Université de Neuchâtel
Faculté de Sciences économiques

Mathématiques appliquées I
Session d'examens: Janvier 2020
Date: 14.01.2020
Durée: 2 heures
Total: 50 points

professeur: Giuseppe Melfi

Nom et Prénom: ....

Notes

Document autorisé : Une feuille format A4 recto/verso de notes personnelles. Aucune autre documentation ni dispositif électronique n'est autorisé.
Calculatrice non programmable : Autorisée
Vos copies, la donnée et les brouillons doivent être rendus ensemble et agrafés par le surveillant à l'issue du temps imparti. N'oubliez pas d'écrire votre nom sur chaque feuille.
Toutes les réponses doivent être rédigées sur des feuilles séparées. Les réponses inscrites sur cette donnée ne seront pas prises en compte.

Analyse: fonctions d'une variable réelle (18 pts)

Étant donné les fonctions suivantes:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}; \qquad g(x) = 2\ln(x^{1/2}) - \ln(x^2); \qquad h(x) = \left|2x^2 - 7x + 3\right|$$

1.1 Pour chacune des fonctions ci-dessus, déterminer leur domaine de définition. (3 pts)

1.2 La fonction $f(x)$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, lesquelles ? (3 pts)

1.3 Déterminer les coordonnées des extrema de $f(x)$ ainsi que ses points d'inflexion. (4 pts)

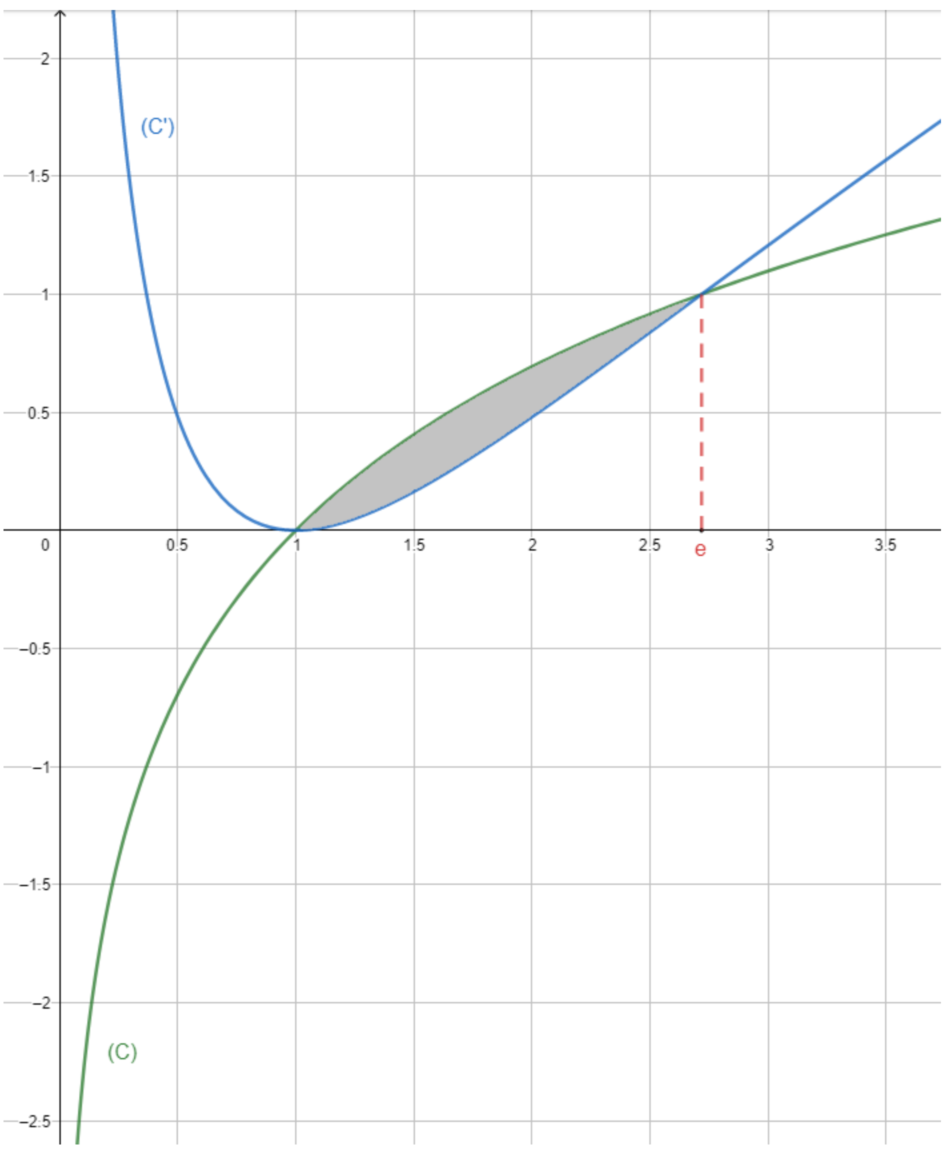
1.4 Tracer la courbe de $f(x)$. (2 pts)

1.5 Étudier la continuité et la dérivabilité de $h(x)$. (2 pts)

1.6 Montrer que la fonction $g^{-1}(x)$, inverse de $g(x)$, existe. Trouver l'équation de la droite tangente au graphe de $g^{-1}(x)$ au point $(-1; e)$. (4 pts)

Calcul intégral (12 pts)

2.1 Les courbes (C) et (C') données ci-dessous représentent respectivement les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par: $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.



On cherche à déterminer l'aire A de la surface grise sur le graphe.
On note $I = \int_1^e \ln x \, dx$ et $J = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$.

a) Vérifier que la fonction $F(x)$ définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $f(x)$. En déduire I. (1 pts)

b) En utilisant l'intégration par partie, démontrer que $J = e - 2$. (2 pts)

c) En utilisant les résultats précédents, donner la valeur de A. (1 pts)

2.2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^{-x^2}$.

a) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$ en utilisant la méthode d'intégration par substitution. (2 pts)

b) Soit a un réel positif. Calculer l'intégrale : $I_a = \int_0^a f(x) \, dx$ en fonction de a. (1 pts)

c) En se basant sur le résultat de la question précédente, trouver $\lim_{a \to +\infty} I_a$. (1 pts)

2.3 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par: $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.

a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que: $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$. (2 pts)

b) Trouver une primitive $G(x)$ de $g(x)$. (2 pts)

Applications (20 pts)

3.1. Une entreprise active dans l'électronique connectée lance sur le marché une nouvelle montre connectée. Le nombre de montres connectées vendues le $x^{\text{ème}}$ mois est donné approximativement par la fonction

$$V(x) = 10\,000 \cdot \frac{x+2}{e^{0,1x}}$$

a) Combien de montres connectées ont été vendues le $5^{\text{ème}}$ mois ? (1 pts)

b) Après combien de temps les ventes mensuelles de montres connectées atteignent-elles leur maximum ? Justifier qu'il s'agit bien d'un maximum. (4 pts)

c) Donner une estimation du nombre de montres connectées vendues au cours des 24 premiers mois. (4 pts)

3.2. Une fromagerie du Jura est confrontée à une demande journalière de fromage qui suit la fonction

$$x = 180 - 4p$$

où x représente la quantité demandée en kilos et p le prix de vente en Frs. par kilo. Les coûts de production suivent la fonction

$$C(x) = 252 \ln(x).$$

On supposera que le prix de vente oscille sur le marché entre 10 et 30 Frs. le kilo.

a) Écrire la fonction qui exprime le bénéfice (en Frs.) en terme du prix p. (2 pts)

b) Quel est le prix de vente qui assure un bénéfice maximal ? Justifier votre réponse. (5 pts)

c) Quel sera le bénéfice maximal qui pourra être dégagé ? (1 pts)

d) Quelle quantité de fromage sera-t-elle produite chaque jour ? (1 pts)

e) Pour un prix de 20 Frs par kilo quel serait l'élasticité-prix de la demande ? Et pour un prix de 24 Frs. ? (2 pts)

Solutions

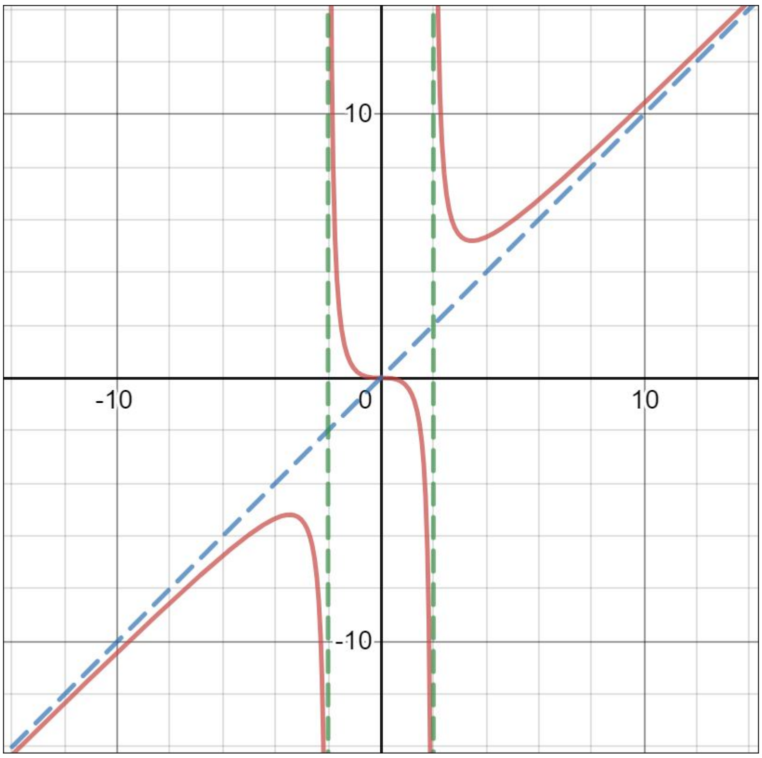
Analyse: fonctions d'une variable réelle

1.1 $f(x) : D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
$g(x) : D_f =]0, +\infty[$
$h(x) : D_f = \mathbb{R}$

1.2 $AV_1 : x = -2$ (avec calcul limite)
$AV_2 : x = 2$ (avec calcul limite)
$AO : y = x$ (avec calcul limite pour p, avec calcul limite pour h)

1.3 $f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$
$f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$

Max local: $(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$
Min local: $(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$
Infl: $(0; 0)$
Infl. changement de signe de $f''(x) : x = -2$
Infl: changement de signe de $f''(x) : x = 2$



1.4

1.5 $h(x) = \left|2x^2 - 7x + 3\right| = |(2x-1)(x-3)| = \begin{cases} -2x^2 + 7x - 3 & \text{pour} \quad 0.5 \le x \le 3 \\ +2x^2 - 7x + 3 & \text{sinon} \end{cases}$

$h'(x) = \begin{cases} -4x + 7 & \text{pour} \quad 0.5 < x < 3 \\ +4x - 7 & \text{pour} \quad x < 0.5 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$

On doit étudier la continuité et dérivabilité aux alentours des points $x = 0.5$ et $x = 3$.

$h(x)$ est continu en $x = 0.5$ car:
$h(0.5) = \lim\limits_{x \to 0.5^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0.5^-} h(x) = 0$
$h(x)$ est continu en $x = 3$ car:
$h(3) = \lim\limits_{x \to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} h(x) = 0$

$h'(x)$ n'est pas dérivable en $x = 0.5$ car:
$\lim_{x\to 0.5^+} h'(x) = -5 \neq \lim_{x\to 0.5^-} h'(x) = 5$
$h'(x)$ n'est pas dérivable en $x = 3$ car:
$\lim_{x\to 3^+} h'(x) = -5 \neq \lim_{x\to 3^-} h'(x) = 5$

1.6 $g(x) = 2\ln(x^{1/2}) - \ln(x^2) = -\ln(x)$
$g'(x) = -\frac{1}{x}$
Puisque $g'(x)$ est négative sur le domaine de définition de $g(x)$, la fonction $g(x)$ est monotone décroissante, donc injective et peut-être inversée. (aussi possible de calculer que $g^{-1}(x) = \frac{1}{e^x}$)
$g'(e) = -\frac{1}{e}$
$m = -e$
$h = 0$
$y = -ex$

Calcul intégral

2.1 a) On dérive $F(x)$: $F'(x) = \ln x + x.\frac{1}{x} - 1 = \ln x$.
$I = \int_1^e \ln x \; dx = x\ln x - x|_1^e = 1$

b) $J = \int_1^e (\ln x)^2 \; dx$
On prend : $u' = \ln x$ et $v = \ln x$; $u = x\ln x - x$ (à partir de la question précédente) et $v' = \frac{1}{x}$.
$J = (x\ln x - x)\ln x|_1^e - \int_1^e \frac{x\ln x - x}{x} \; dx = e - 2$

c) $A = \int_1^e f(x) - g(x) \; dx = \int_1^e \ln x \; dx - \int_1^e (\ln x)^2 \; dx = I - J = 1 - (e-2) = 3 - e$

2.2 a) $u = -x^2$, $F(x) = -e^{-x^2}$

b) $I_a = 1 - e^{-a^2}$

c) $\lim_{a\to+\infty} 1 - e^{-a^2} = 1$

2.3 a) $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$

b) $G(x) = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1|$. Sur l'intervalle $]1, +\infty[$ on peut écrire $G(x) = -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1)$

Applications

3.1. a) On a:

$$V(5) = 10\,000 \cdot \frac{7}{e^{0,5}} \simeq 42457 \text{ montres.}$$

b) On a:

$$V'(x) = 10000e^{-0,1x} + 10000(x+2)e^{-0,1x} \cdot (-0,1) = 1000(8-x)e^{-0,1x}$$

Pour $x < 8$ le nombre de montres vendues augmente et atteint le maximum pour $x = 8$, c'est-à-dire en correspondence du huitième mois. Par la suite le nombre de montres vendues diminue.

c) On doit évaluer $V(1) + V(2) + \dots V(24)$. Pour cela nous utilisons l'intégrale indéfinie suivante:

$$\int_0^{24} V(x)dx$$

Or il s'agit d'une intégrale qu'on peut calculer par parties:

$$\int_0^{24} 10000(x+2)e^{-0,1x}dx = 10\,000 \left[(x+2)\frac{e^{-0,1x}}{-0,1}\right]_0^{24} + 100\,000 \int_0^{24} e^{-0,1x}dx \simeq 873\,415.$$

3.2 a) La fonction bénéfice est :

$$B(p) = (180-4p)p - 252\ln(180-4p) = 180p - 4p^2 - 252\ln(180-4p)$$

b) On a:

$$B'(p) = 180 - 8p + \frac{1008}{180-4p} = \frac{(180-8p)(180-4p)+1008}{180-4p}$$

Le bénéfice atteint un maximum lorsque $B'(p) = 0$, c'est-à-dire lorsque

$$(180-8p)(180-4p)+1008 = 0$$

c'est-à-dire

$$32p^2 - 2160 + 33408 = 0.$$

On peut même simplifier l'équation en divisant tout par 16 et on obtient:

$$2p^2 - 135p^2 + 2088 = 0.$$

Ceci donne: $p = 24$ ou $p = 43,50$. Comme on a supposé que les prix oscillent entre 10 et 30 Frs. le kilo, on retient $p = 24$. On peut noter également que $p = 43,5$ correspondrait à un bénéfice minimale (et pas maximale) et négatif.

c) Le bénéfice qui peut ête dégagé est alors de

$$B(24) = (180 - 4 \cdot 24) \cdot 24 - 252 \ln(84) = 899,43$$

c'est-à-dire environ 900 Frs. par jour.

d) La quantité de fromage produite est de 84 kilos par jour.

e) L'élasticité-prix est donné par la formule:

$$e(p) = x'(p) \cdot \frac{p}{x(p)}.$$

Or $x'(p) = -4$ quelque soit p. Lorsque $p = 20$, on a $x(p) = 180 - 80 = 100$, et donc $e(20) = -4 \cdot \frac{20}{100} = -0,8$. Cela veut dire que une augmentation de 1% du prix n'influence à la baisse que de 0,8% en quantité de fromage vendue. Par contre si $p = 24$, on a $x(p) = 180 - 4 \cdot 24 = 84$ et donc $e(24) = -4 \cdot \frac{24}{84} \simeq -1,142$. Chaque augmentation de 1% a une incidence de $-1,142\%$ sur le volume des ventes.