, donc $\sin y \neq 0$ et $\cos x = 0$. Donc (x, y) est un point critique si et seulement si $\sin x = \sin y = 0$ ou $\cos x = \cos y = 0$. Par conséquent, les points critiques sont les points

$$(m\pi, n\pi) \text{ et } \left((m + \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi\right)$$

avec $m, n \in \mathbb{Z}$. On trouve

$$\begin{aligned}\partial_{xx}f &= -\sin x \cdot \sin y \\ \Delta(x, y) &= \sin^2 x \cdot \sin^2 y - \cos^2 x \cdot \cos^2 y.\end{aligned}$$

Considérons les points critiques :

$$\Delta(m\pi, n\pi) = -1 < 0,$$

donc il n'y a pas d'extremum local en $(m\pi, n\pi)$;

$$\begin{aligned}\Delta\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) &= 1 > 0 \\ \partial_{xx}f\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) &= -(-1)^{m+n};\end{aligned}$$

donc en $\left((m + \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi\right)$ il y a un maximum local si m et n ont la même parité, et un minimum dans le cas contraire.

$$8. f(x, y) = x^4 + y^2.$$

Le seul point critique est l'origine $(0, 0)$, et on trouve que $\Delta(0, 0) = 0$. Le théorème ne permet pas de conclusion. Mais comme $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) > 0$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, il y a un minimum local (même global) en $(0, 0)$.

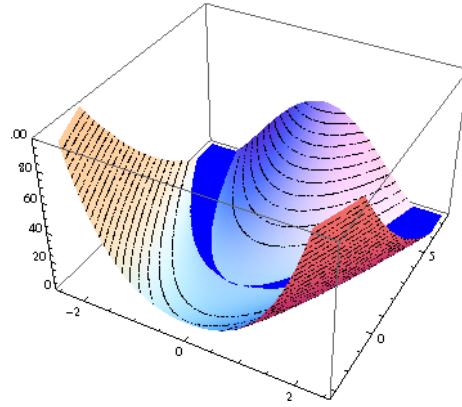
$$9. f(x, y) = (y - 2x^2)(y - x^2) = y^2 - 3x^2y + 2x^4.$$

Recherche des points critiques :

$$\begin{aligned}\partial_x f &= 8x^3 - 6xy = 0 \\ \partial_y f &= 2y - 3x^2 = 0.\end{aligned}$$

On voit facilement que $(0, 0)$ est le seul point critique, et on trouve que $\Delta(0, 0) = 0$. Le théorème ne donne pas de conclusion.

La fonction est positive à l'intérieur de la parabole $\{y = x^2\}$ et à l'extérieur de $\{y = 2x^2\}$, et elle est négative entre les deux paraboles. Dans chaque voisinage de $(0, 0)$ on trouve donc des points où la valeur de f est négative, et d'autres où elle est positive ; par conséquent f n'a pas d'extremum local en $(0, 0)$. Mais si l'on *restreint* f à une droite passant par $(0, 0)$, on trouve toujours un minimum local en $(0, 0)$. Il ne suffit donc en général pas de contrôler f seulement sur les droites passant par un point critique.



Niveau de la mer en $z = 0$

Multiplicateurs de Lagrange

Revenons aux fonctions de n variables $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Souvent on est amené à chercher un extremum de f parmi les points $\vec{x} \in D$ satisfaisant à une contrainte de la forme $g(\vec{x}) = 0$ pour une autre fonction $g : D \rightarrow \mathbb{R}$. On cherche donc le maximum ou le minimum de la restriction $f|_{N_0} : N_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de f à l'ensemble de niveau

$$N_0 := \{\vec{x} \in D \mid g(\vec{x}) = 0\}.$$

Supposons que f et g soient continûment différentiables dans D .

Théorème. Soit $\vec{a} \in N_0$ un point intérieur de D tel que $f|_{N_0}$ possède un extremum local en \vec{a} . Si $\text{grad } g(\vec{a}) \neq \vec{0}$, alors le gradient $\text{grad } f(\vec{a})$ est un multiple de $\text{grad } g(\vec{a})$, c'est-à-dire il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{grad } f(\vec{a}) = \lambda \text{grad } g(\vec{a}). \quad (11.11)$$

Le nombre λ s'appelle *multiplicateur de Lagrange*.

Idée de la preuve. Nous avons vu (p. 122) que $\text{grad } g(\vec{a})$ est orthogonal à l'ensemble de niveau N_0 au point \vec{a} . Montrons que c'est aussi le cas pour $\text{grad } f(\vec{a})$. Soit $\vec{\gamma} : I \rightarrow N_0$ une courbe différentiable arbitraire dans N_0 avec $\vec{\gamma}(0) = \vec{a}$. Alors la fonction (d'une variable réelle) $t \mapsto f(\vec{\gamma}(t))$ possède un extremum local en $t = 0$, donc sa dérivée s'annule, et avec la règle de la chaîne (10.12) on obtient

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\vec{\gamma}(t)) = \langle \text{grad } f(\vec{a}), \dot{\vec{\gamma}}(0) \rangle.$$

Donc $\text{grad } f(\vec{a})$ est orthogonal au vecteur $\dot{\vec{\gamma}}(0)$.

Comme les deux vecteurs $\text{grad } f(\vec{a})$ et $\text{grad } g(\vec{a})$ sont orthogonaux à l'ensemble N_0 , ils doivent avoir la même direction, et ainsi $\text{grad } f(\vec{a}) = \lambda \text{grad } g(\vec{a})$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le théorème fournit une méthode pour trouver les extrema d'une fonction f dans un domaine D sous la contrainte $g(\vec{x}) = 0$. On a en tout $n+1$ équations pour $n+1$ inconnues, les n coordonnées a_1, \dots, a_n du point cherché \vec{a} , et le multiplicateur de Lagrange λ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) &= 0 \\ g(a_1, \dots, a_n) &= 0 \end{aligned} \quad (11.12)$$

Exemple

10. On cherche le maximum de la fonction

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

pour $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ sous la contrainte $x_1 + \dots + x_n = c$, avec une constante $c > 0$.

Calculons d'abord

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} &= \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}-1} x_2 \dots x_n \\ &= \frac{1}{n} \frac{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}{x_1}. \end{aligned}$$

Avec $g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n - c$, le système (11.12) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}{a_1} - \lambda &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{1}{n} \frac{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}{a_n} - \lambda &= 0 \\ a_1 + \dots + a_n - c &= 0. \end{aligned}$$

On trouve une seule solution $a_1 = \dots = a_n = c/n$. Elle donne le maximum de f ,

$$f\left(\frac{c}{n}, \dots, \frac{c}{n}\right) = \frac{c}{n}.$$

Par conséquent, on a l'*inégalité arithmético-géométrique*

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

pour tout $x_1, \dots, x_n > 0$. Elle dit que la *moyenne géométrique* $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$ de nombres positifs est plus petite ou égale à leur *moyenne arithmétique* $(x_1 + \dots + x_n)/n$.

Chapitre 12

Intégrales multiples

Il serait trop ambitieux de présenter ici une introduction rigoureuse au calcul intégral de fonctions de plusieurs variables. Mais étudions de quoi l'on parle et comment on peut calculer certaines intégrales. Nous nous restreignons au cas d'une fonction de deux variables $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ où le domaine D a une forme « simple ».

Intégration sur un rectangle

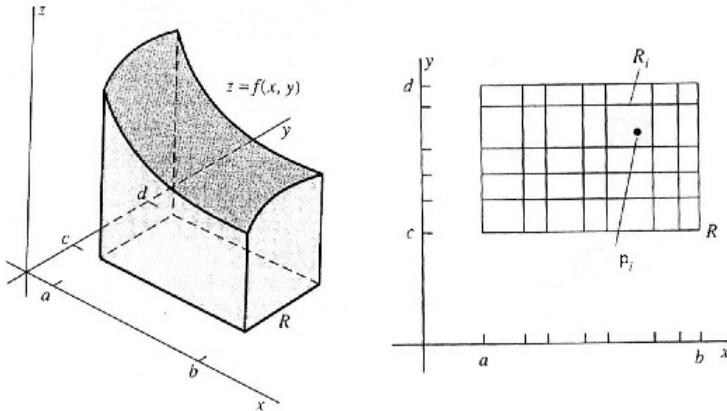
Commençons avec le cas où le domaine est un rectangle

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

dans \mathbb{R}^2 . Pour une fonction $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives, l'intégrale, dénotée par

$$\iint_R f(x, y) dA \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x, y) dx dy,$$

doit représenter le volume du corps solide compris entre le domaine R dans le plan x, y et le graphe de la fonction f . Afin de définir cette intégrale en général, subdivisons R en sous-rectangles R_1, \dots, R_N et choisissons un point p_i dans chaque R_i .



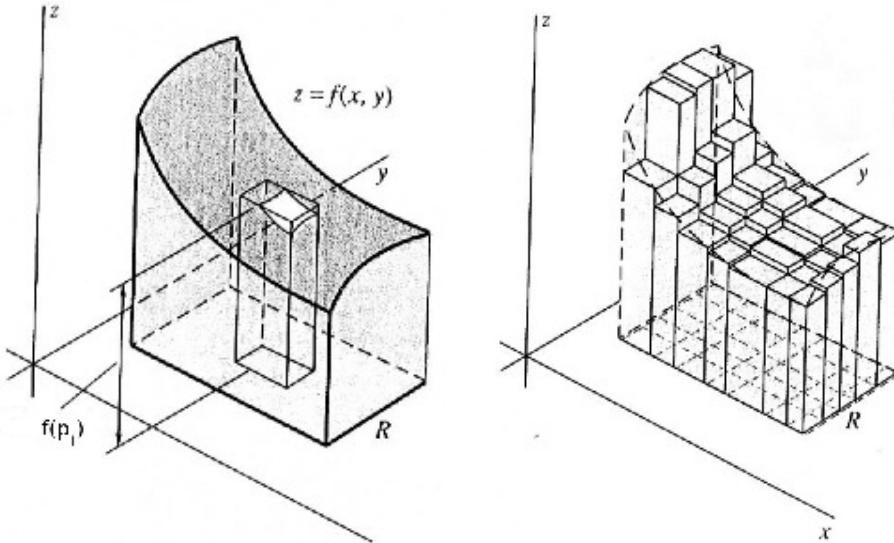
Comme dans le chapitre 5, appelons une telle subdivision du domaine R avec des points $p_i \in R_i$ une *subdivision décorée* :

$$\Delta = (R_1, \dots, R_N; p_1, \dots, p_N).$$

Alors la somme

$$S(f, \Delta) := \sum_{i=1}^N f(p_i) \cdot \text{aire}(R_i)$$

s'appelle *somme de Riemann* de f associée à la subdivision décorée Δ .



Le *pas* d'une subdivision (décorée), noté $h(\Delta)$, est défini comme le plus grand diamètre de toutes les sous-rectangles R_i .

Définition. La fonction $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ est dit *intégrable* (sur R , au sens de Riemann) si pour toute suite $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ de subdivisions décorées Δ_m avec $h(\Delta_m) \rightarrow 0$ pour $m \rightarrow \infty$, la limite des sommes de Riemann associées $S(f, \Delta_m)$ existe. Si c'est le cas, alors cette limite ne dépend pas de la suite $(\Delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ choisie, et on définit l'intégrale de f comme limite des sommes de Riemann :

$$\iint_R f(x, y) dA := \lim_{m \rightarrow \infty} S(f, \Delta_m).$$

De manière plutôt symbolique, on écrit cette définition sous la forme

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\text{pas}(\Delta) \rightarrow 0} \sum_i f(p_i) \text{aire}(R_i).$$

On peut montrer que toute fonction continue est intégrable sur R .

Intégrales doubles

On peut calculer l'intégrale d'une fonction intégrable f sur un rectangle R comme une intégrale itérée :

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Donc en premier lieu, on fixe y et on calcule l'intégrale de la fonction

$$x \mapsto f(x, y)$$

sur $x \in [a, b]$. Le résultatat $\int_a^b f(x, y) dx$ dépend de y . Ensuite on prend l'intégrale de la fonction

$$y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$$

sur $y \in [c, d]$. On arrive au même résultat si l'on prend les intégrales dans l'ordre inverse, c'est-à-dire

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

ou, plus brièvement,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx. \quad (12.1)$$

On peut comprendre l'égalité (12.1), comme suit. Considérons des subdivisions décorées pour les intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ dans le sens du chapitre 5 (p. 45) : nous avons donc

$$\begin{aligned} x_0, \dots, x_m; \xi_1, \dots, \xi_m &\text{ pour } [a, b] \\ y_0, \dots, y_n; \eta_1, \dots, \eta_n &\text{ pour } [c, d] \end{aligned}$$

avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ et de manière analogue pour les y_k et η_k . Ces deux subdivisions nous donnent une subdivision du rectangle R en $m \cdot n$ sous-rectangles (numérotés avec un double-indice) R_{jk} ($j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$) définis par

$$R_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k].$$

Prenons les points $p_{jk} := (\xi_j, \eta_k) \in R_{jk}$ comme «décoration» de cette subdivision de R . Alors la somme de Riemann correspondante s'écrit

$$\begin{aligned} S(f, \Delta) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_j, \eta_k) \text{aire}(R_{jk}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_j, \eta_k) (x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m f(\xi_j, \eta_k) (x_j - x_{j-1}) \right) (y_k - y_{k-1}). \end{aligned}$$

Fixons pour le moment la subdivision de l'intervalle $[c, d]$, mais laissons le pas de la subdivision de $[a, b]$ tendre vers 0. Alors

$$\sum_{j=1}^m f(\xi_j, \eta_k) (x_j - x_{j-1}) \longrightarrow \int_a^b f(x, \eta_k) dx$$

et par conséquent

$$S(f, \Delta) \longrightarrow \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f(x, \eta_k) dx \right) (y_k - y_{k-1}).$$

Mais cette dernière expression est une somme de Riemann pour la fonction

$$y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx,$$

et si maintenant le pas de la subdivision de $[c, d]$ tend vers 0, alors cette somme de Riemann tend vers l'intégrale

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Donc

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\text{pas}(\Delta) \rightarrow 0} S(f, \Delta) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Dans ce calcul, on peut changer l'ordre d'intégration puisque on peut changer l'ordre de sommation :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m f(\xi_j, \eta_k) (x_j - x_{j-1}) \right) (y_k - y_{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_j, \eta_k) (y_k - y_{k-1}) \right) (x_j - x_{j-1}) \end{aligned}$$

Domaines plus généraux

Comment définir l'intégrale d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^2$ qui n'est pas un rectangle ? Admettons que D soit borné. Alors on considère un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ qui contient D , et on étend la fonction f «comme zéro» en une fonction $\hat{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur R , c'est-à-dire

$$\hat{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

La fonction f est dite *intégrable sur D* si la fonction étendue \hat{f} est intégrable sur le rectangle R , et dans ce cas on définit

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R \hat{f}(x, y) dA. \quad (12.2)$$

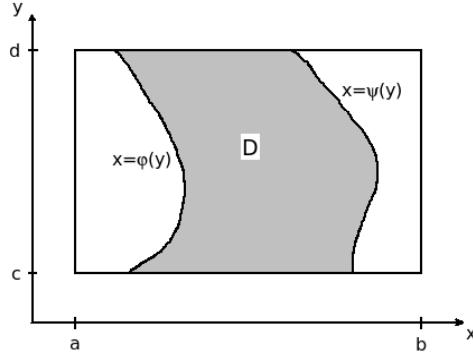
Remarquons que en général la fonction \hat{f} n'est pas continue même si f l'est : il y a un «saut» sur le bord de D . Cependant on peut montrer que, sous des hypothèses assez faibles sur le domaine D (le bord de D doit être un ensemble «négligeable»), toute fonction f qui est continue sur D est intégrable sur D . Pour une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives, l'intégrale représente le volume du corps solide compris entre le domaine D dans le plan x, y et le graphe de la fonction f . Les points $(x, y) \in R$ à l'extérieur de D ne contribuent pas de volume puisque $\hat{f}(x, y) = 0$.

Afin de calculer l'intégrale (12.2), supposons maintenant que le domaine D soit de la forme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

avec deux fonctions continues φ et ψ . (Dans cette description de D , les rôles de x et y peuvent être interchangés.)

Choisissons deux constantes a, b avec $a \leq \varphi(y)$ et $\psi(y) \leq b$ pour tout $y \in [c, d]$. Alors D est contenu dans le rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$.



Avec les formules (12.2) et (12.1) on obtient

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dA &= \iint_R \hat{f}(x, y) dA \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \hat{f}(x, y) dx \right) dy.\end{aligned}$$

Or

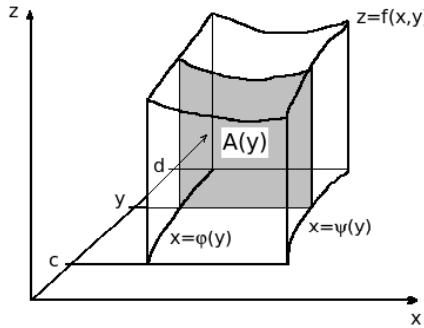
$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pour } x \in [\varphi(y), \psi(y)] \\ 0 & \text{pour } x \notin [\varphi(y), \psi(y)]. \end{cases}$$

Par conséquent, $\int_a^b \hat{f}(x, y) dx = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$ et donc

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad (12.3)$$

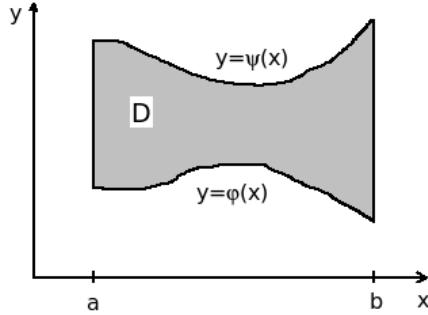
Pour une fonction f positive, on peut interpréter le résultatat (12.3) comme suit : on coupe le corps solide entre le domaine D et le graphe de f en « tranches » $y = \text{const}$. La tranche obtenue en fixant y a l'aire $A(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$ et on obtient le volume du corps en intégrant cette aire (« principe de Cavalieri ») :

$$\text{volume} = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$



Dans le raisonnement conduisant à (12.3), les rôles de x et y peuvent être interchangés. On arrive ainsi à la formule correspondante pour les domaines D de la forme

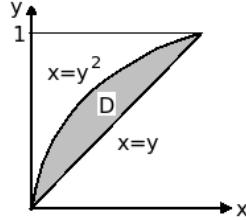
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$



$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (12.4)$$

Exemples

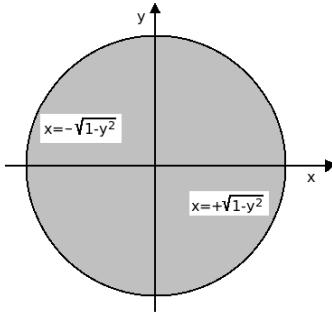
1. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\}$ et $f(x, y) = x + y$. On applique la formule (12.3) avec $\varphi(y) = y^2$ et $\psi(y) = y$:



$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^y (x + y) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2}x^2 + xy \right]_{y^2}^y \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}y^2 - y^3 - \frac{1}{2}y^4 \right) dy = \left[\frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{10}y^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

2. Soit le disque unité $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x, y) = x^2$. Alors D peut être décrit par les inégalités $-1 \leq y \leq 1$ et

$$-\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq +\sqrt{1 - y^2}.$$



Par conséquent,

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} x^2 dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left(\left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (1-y^2)^{3/2} dy = \frac{4}{3} \int_0^1 (1-y^2)^{3/2} dy.\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est évaluée au moyen de la substitution $y = \sin \varphi$ pour $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. A l'aide de l'identité

$$\cos^4 \varphi = \frac{1}{8} (\cos(4\varphi) + 4 \cos(2\varphi) + 3)$$

on obtient finalement

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Le même résultat est obtenu si l'on change l'ordre de l'intégration :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} x^2 dy \right) dx = 4 \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Un calcul utilisant de nouveau la substitution $y = \sin \varphi$ donne le résultat $\pi/4$.

Changement de variables

Pour certaines intégrales, un *changement de coordonnées* peut simplifier le calcul. Le théorème suivant donne la «règle de substitution» pour les fonctions de deux variables.

Théorème. Soit $T : \hat{D} \rightarrow D$ une application bijective définie par deux fonctions continûment différentiables :

$$T(u, v) = (T_1(u, v), T_2(u, v)) =: (x(u, v), y(u, v)).$$

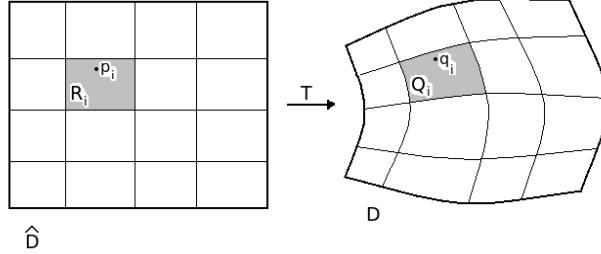
Alors, pour tout $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\hat{D}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad (12.5)$$

Ici $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ est le déterminant jacobien de f , défini par

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}. \quad (12.6)$$

La preuve de ce théorème n'est pas simple, mais la présence du facteur (12.6) s'explique comme suit. Supposons que \widehat{D} soit un rectangle. Choisissons une subdivision décorée $(R_1, \dots, R_N; p_1, \dots, p_N)$ de \widehat{D} avec un pas très petit. Soit Q_i l'image du rectangle R_i sous l'application T , c'est-à-dire $Q_i = T(R_i)$, et soit $q_i = T(p_i)$.



On peut montrer que, pour un rectangle R_i suffisamment petit, l'image Q_i est presque un parallélogramme avec

$$\text{aire}(Q_i) \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| (p_i) \cdot \text{aire}(R_i).$$

Alors

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &\approx \sum_i f(q_i) \cdot \text{aire}(Q_i) \\ &\approx \sum_i f(T(p_i)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| (p_i) \cdot \text{aire}(R_i) \\ &\approx \iint_{\widehat{D}} f(T(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| (u, v) du dv. \end{aligned}$$

Exemple : Coordonnées polaires

Considérons un cas particulier. Pour intégrer une fonction sur un disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq R\}$, l'utilisation de *coordonnées polaires* r, φ est souvent pratique :

$$x = r \cos \varphi$$

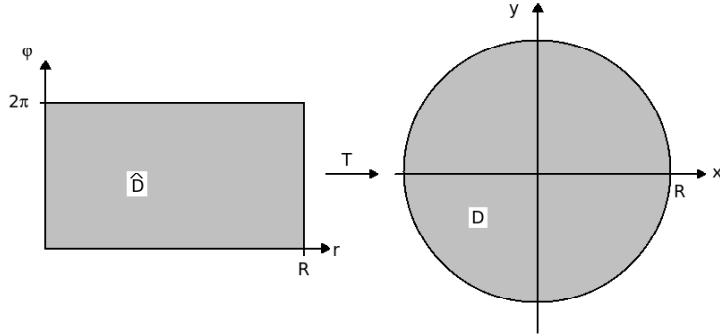
$$y = r \sin \varphi.$$

Dans ce cas, l'application $T : \widehat{D} \rightarrow D$ du théorème est donnée par

$$T(r, \varphi) = (x(r, \varphi), y(r, \varphi)) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

avec

$$\widehat{D} = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$



Pour le déterminant jacobien on obtient

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r$$

et, par conséquent, la formule (12.5) devient

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (12.7)$$

Dans la dérivation de (12.7) nous avons d'ailleurs triché en appliquant le théorème : T n'est pas une application *bijjective* de \hat{D} sur D . (Par exemple, on a $T(r, 0) = T(r, 2\pi)$ pour tout $r \in [0, R]$, donc T n'est pas injective.) Pour rendre l'argument rigoureux, on remarque que l'application T devient bijective quand on enlève les ensembles $N_1 \subseteq \hat{D}$ et $N_2 \subseteq D$ suivants :

$$N_1 := \{(r, \varphi) \in \hat{D} \mid r = 0 \text{ ou } \varphi = 2\pi\}$$

$$N_2 := \{(x, y) \in D \mid y = 0 \text{ et } x \geq 0\}$$

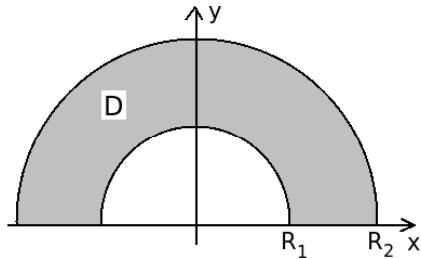
On peut donc appliquer le théorème à $T : \hat{D} \setminus N_1 \rightarrow D \setminus N_2$, où $\hat{D} \setminus N_1$ dénote l'ensemble \hat{D} privé de N_1 . Mais les ensembles N_1 et N_2 sont « négligeables » pour l'intégration car ils ont une aire égale à zéro. Donc l'intégrale d'une fonction sur \hat{D} a la même valeur que l'intégrale sur $\hat{D} \setminus N_1$, et de même pour D et $D \setminus N_2$. Ainsi l'on arrive à (12.7).

On peut facilement adapter la formule (12.7) pour qu'elle s'applique à d'autres domaines que des cercles centrés à l'origine. Par exemple, le domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R_1 \leq x^2 + y^2 \leq R_2, y \geq 0\}$$

correspond au rectangle $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ en coordonnées polaires. Donc

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$



Exemples

3. Reprenons l'intégrale $\iint_D x^2 dx dy$, où D est le disque unité. En coordonnées polaires, cette intégrale se calcule comme suit :

$$\iint_D x^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \cos \varphi)^2 r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

4. Il n'existe pas de primitive de e^{-x^2} composée de fonctions élémentaires. Voici cependant un calcul astucieux de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ utilisant une intégrale double. Soit le quadrant $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$. Alors

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2} dy \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy \\ &= \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

L'intégrale cherchée est donc

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Chapitre 13

Séries de Fourier

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *périodique* de période T lorsque $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions périodiques servent à la description des phénomènes naturels périodiques, tels que les ondes mécaniques (comme le son) ou électromagnétiques (comme la lumière), les marées, les mouvements de planètes, le rythme cardiaque et les ondes cérébrales.

Polynômes trigonométriques

Pour étudier des fonctions périodiques on peut se restreindre à la période 2π : donnée une fonction périodique f de période T , la fonction $g(x) := f(\frac{T}{2\pi}x)$ est de période 2π . Les fonctions de période 2π les plus simples sont

$$\begin{aligned} \sin(kx) &\quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \dots \\ \cos(kx) &\quad \text{pour } k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

et leurs combinaisons linéaires avec des coefficients constants $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, appelées *polynômes trigonométriques* :

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx). \quad (13.1)$$

(On verra plus tard pourquoi on écrit le terme constant sous la forme $a_0/2$ au lieu de a_0 .)

Produit scalaire

Le *produit scalaire* de deux fonctions 2π -périodiques (continues) est défini par

$$\langle f | g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx. \quad (13.2)$$

Comme dans la géométrie euclidienne on a une notion de *norme* et de *distance* associée à ce produit scalaire : la *norme* d'une fonction est définie comme

$$\|f\| := \sqrt{\langle f | f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx}, \quad (13.3)$$

et la *distance* entre deux fonctions f, g est définie par

$$\text{dist}(f, g) := \|f - g\|. \quad (13.4)$$

On dit qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions converge en moyenne quadratique vers une fonction f si la distance entre f_n et f tend vers zéro pour $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire si

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

Il y a plusieurs manières de définir une distance entre des fonctions. La norme et la distance que nous venons d'introduire (sans ou avec un facteur $1/\pi$ ou $1/(2\pi)$) s'appellent la norme et la distance «de moyenne quadratique» ou « L^2 », d'après Henri Lebesgue (1875–1941) et à cause de l'exposant 2 sous l'intégrale dans (13.3). Mais il existe aussi des normes L^p pour $p \neq 2$, entre autres. Chaque concept de distance donne lieu à sa propre notion de convergence.

Relations d'orthogonalité. Pour $k = 1, 2, 3, \dots$ soient c_k la fonction $x \mapsto \cos(kx)$ et s_k la fonction $x \mapsto \sin(kx)$. Soit c_0 la fonction constante $c_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$. Alors un calcul explicite des intégrales montre que

$$\langle c_j | c_k \rangle = \langle s_j | s_k \rangle = \delta_{jk} \quad \text{et} \quad \langle c_j | s_k \rangle = 0 \quad (13.5)$$

où δ_{jk} est le symbole de Kronecker $\delta_{jk} := \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$

Vérifions la première égalité de (13.5) pour $j, k \geq 1$: avec l'identité

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

on obtient

$$\begin{aligned} \langle c_j | c_k \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(jx) \cos(kx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((j-k)x) + \cos((j+k)x)) dx, \end{aligned}$$

et comme

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } m = 0, \end{cases}$$

l'identité $\langle c_j | c_k \rangle = \delta_{jk}$ s'ensuit.

Remarquons que le facteur $1/\pi$ est introduit dans la définition du produit scalaire afin d'obtenir les relations (13.5). En termes d'algèbre linéaire on peut décrire la situation comme suit : soit V l'espace vectoriel de toutes les fonctions continues 2π -périodiques. Alors V muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un espace euclidien (ou préhilbertien). Les «relations d'orthogonalité» (13.5) signifient que le système de fonctions $c_0, c_1, c_2, \dots, s_1, s_2, \dots$ est un système orthonormal dans cet espace.

La série de Fourier d'une fonction

Une série trigonométrique est une série de la forme

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx). \quad (13.6)$$

Les sommes partielles d'une telle série sont donc des polynômes trigonométriques
(13.1)

$$S_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx), \quad (13.7)$$

et la série converge vers une fonction f en un point $x \in \mathbb{R}$ si $S_n(x) \rightarrow f(x)$ pour $n \rightarrow \infty$. Outre ce concept de *convergence ponctuelle*, aussi appelée *convergence simple*, on a également la notion de *convergence en moyenne quadratique* vers f :

$$\|S_n - f\| \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

Il se trouve que toute fonction 2π -périodique raisonnable est la limite d'une certaine série trigonométrique, la *série de Fourier* de f .

Afin de motiver la définition de cette série, supposons que f soit la limite

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

c'est-à-dire que

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k s_k,$$

et déterminons les coefficients a_k et b_k par un calcul formel : si l'on prend le produit scalaire avec la fonction c_j on obtient pour $j = 1, 2, \dots$ à l'aide des relations (13.5)

$$\begin{aligned} \langle f | c_j \rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k s_k \mid c_j \right\rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} \left\langle \frac{a_0}{2} \mid c_j \right\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle c_k \mid c_j \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \langle s_k \mid c_j \rangle \\ &= 0 + a_j + 0 = a_j. \end{aligned}$$

Donc les coefficients a_k satisfont

$$a_k = \langle f | c_k \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad (**)$$

pour $k = 1, 2, \dots$. Des calculs similaires donnent $\langle f | s_j \rangle = b_j$ et

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(0t) dt,$$

si bien que la formule (**) est juste aussi pour $k = 0$. (C'est la raison pour laquelle on écrit le terme constant sous la forme $a_0/2$ au lieu de a_0 .) Remarquons qu'il faudrait justifier l'égalité marquée par (*), car il s'agit des «sommes infinies». Mais si l'on admet le résultat, on voit que les coefficients a_k et b_k sont uniquement déterminés par f . Ils s'appellent les *coefficients de Fourier de f*.

Définition. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique dont la restriction à l'intervalle $[0, 2\pi]$ soit intégrable. Alors les *coefficients de Fourier* de f sont les nombres

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{13.8}$$

La *série de Fourier* de f est la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

dont les coefficients sont les coefficients de Fourier de f .

Le théorème suivant dit que la série de Fourier converge vers f dans le sens de la moyenne quadratique.

Théorème. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique dont la restriction à l'intervalle $[0, 2\pi]$ est intégrable. Alors sa série de Fourier converge en moyenne quadratique vers f , c'est-à-dire que ses sommes partielles S_n satisfont à $\|S_n - f\| \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$.

Explicitement, on a donc

$$\int_0^{2\pi} \left(f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx) \right) \right)^2 dx \longrightarrow 0$$

pour $n \rightarrow \infty$. Le théorème implique en particulier que f peut être approchée aussi précisément que l'on veut dans le sens de la distance L^2 par des polynômes trigonométriques.

La question de la convergence ponctuelle de la série de Fourier – i.e. pour tout point $x \in \mathbb{R}$ – est beaucoup plus délicate. Pour cela il faut ajouter des hypothèses sur f :

Théorème. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique dont la restriction à l'intervalle $[0, 2\pi]$ est continûment différentiable par morceaux, c'est-à-dire telle qu'il existe des points $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 2\pi$ tels que f est continûment différentiable sur chacun des intervalles $[x_j, x_{j+1}]$ et que les limites à gauche et à droite de $f(x)$ et de $f'(x)$ existent aux points x_0, \dots, x_N . Alors

- la série de Fourier converge vers $f(x)$ pour tout point x différent de x_0, \dots, x_N ;
- aux points x_0, \dots, x_N , la série converge vers la moyenne

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \nearrow x_k} f(x) + \lim_{x \searrow x_k} f(x) \right)$$

des limites de f à gauche et à droite.

Notons que, si f est continue au point x_k , alors

$$\lim_{x \nearrow x_k} f(x) = \lim_{x \searrow x_k} f(x) = f(x_k),$$

et par conséquent la série converge vers $f(x_k)$. En particulier, si f est continue et continûment différentiable par morceaux, alors la série converge vers $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

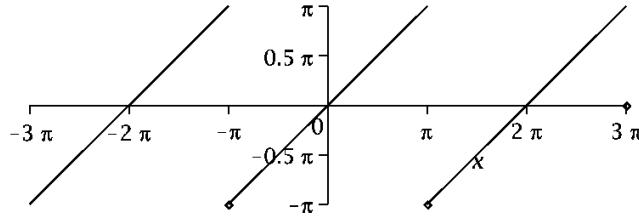
Exemple

Pour le calcul pratique des coefficients de Fourier, remarquons que, pour une fonction 2π -périodique, l'intervalle d'intégration $[0, 2\pi]$ peut être remplacé par $[a, a + 2\pi]$ avec n'importe quel $a \in \mathbb{R}$. En effet,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f &= \int_0^a f + \int_a^{2\pi} f \\ &= \int_0^a f + \int_a^{2\pi} f + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f - \int_{2\pi}^{a+2\pi} f \\ &= \int_a^{a+2\pi} f\end{aligned}$$

puisque $\int_0^a f = \int_{2\pi}^{a+2\pi} f$ si la fonction f est 2π -périodique.

Soit maintenant $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique qui satisfait à $f(x) = x$ pour $x \in [-\pi, \pi]$. Les valeurs $f(x)$ pour $x \notin [-\pi, \pi]$ sont alors déterminées par la condition de 2π -périodicité $f(x + 2\pi) = f(x)$.



Pour les coefficients de Fourier a_k on trouve

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = 0,$$

puisque $f(t) \cos(kt)$ est une fonction impaire ; et par intégration par parties on obtient

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}.$$

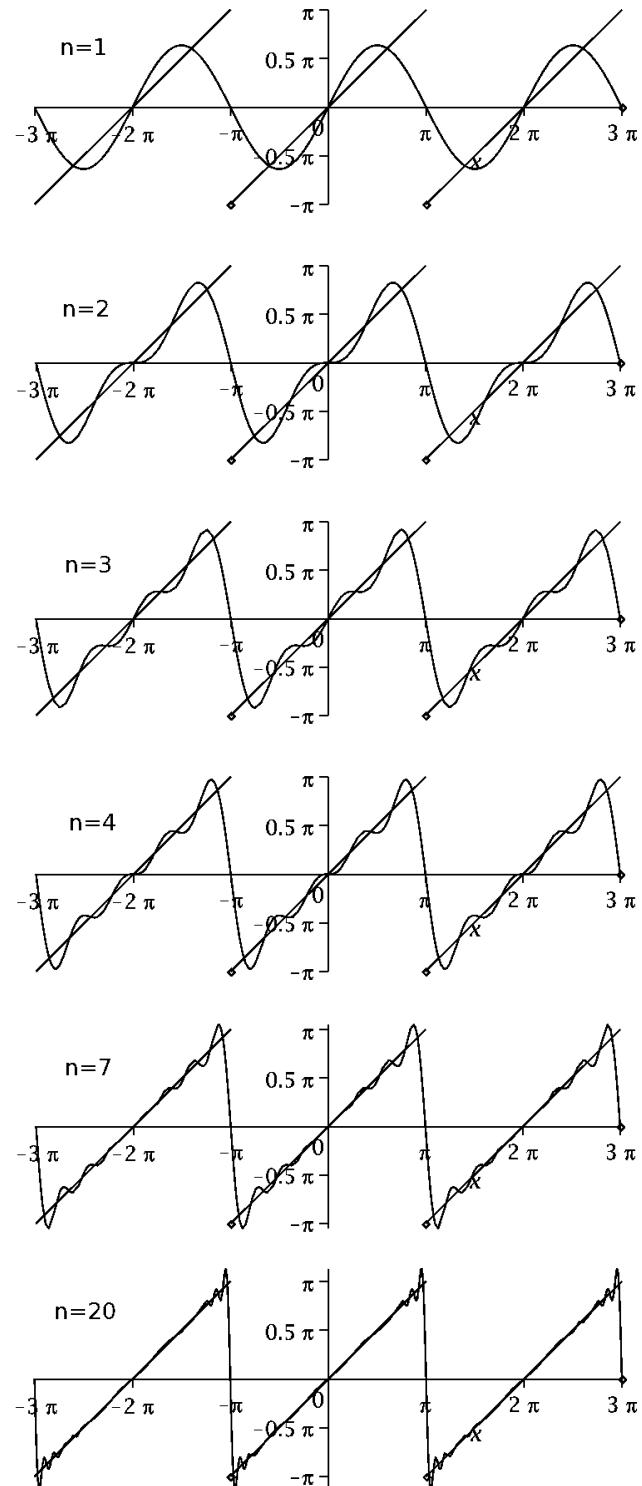
La série de Fourier de f est donc $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin(kx)$. D'après le théorème elle converge vers $f(x)$ pour tout x en lequel f est continue. Par conséquent,

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin(kx) \\ &= \frac{2}{1} \sin(x) - \frac{2}{2} \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) - \frac{2}{4} \sin(4x) \pm \dots\end{aligned}$$

pour tout $x \notin \{\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots\}$. Si on divise cette identité par 2 et pose $x = \pi/2$, on obtient une formule de Leibniz (1682) (qui apparaît cependant déjà vers 1400 chez le mathématicien indien Madhava) :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \mp \dots$$

Voici les graphes des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin(kx)$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 7$ and $n = 20$:



Notation complexe

En admettant des coefficients complexes, on peut écrire les séries trigonométriques

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

et leurs sommes partielles

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx)$$

sous une forme plus simple : à l'aide de

$$\begin{aligned}\cos(kx) &= \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\ \sin(kx) &= \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx})\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) e^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k + ib_k) e^{-ikx} \\ &= c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}\end{aligned}$$

avec

$$c_k := \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad c_{-k} := \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

pour $k = 1, 2, \dots$. Si on définit encore $c_0 := \frac{a_0}{2}$, alors

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

C'est la notation complexe pour les séries trigonométriques. Inversément, on peut revenir à la forme réelle en remplaçant e^{ikx} par $\cos(kx) + i \sin(kx)$.