UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
FACULTÉ DE SCIENCES ÉCONOMIQUES

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES I
SESSION D'EXAMENS: AOÛT 2022
DATE: 29.08.2022
DURÉE: 2 HEURES
TOTAL: 50 POINTS
ANNÉES ACADÉMIQUES 2020/21 ET 2021/22

PROFESSEUR: GIUSEPPE MELFI

NOM ET PRÉNOM: ....

Notes

Document autorisé : Une feuille format A4 recto/verso de notes personnelles. Aucune autre documentation ni dispositif électronique n'est autorisé.
Calculatrice non programmable (pas d'intégrales et/ou de dérivées automatiques; pas de fonctions graphiques) : Autorisée
Vos copies, la donnée et les brouillons doivent être rendus ensemble et agrafés par le surveillant à l'issue du temps imparti. N'oubliez pas d'écrire votre nom sur chaque feuille.
Toutes les réponses doivent être justifiées par des calculs et/ou par des arguments à l'appui et être rédigées sur les feuilles de réponses prévues à cet effet. Les réponses inscrites sur cette donnée ne seront pas prises en compte.

Analyse: fonctions d'une variable réelle (14 pts)

Soit les fonctions réelles suivantes:

$$f(x) = x + |-x+4| \qquad g(x) = 2^{-x} - 1 \qquad h(x) = \frac{x^3 + x}{x}$$

1.1 Pour chacune des fonctions ci-dessus, donner leur domaine de définition et leur image. (6 pts)

1.2 Esquisser le graphe de la fonction $f(x)$. (1 pt)

En justifiant vos réponses pour les points suivants :

1.3 La fonction $f(x)$ est-elle dérivable au point $x = 4$? (2 pts)

1.4 La fonction $g(x)$ est-elle injective ? (1 pt)

1.5 La fonction $g(x)$ est-elle concave, convexe ou les deux ? Indiquer les points d'inflexion, s'il y en a. (2 pts)

Toujours en justifiant bien vos réponses, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses

1.6 VRAI ou FAUX: La fonction $h(x)$ admet une asymptote verticale pour $x = 0$. (1 pt)

1.7 VRAI ou FAUX: La fonction $h(x)$ admet une asymptote horizontale. (1 pt)

Calcul intégral (16 pts)

2.1 Calculer l'intégrale indéfinie suivante : (6 pts)

$$\int t^2 e^t \, dt$$

2.2 Pour $0 \leq x \leq 7$, soit $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, où f est la fonction dont le graphe est representé sur la Figure 1 suivante. En justifiant vos réponses, répondre aux questions suivantes :

a) Évaluer $g(0)$, $g(1)$ et $g(2)$. (3 pts)

b) Sur quel(s) intervalle(s) la fonction g augmente-t-elle ? (2 pts)

c) Quelle est la valeur de x qui correspond au maximum de la fonction g ? (2 pts)

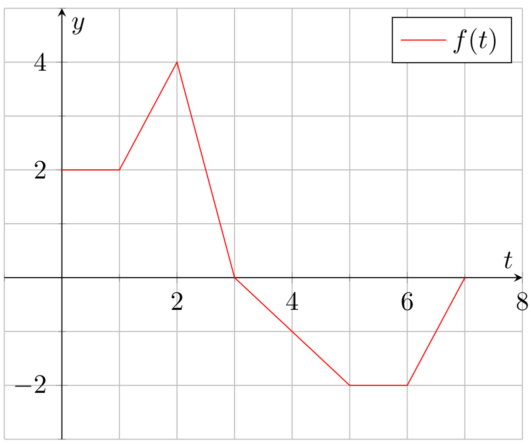


Figure 1: Graphe de la fonction $f(t)$

2.3 En justifiant vos réponses, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

a) VRAI ou FAUX: Si f est continue en $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b xf(x)dx = x\int_a^b f(x)dx$. (1 pt)

b) VRAI ou FAUX: Si f est continue en $[a, b]$, alors $f(x) = \left(\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx\right)'$ (1 pt)

c) VRAI ou FAUX: $\displaystyle\int_0^2 (x - x^3)\ dx$ représente l'aire sous la courbe de $y = x - x^3$ de 0 à 2. (1 pt)

Applications (20 pts)

3.1. L'entreprise Tatipack a été fondée au début de l'année 2016. Sa première année d'activité est donc l'année 2016. Au cours de sa x-ième année d'activité le chiffre d'affaire de l'entreprise Tatipack exprimé en millions de francs a évolué jusqu'en 2018 inclus selon la fonction

$$R(x) = \sqrt[3]{x^2 + 6x}.$$

a) Quel a été le chiffre d'affaires de Tatipack au cours de l'année 2018 ($x = 3$) ? (1 pt)

b) Calculer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 3$ au graphe de $R(x)$. (3 pts)

c) Selon un scénario "A", estimer à l'aide de l'équation de la tangente trouvée au point b) le chiffre d'affaire de Tatipack en 2022. (1 pt)

d) Selon un scénario "B", l'évolution du chiffre d'affaires suit la fonction $R(x)$ aussi après 2018. Dans ce cas, en quelle année le chiffre d'affaires de Tatipack atteindra 6 millions de francs ? (3 pts)

3.2. Dans un village de montagne, à compter du début de la saison hivernale, le nombre quotidien de touristes logés dans les différents établissements du village au jour x suit la fonction

$$T(x) = 50x \cdot e^{-x^2/1000}$$

a) Combien de touristes se trouvent dans le village après 15 jours de l'ouverture de la saison ? (1 pt)

b) Après combien de jours le nombre de touristes dans le village atteindra le maximum ? (3 pts)

c) Quel est donc le nombre maximum de touristes présents dans le village ? (1 pt)

d) La saison d'hiver pourra être considérée terminée lorsque moins de 30 touristes s'y trouvent. Estimer à l'aide d'une calculatrice la durée de la saison d'hiver (à un jour près) dans le village ? (3 pts)

e) Combien de nuitées au total ont été enregistrées dans les différents établissements du village pendant les 60 premiers jours ? (*Suggestion: calculer une intégrale opportune)* (4 pts)

Solutions

Analyse: fonctions d'une variable réelle

1.1 (6 points)

$D_f : \mathbb{R}$ $\quad Im_f :\ [4;+\infty[$ (1 + 1 pts)

$D_g : \mathbb{R}$ $\quad Im_g :]-1;+\infty[$ (1 + 1 pts)

$D_h : \mathbb{R}^*$ $\quad Im_h :]1;+\infty[$ (1 + 1 pts)

1.2 (1 pt)

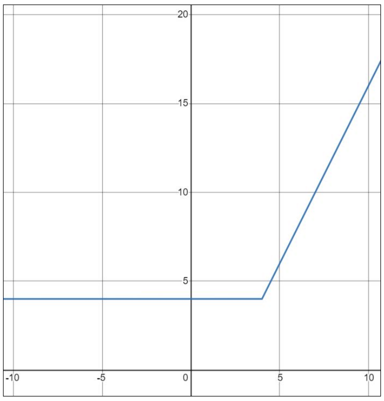


Figure 2: Graphe de la fonction $f(x)$

1.3 (2 pts)

Non, car $\lim_{x\to 4^-} f'(x) = 0 \neq \lim_{x\to 4^+} f'(x) = 2$

1.4 (1 pt)

Oui, car $g'(x) = \dfrac{-\ln 2}{2^x} = -\ln 2e^{-x\ln 2} < 0$

1.5 (2 pts)

La fonction est toujours convexe, car $g''(x) = \dfrac{\ln^2 2}{2^x} = \ln^2 2e^{-x\ln 2} > 0$. Il n'y a donc pas de point d'inflexion.

1.6 (1 pt)

Faux, car $\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = 1$

1.7 (1 pt)

Faux, car $\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$

Calcul intégral

2.1 En utilisant l'intégration par partie

$$u = t^2 \qquad dv = e^t\ dt$$

$$du = 2t\ dt \qquad v = e^t$$

$$\int t^2 e^t\ dt = t^2 e^t - 2\int te^t\ dt$$

En utilisant l'intégration par partie une deuxième fois

$$u = t \qquad dv = e^t\ dt$$

$$du = dt \qquad v = e^t$$

$$\int te^t\ dt = te^t - \int e^t\ dt = te^t - e^t + C$$

En combinant les intégrations par partie

$$\int t^2e^t\ dt = t^2e^t - 2(te^t - e^t + C) = t^2e^t - 2te^t + 2e^t + C_1$$

où $C_1 = -2C$

2.2 (a) $g(0) = 0$, $g(1) = 2$, $g(2) = 5$
   (b) $[0, 3]$
   (c) $x = 3$

2.3 (a) Faux, x est une variable de l'intégrale et non une constante multiplicatrice.
   (b) Faux, il manque la constante provenant de l'intégration.
   (c) Faux, la fonction possède à la fois une aire positive et négative, pour la partie négative l'aire est au-dessus de la courbe.

Applications

3.1. a) Pour $x = 3$ nous avons $R(3) = \sqrt[3]{9+18} = \sqrt[3]{27} = 3$. Donc le chiffre d'affaire en 2018 a été de 3 millions de francs.

b) Pour calculer l'équation de la tangente au graphe de R au point d'abscisse $x = 3$ nous devons calculer la dérivée de R

$$R'(x) = \frac{2x+6}{3\sqrt[3]{(x^2+6x)^2}}$$

Donc, puisque $R(3) = 3$ et $R'(3) = \frac{12}{3\cdot\sqrt[3]{(9+18)^2}} = 4/9$, l'équation de la droite tangente à R au point d'abscisse 3 est

$$y = \frac{4}{9}(x-3) + 3$$

ou dans la forme explicite

$$y = \frac{4}{9}x + \frac{5}{3}.$$

c) L'année 2022 correspond à $x = 7$, et donc

$$y(9) = \frac{4}{9}\cdot(7-3) + 3 = 4,777$$

Selon cette estimation, le chiffre d'affaire de Tatipack en 2022 sera de 4,777 millions de francs.

d) On doit resoudre l'équation

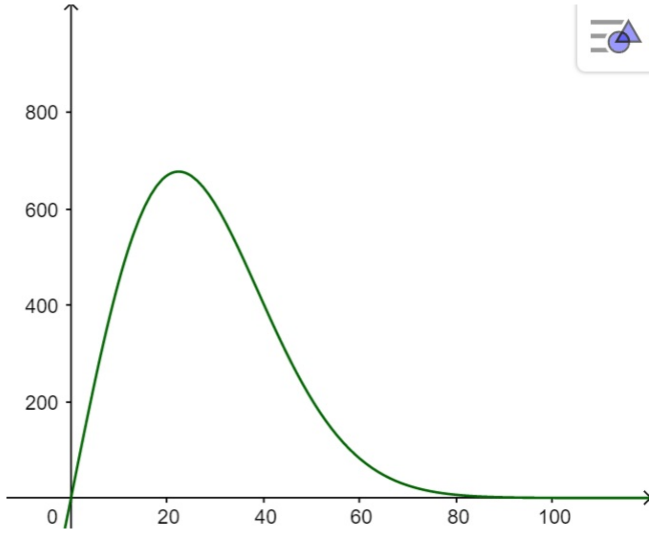
$$\sqrt[3]{x^2+6x} = 6.$$

En prenant la puissance 3 des deux côtés on a:

$$x^2 + 6x - 216 = 0$$

et par la formule de Viète on obtient $x = 12$ ou $x = -18$ (à exclure). Donc Tatipack atteignera 6 millions de francs de chiffre d'affaire en 2027.

3.2 Le nombre de nuitées suit une courbe qui est la suivante:



a) On a $T(15) \simeq 598$. Après 15 jours le nombre de touristes qui sejournent dans le village est de 598.

b) On a

$$T'(x) = \left(50 - \frac{1}{10}x^2\right) e^{-x^2/1000}$$

Donc $T'(x) = 0$ lorsque $x^2 = 500$, ce qui veut dire $x \simeq 22,36$. Le nombre maximal de touristes séjournant dans le village est atteint après 22 jours.

c) Ce jour là 678 nuitée sont enregistrées.

d) D'après le point b) après avoir atteint un maximum, le nombre de touristes séjournant dans le village $T(x)$ est décroissant. Bien que l'équation $T(x) = 30$ ne puisse pas se résoudre de manière analytique, la réponse peut se trouver de manière assez précise après quelques calculs (par tentatives). Ainsi par exemple:

$$T(60) \simeq 82$$
$$T(80) \simeq 6,64$$
$$T(70) \simeq 26$$
$$T(69) \simeq 29,52$$
$$T(68) \simeq 33,36$$

On peut dire donc que d'après ce modèle, la saison dure environ 69 jours, à un jour près.

e) Pour estimer les nuitées pendant les premiers 60 jours de la saison on va effectuer une intégrale définie. Notez que $50x$ est la dérivée de $-x^2/1000$ à une constante près, donc l'intégrale se fait facilement par substitution:

$$\int_0^{60} T(x)dx \simeq 24316.$$

Le nombre totale de nuitées des 60 premiers jours est donc de 24316.