Université de Neuchâtel
Faculté de Sciences économiques

Mathématiques appliquées I
Session d'examens: Août 2021
Date: 27.08.2021
Durée: 2 heures
Total: 40 points
Années académiques 2019/20 et 2020/21

professeur: Giuseppe Melfi

Nom et Prénom: ....

Notes

Document autorisé : Une feuille format A4 recto/verso manuscrite de notes personnelles. Aucune autre documentation ni dispositif électronique n'est autorisé.
Calculatrice autorisée: non programmable (pas de graphe de fonction, pas de calcul automatique de dérivée ou d'intégrales)
Vos copies, la donnée et les brouillons doivent être rendus ensemble et agrafés par le surveillant à l'issue du temps imparti. N'oubliez pas d'écrire votre nom sur chaque feuille.
***Toutes les réponses doivent être justifiées par des calculs et/ou des arguments adéquats** et rédigées sur des feuilles séparées. Les réponses inscrites sur cette donnée ne seront pas prises en compte.*

Analyse: fonctions d'une variable réelle (13 pts)

Étant donné les fonctions suivantes:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \qquad ; \qquad g(x) = \ln(7x - 2x^2 - 3) \qquad ; \qquad h(x) = \left|-x^3 + 9x^2 - 18x\right|$$

1.1 Quel est le domaine de définition des fonctions: $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$? (3 pts)

1.2 La fonction $f(x)$ est-elle injective, surjective et/ou bijective ? Justifier votre réponse. (3 pts)

1.3 Trouver pour quelle valeur de x la fonction $g(x)$ atteint son maximum. (2 pts)

1.4 La fonction $h(x)$ est-elle continue et/ou dérivable au point $x = 0$? (2 pts)

1.5 Calculer, s'il en existe, les valeurs de x où la fonction $h(x)$ passe de concave à convexe ou vice versa. (3 pts)

Calcul intégral (12 pts)

2.1 Calculer les intégrales suivantes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt$ (3 pts)

b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1} dx$ (3 pts)

2.2 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} dt$

a) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $f(xy) = f(x) + f(y)$ (2 pts)

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ (2 pts)

c) Étant donné que f est bijective, montrer que $(f^{-1})' = f^{-1}$ (2 pts)

Suggestion: Calculer l'intégrale définie en question.

Applications (15 pts)

3.1. Parmi les articles commercialisés par un magasin d'électronique il y a eu encore en 2019 des lecteurs DVD/Blu-Ray (ci-après "appareils"). Sur la vente de ces appareils, une fois les frais déduits, le bénéfice du magasin en 2019 a été de 25 Francs par appareil et 200 appareils ont été vendus.

On sait déjà que chaque année le bénéfice par appareil vendu diminue de 1,50 Franc et que le nombre d'appareils augmente de 20 unités.

a) En quelle année le bénéfice du magasin lié à la vente de ces appareils atteint-il un maximum ? (2 pts)

b) À combien s'élèvera le bénéfice cette année-là ? (1 pt).

c) Combien de ces appareils seront-ils vendus cette année-là? (1 pt)

d) En 2030, le magasin devra remplacer ce secteur de vente par un autre secteur plus rentable. Au moyen d'une intégrale appropriée, donner une estimation du bénéfice total cumulé entre 2019 (compris) et 2030 (compris). (3 pts)

3.2. Dans une localité au bord de la mer Méditerranée, le nombre de touristes logés dans les différents établissements de la localité au jour x à compter du début de la saison estivale, suit la fonction

$$T(x) = 2000 \cdot e^{0{,}06x - 0{,}001x^2}$$

a) Combien de touristes se trouvent dans la localité après 25 jours ? (1 pt)

b) Après combien de jours le nombre de touristes dans la localité atteindra le maximum ? Justifier qu'il s'agit d'un maximum. (3 pts)

c) Quel est donc le nombre maximum de touristes présents dans la localité ? (1 pt)

d) La saison estivale pourra être considérée terminée lorsque moins de 100 touristes s'y trouvent. Quelle est la durée de la saison dans la localité ? (3 pts)

Solutions

Analyse: fonctions d'une variable réelle

1.1 pour $f(x)$ $x \in]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$ (1pt)

pour $g(x)$ $x \in]\frac{1}{2};3[$ (1pt)

pour $h(x)$ $x \in \mathbb{R}$ (1pt)

1.2 $f(x)$ n'est pas injective puisque, par exemple, $f(3) = f(-3)$ (1 pt)

$f(x)$ n'est pas surjective puisque son codomaine ($\mathbb{R}$) est différent de son image ($\mathbb{R}^+$) (1 pt)

$f(x)$ puisqu'elle n'est ni injective, ni surjective, elle n'est donc pas bijective. (1 pt)

1.3 $g'(x) = \dfrac{7-4x}{-2x^2+7x-3}$ (0.5 pt)

$g'(x) = 0 \implies x = 1.75$ (0.5 pt)

$g''(x) = \dfrac{-37+28x-8x^2}{(-3+7x-2x^2)^2} < 0 \ \forall x$ (0.5 pt)

le maximum de la fonction est au point $x = 1.75$ (0.5 pt)

1.4 $h(x)$ est continu au point $x = 0$ car $h(0)$ existe ($h(0) = 0$) et $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = h(0)$ (1pt)

$h(x)$ n'est pas dérivable au point $x = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} h'(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} h'(x)$ (1pt)

1.5 $$\text{h(x)=} \begin{cases} -x^3+9x^2-18x & \text{si } x<0 \text{ ou } 3<x<6 \\ x^3-9x^2+18x & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{h'(x)=} \begin{cases} -3x^2+18x-18 & \text{si } x<0 \text{ ou } 3<x<6 \\ 3x^2-18x+18 & \text{sinon (avec x} \neq 0, x \neq 3, x \neq 6) \end{cases}$$

$$\text{h''(x)=} \begin{cases} -6x+18 & \text{si } x<0 \text{ ou } 3<x<6 \\ 6x-18 & \text{sinon (avec x} \neq 0, x \neq 3, x \neq 6) \end{cases}$$

(1pt)

$h''(x)$ est donc:
- positif sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]6;+\infty[$
- négatif sur l'intervalle $]0;6[$ (1pt)

les points d'inflexion de $h(x)$ sont donc en $x = 0$ et $x = 6$ (1 pt)

Calcul intégral

2.1 Calculer les intégrales suivantes:

a) (2 pts) $\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t} = \int_1^e \frac{ds}{s(1+s)} = \int_1^e (\frac{1}{s} - \frac{1}{1+s})ds = \ln \frac{s}{1+s}|_1^e = \ln \frac{2e}{1+e}$

b) (2 pts) $\int^x \frac{\sin 2t}{2+sint}dt = 2\int^{\sin x} \frac{s}{2+s}ds = 2\int^{\sin x} ds - 4\int^{\sin x} \frac{ds}{2+s} = 2\sin x - 4\ln{(2+\sin x)} + C$

c) (3 pts) $\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1}dx$

i. L'application est une fonction rationnelle. De plus, il n'y a pas de pôle dans l'intervalle [-1, 0], elle est donc continue et intégrable sur cet intervalle.

ii. La fraction rationnelle a une partie entière non-nulle en effectuant la division euclidienne.

$$
\begin{array}{ll|l}
x^2 & -1 & 2x-1 \\ \cline{3-3}
x^2 & -\frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \\ \hline
\frac{1}{2}x & -1 & \\
\frac{1}{2}x & -\frac{1}{4} & \\ \cline{1-2}
 & -\frac{3}{4} &
\end{array}
$$

iii. On déduit de la division euclidienne que $\forall x \in [-1,0]$

$$\frac{x^2-1}{2x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{\frac{3}{4}}{2x-1}$$

donc

$$\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1}dx = \int_{-1}^0 (\frac{x}{2}+\frac{1}{4})dx - \frac{3}{8}\int_{-1}^0 \frac{2}{2x-1}dx = [\frac{1}{4}(x^2+x)]_{-1}^0 - \frac{3}{8}[\ln{(|2x-1|)}]_{-1}^0 = \frac{3\ln{(3)}}{8}$$

2.2 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$

a) (2 pts) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^* : f(xy) = f(x) + f(y)$.

Une alternative est de mentionner la propriété du logarithme ou de le calculer,

Soient $x, y > 0$. En appliquant successivement deux substitutions $t = xs$ et $s = \frac{1}{r}$:

$$f(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_{\frac{1}{x}}^{y} \frac{ds}{s} = \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{ds}{s} + \int_1^y \frac{ds}{s} = \int_1^x \frac{dr}{r} + \int_1^y \frac{ds}{s} = f(x) + f(y)$$

b) (2 pts) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* : f(\frac{1}{x}) = -f(x)$.

$$\forall x > 0 : 0 = f(1) = f(x\frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = -f(x)$$

c) (2 pts) Étant donnée que f est bijective, montrer que $(f^{-1})' = f^{-1}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$, il existe donc un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $y = f(x)$. De plus, comme $f'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = x = f^{-1}(y)$$

d) (1 pts) Étant donnée que pour tout $x \in \mathbb{R} : f^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ vérifier que $f = \ln$.

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ étant la série entière de l'exponentiel, nous avons donc $f^{-1} = exp$. Par conséquent $f = ln$.

Applications

3.1. **a)** Le bénéfice lié à la vente de ces appareils à l'année $2019 + x$ est:

$$B(x) = (25 - 1,5x)(200 + 20x) = -30x^2 + 200x + 5000$$

donc pour $x = -b/2a = 200/60 = 3,333$, ce qui en comparant les cas $x = 3$ et $x = 4$ (correspondant aux années comptables 2022 et 2023), signifie en 2022, trois ans après l'année 2019.

b) A noter qu'en 2023 le bénéfice est de $19\cdot 280 = 5320$ francs, alors que l'année avant sera de $20,5\cdot 260 = 5330$ francs.

c) 260 appareils

d) Puisque entre 2019 et 2030 il y a 12 ans, on peut estimer le bénéfice cumulé avec l'intégrale suivant:

$$\int_0^{12} B(x)dx = \int_0^{12} -30x^2 + 200x + 5000dx =$$

$$= [-10x^3 + 100x^2 + 5000x]_0^{12} = -17280 + 14400 + 60000 = 57120.-$$

3.2. a) Après 25 jours le nombre de touristes est donné par

$$T(25) = 2000 \cdot e^{1,5-0,625} \simeq 4797$$

b) Puisque la fonction $y = e^x$ croît avec x, le nombre de touristes atteint son maximum lorsque l'exposant $0,06x - 0,001x^2$ atteint son maximum, c'est-à-dire pour $x = -0,06/(-2 \cdot 0,001) = 30$.

c) Le nombre maximum de touristes est donc $T(30) = 2000 \cdot e^{0,9} = 4919$

d) Il faut résoudre l'équation

$$2000 \cdot e^{0,06x-0,001x^2} = 100$$

c'est-à-dire

$$e^{0,06x-0,001x^2} = 0,05$$

ou encore

$$0,001x^2 - 0,06x + \ln 0,05 = 0$$

ou encore

$$x^2 - 60x + 1000 \ln 0,05 = 0$$

Cela donne

$$x = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 - 4000 \ln 0,05}}{2}.$$

Des deux solutions, la solution négative est à écarter. Reste $x \simeq 92,416$. La saison dure donc 92 (ou 93) jours.