GEOMETRIE PLANE

- **Vecteur** $\overrightarrow{AB}$: Soit : A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) alors $\overrightarrow{AB}$=$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$- $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

ex : A(3 ;1), B(-1,2) $\overrightarrow{AB}$= $\begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-1 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Norme du vecteur** $\overrightarrow{AB}$: Soit $\vec{v}$= $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$: $\|\vec{v}\|$ = $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$,

ex : $\vec{v}$= $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|\vec{v}\|$ = $\sqrt{3^2 + 1^2}$ = $\sqrt{10}$

- **Distance entre 2 points A – B :** A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) .

$$\text{dist(A,B)} = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\|\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\ .$$

ex : A(3 ;1), B(-1,2) $\|\overrightarrow{AB}\|$ = $\sqrt{(-4)^2 + (1)^2}$ = $\sqrt{17}$

- **Milieu du segment AB** : A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) : M $\left(\frac{x_B+x_A}{2} ; \frac{y_B+y_A}{2}\right)$

ex : A(3 ;1), B(-1,2) M$\left(\frac{3-1}{2} ; \frac{1+2}{2}\right)$ ou M (1 ;3/2)

- **Déterminant de deux vecteurs** : Soit $\vec{v}$= $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}$= $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{v},\vec{u}) = \begin{vmatrix} v_x & u_x \\ v_y & u_y \end{vmatrix} = v_x u_y - u_x v_y.$$

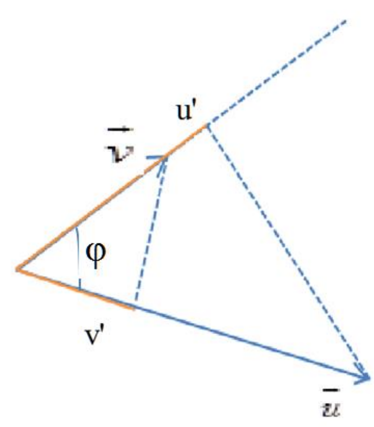
ex : $\vec{v}$= $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{u}$= $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, det($\vec{v}$,$\vec{u}$) = $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$=3·2-(-2) ·1= 6 + 2 = 8

- **Aire du parallélogramme formé par** $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{AC}$**:** Aire = | det($\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$)|
- **Aire du triangle par** $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{AC}$**:** Aire = $\frac{1}{2}$| det($\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$)|

ex : A(3 ;1), B(-1,2), C(2 ;4) : $\overrightarrow{AB}$= $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}$= $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, det($\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$)| = $\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$= -12+1= -11, donc

Aire parallélogramme = |-11| = 11 et aire du triangle = $\frac{1}{2}$·11 = 5.5.

- **Produit scalaire** : Soit $\vec{v}$= $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}$= $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$
  - *Géométriquement :*



$$\vec{v}\cdot\vec{u} = \|\vec{v}\|\cdot u' = \|\vec{u}\|\cdot v'$$

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\|\cos\varphi$$

Où u´est la projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ et v´ la projection de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$

$\vec{v}\cdot\vec{u} > 0$ alors φ est aigu

$\vec{v}\cdot\vec{u} < 0$ alors φ est obtus

$\vec{v}\cdot\vec{u} = 0$ alors $\varphi = 90^o$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{v}\perp\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{u} = 0 \\ \vec{v}//\vec{u} \Leftrightarrow \det(\vec{v},\vec{u}) = 0\end{array}}$$

- *Algébriquement :*

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = v_x\cdot u_x + v_y\cdot u_y$$

ex : $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ $\vec{v}\cdot\vec{u} = 3\cdot(-2)+1\cdot2=-6+2 = -4 < 0$ alors l' angle $\varphi > 90^0$.

Exemples :

i. Soit les vecteurs $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$et $\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$, trouver v´ et u´. On va utiliser la formule $\vec{v}\cdot\vec{u} = \|\vec{v}\|\cdot u' = \|\vec{u}\|\cdot v'$

$\vec{v}\cdot\vec{u}= -4$, $\|\vec{v}\|= \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$donc $-4 = \sqrt{10}u' \Leftrightarrow u'= -4/\sqrt{10}$. Pareillement on trouve $v'= -4/\sqrt{8}= -2/\sqrt{2}$.

ii. Soit $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\a\end{pmatrix}$. Trouver a de sorte que les vecteurs soient

a. parallèles : $\vec{v}//\vec{u} \Leftrightarrow \det(\vec{v},\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}3 & -2\\1 & a\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3a+2 = 0 \Leftrightarrow a = -2/3$

b. perpendiculaires $\vec{v}\perp\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -6 + a = 0 \Leftrightarrow a = 6$.

Angle φ entre deux vecteurs : $\cos\varphi = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\|}$

Exemples :

i. Soit les vecteurs $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$et $\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$, on cherche l' angle φ formé par les deux vecteurs:

$\vec{v}\cdot\vec{u}$ = - 4 , $\|\vec{v}\|= \sqrt{10}$, $\|\vec{u}\|= \sqrt{8}$ alors cosφ = $\frac{-4}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{8}}$ = -0.447 et φ = 116.6°. Si on cherche l'angle aigu on prend $|\vec{v}\cdot\vec{u}|$ = 4 et donc cos φ = 0.447 et φ = 63.43°.

ii. Trouver l'angle formé par les droites : d_1 : 2x +3y +1 = 0 et d_2 : $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$. On utilise la même formule avec les deux vecteurs directeurs des droites. $\overrightarrow{d_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ (pourquoi ?) et $\overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a : $\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} = 4$ et $\|\overrightarrow{d_1}\| = \sqrt{13}$, $\|\overrightarrow{d_2}\| = \sqrt{5}$. Donc cos φ = $\frac{4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}}$= 0.5 et φ = 60 °.

- **Equation hessienne**: soit ax+by + c = 0 l'équation cartésienne. Alors l' eq. Hessienne est $\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$
- **Distance point – droite** : Soit A(x_A, y_B) et la droite d : ax+by + c = 0. Dist(d, A) = $\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exemples :

i. Trouver la distance entre le point A(2,3) et la droite –x + 4y -1 = 0 : Dist(d, A) = $\frac{|-2+4\cdot 3-1|}{\sqrt{(-1)^2+4^2}} = \frac{9}{\sqrt{17}}$

KALAITZI FANI 0763853810