

**ALGEBRE LINEAIRE** **Déterminant**

Page | 1

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

- $\text{Det}(AB) = \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B)$

Définition : **Combinaison linéaire** de vecteurs  $(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \dots; \vec{u}_n)$  est un vecteur obtenu par la somme de multiples de ceux vecteurs.  $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$

Definition: Les vecteurs  $(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \dots; \vec{u}_n)$  sont **lineairement indépendants** si et seulement si la seule combinaison linéaire qui satisfait  $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$  est  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

- Si  $\det(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3$  sont linéairement dépendants.
- Deux vecteurs sont linéairement dépendants  $\Leftrightarrow$  ils sont parallèles
- Trois vecteurs sont linéairement dépendants  $\Leftrightarrow$  ils sont coplanaires (pas forcément parallèles)

 **Sous – Espace Vectoriel**

Un sous – ensemble  $E'$  d'un espace vectoriel  $E$  est un **sous – espace vectoriel** s'il vérifie les 3 conditions suivantes  $\forall a \in \mathbb{R}$  et  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E'$ :

$$\vec{0} \in E' \quad \vec{u} + \vec{v} \in E' \quad a \cdot \vec{u} \in E'$$

Exemples :

- Les seuls sous espaces dans le  $V_2$  sont les  $\{0\}$ ,  $V_2$ , et les droites qui passent par l'origine.
- Les seuls sous espaces de  $V_3$  sont les  $\{0\}$ ,  $V_3$ , les droites qui passent par l'origine et les plans passant par l'origine.
- Le plan  $z = 0$  (sol) est un s.e.v., mais le  $z = 1$  non car ne passe pas par l'origine.
- Le plan  $x + y + 2z = 0$  est un s.e.v

 **Matrices** :

- Matrice **transposée** ( $A^t$ ) est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.
- Matrice **symétrique** est une matrice carrée A telle que  $A^t = A$ . Les coefficients d'une matrice symétrique sont symétriques par rapport à la diagonale principale.
- Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls. Les coefficients de la diagonale peuvent être ou ne pas être nuls.
- Une **matrice identité** est une matrice carrée diagonale dont la diagonale principale est remplie de 1 et dont les autres coefficients valent 0.
- La **trace** d'une matrice carré  $Tr(A)$  est la somme d'éléments de la diagonale.
- L'**inverse** d'une matrice carrée A est une matrice  $A^{-1}$ , telle que  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
- La matrice est **inversible**  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ .
- $\text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)}$
- $\text{Det}(A^t) = \text{Det}(A)$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

 **Applications Linéaires**

Définition : Une **application linéaire**  $f$  est une application entre deux espaces vectoriels E et F satisfaisant les deux conditions  $\forall a \in \mathbb{R}$  et  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$$

- Si  $f$  est linéaire on a  $f(\vec{0}) = \vec{0}$ . On utilise cette propriété pour prouver que l'application n'est pas linéaire.

Exemples :

i)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$  n'est pas linéaire car  $f(\vec{0}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

ii)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ . On va prouver que c'est linéaire.

- Soit  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ , alors  $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$  et  $f(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ .

A l'autre coté :  $f(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix}$  et  $f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix}$  et alors  $f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

Page | 3  $\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ . Donc  $f(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_2)$

- Soit  $k \in \mathbb{R}$  :  $f(k\vec{u}_1) = f\left(\begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ ky_1 \end{pmatrix}$ . En plus  $kf(\vec{u}_1) = k\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ky_1 \end{pmatrix}$ . Dont :  $f(k\vec{u}_1) = kf(\vec{u}_1)$ . Alors  $f$  est linéaire.

**Matrice A d'une application linéaire** : les colonnes de la matrice A sont les images des vecteurs de base de l'espace vectoriel E exprimées dans une base de F.

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ f(\vec{v}_1) & \cdots & f(\vec{v}_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Pour l'application composée  $h = go f$ , on a  $A_h = A_g \cdot A_f$

Exemples :

- Homothétie : La matrice d'une homothétie de facteur  $k$  est  $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
- Rotation : La matrice d'une rotation dans  $V_2$  de l'angle  $\alpha$  est  $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$
- Symétrie : La matrice d'une symétrie dans  $V_2$  avec l'axe de symétrie qui forme un angle  $\alpha$  avec l'axe de x est  $A = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$
- Trouver la matrice de la projection orthogonale sur l'axe a :  $x - 3y = 0$ . On cherche la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Le vecteur directeur de la droite est  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . C'est vecteur reste invariant par rapport à la transformation :  $A \cdot \vec{a} = \vec{a} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 3 \\ 3c + d = 1 \end{cases}$ .

Le vecteur normal de la droite est  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ . L'image de ce vecteur est 0. Donc  $A \cdot \vec{n} = 0$   
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a - 3b = 0 \\ c - 3d = 0 \end{cases}$ . En résolvant les deux systèmes on obtient  $A = \begin{pmatrix} 9/10 & 3/10 \\ 3/10 & 1/10 \end{pmatrix}$

- Trouver la matrice de la symétrie par rapport de l'axe a :  $x - 3y = 0$ . On cherche la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Le vecteur directeur de la droite est  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . C'est vecteur reste invariant

par rapport a la transformation :  $A \cdot \vec{a} = \vec{a} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 3 \\ 3c + d = 1 \end{cases}$ . Le vecteur normal de la droite est  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ . L'image de ce vecteur est le  $-\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  :  $A \cdot \vec{n} = -\vec{n}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a - 3b = -1 \\ c - 3d = 3 \end{cases}$$

En resolvant les deux systemes on obtient A

$$= \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

### ⊕ Matrice inverse.

On rappelle que A est inversible  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  alors :  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Cas général :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} ((-1)^{i+j} A_{ij})^t$$

Exemple :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . On obtient

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = -30 \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = 20 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +6 & -(-2) & +(-30) \\ -(-4) & +2 & -20 \\ +(-2) & -1 & +11 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -0.5 \\ -15 & -10 & 5.5 \end{pmatrix}$$

### ⊕ Valeurs et vecteurs propres.

Définition :  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une **valeur propre** de l'application  $f$  si il existe un vecteur  $\vec{u} \neq \vec{0}$  tel que  $f(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$  ou  $A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$ . Le vecteur  $\vec{u}$  est le **vecteur propre** corespondant a valeur propre  $\lambda$ .

Les vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants.

Exemples :

- Une homothétie de facteur  $k$  admet la  $\lambda = 1$ .
- Une symétrie d'axe  $a$  dans le  $V_2$  admet les v.p  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = -1$ .

- Une rotation dans le  $V_2$  n'a pas de v.p.
- Une rotation dans le  $V_3$  admet  $\lambda = 1$  qui correspond à l'axe de rotation.
- Une projection sur l'axe  $a$  dans le  $V_2$  admet les v.p  $\lambda_1 = 1$  (axe  $a$ ) et  $\lambda_2 = 0$  ( la direction de la projection)
- Une projection sur l'axe  $a$  dans  $V_3$  admet les v.p  $\lambda_1 = 1$  (axe  $a$ ) et  $\lambda_2 = 0$  ( la direction de la projection- plan - dim =2)
- Une projection sur un plan admet les v.p  $\lambda_1 = 1$  (plan, dim = 2 ) et  $\lambda_2 = 0$  ( la direction de la projection- droite , dim =1)

Page | 5

**Polynôme caractéristique :** C'est l' expression  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ . Les zéros de l' équation  $p(\lambda) = 0$  sont les valeurs propres de l'application  $f$ .

Exemple :

Soit la matrice de l'application  $f$  ,  $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$ . On cherche les valeurs et les vecteurs propres.  $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 6 - \lambda & -3 \\ -2 & 11 - \lambda \end{pmatrix}$ . Le polynôme caractéristique est :

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 \\ -2 & 11 - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)(11 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 17\lambda + 60$ . Par l'équation  $\lambda^2 - 17\lambda + 60 = 0$  on obtient les valeurs propres :  $\lambda_1 = 12$  et  $\lambda_2 = 5$ .

- Vecteurs propres :

$\lambda_1 = 12$ . On cherche le vecteur propre, associé à cette valeur propre. On a  $(A - 12I) \vec{p}_1 = 0$ .

$$\text{Alors, } \begin{pmatrix} 6 - 12 & -3 \\ -2 & 11 - 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et on obtient le système  $\begin{cases} -6x - 3y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$  donc  $y = -2x$  et le vecteur  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Alors tous les vecteurs parallèles au vecteur  $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  admet la valeur propre  $\lambda = 12$ .

$\lambda_2 = 5$ . On a  $(A - 5I) \vec{p}_2 = 0$ . Alors,  $\begin{pmatrix} 6 - 5 & -3 \\ -2 & 11 - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et le système  $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -2x + 6y = 0 \end{cases}$  donc  $x = 3y$  et le vecteur  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  Alors tous les vecteurs parallèles au vecteur  $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  admet la valeur propre  $\lambda = 5$ .

- Le polynôme caractéristique de  $A$  (2 x 2) est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A) \cdot \lambda + \det(A)$$

- **Valeurs – vecteurs propres d'une puissance de  $f$** : si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  et  $\vec{u}$  est le  $\lambda$ - propre vecteur propre alors :

- Si  $f$  est inversible :  $\vec{u}$  est un vecteur propre de  $f^{-1}$  avec valeur propre  $\frac{1}{\lambda}$
- $\vec{u}$  est un vecteur propre de  $f^2$  avec valeur propre  $\lambda^2$
- En général :  $\vec{u}$  est un vecteur propre de  $f^n$  avec valeur propre  $\lambda^n$

Page | 6

Exemple : soit  $g = 3f^3 - 2f^2$ . Alors  $g$  admet la valeur  $3\lambda^3 - 2\lambda^2$  avec le vecteur propre  $\vec{u}$ .

### ⊕ Changement de base

$$\begin{array}{ccc} \text{Base standard } (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) : & \vec{v}_s & \xrightarrow{f} F\vec{v}_s = PF'P^{-1}\vec{v}_s \\ & \uparrow \downarrow p & \uparrow \downarrow p \\ \text{Base propre } (\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) : & \vec{v}_p & \xrightarrow{F'v_p} \end{array}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}' \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

Où  $P$  est la matrice qui a comme colonnes les vecteurs propres et  $F'$  est la matrice diagonale avec les valeurs propres à la diagonale.

Exemple :

Soit l'application  $f$  avec les vecteurs propres  $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$  dont la matrice dans la base propre est  $F' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique.

La matrice de changement de base est  $P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Sa matrice inverse est  $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ .  
Alors

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}' \cdot \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7.5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Trouver la matrice  $F^5$ .

$F = P \cdot F' \cdot P^{-1} \Rightarrow F^5 = (P \cdot F' \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot F' \cdot P^{-1}) \dots (P \cdot F' \cdot P^{-1}) = P \cdot (F')^5 \cdot P^{-1}$ . Et comme  $(F')^5 = \begin{pmatrix} 1^5 & 0 \\ 0 & 2^5 \end{pmatrix}$  on obtient  $F = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^5 & 0 \\ 0 & 2^5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -308 & 465 \\ -248 & 374 \end{pmatrix}$

### ⊕ Noyau et image d'une application linéaire

**Noyau** : c'est l'ensemble des vecteurs dont l'image est le vecteur nul,

$$\text{Ker}(f) = \{\vec{v} \in E : f(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

**Image :**

$$\text{Im}(f) = \{f(\vec{v}) \text{ avec } \vec{v} \in E\}$$

- $f$  est surjective  $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$
- $f$  est injective  $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$

**Théorème :**

Page | 7

- 0 n'est pas une valeur propre  $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow f$  est inversible  $\Leftrightarrow \det(M) \neq 0 \Leftrightarrow$  c'est pas une projection
- Soit  $f: E \rightarrow F$ .  $\dim(\text{ker}(f)) + \dim(\text{im}(f)) = \dim(E)$

**Exemple :**

Trouver le  $\text{Ker}(f)$  et l'image de l'application dont la matrice est  $A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ .

On trouve les valeurs et vecteurs propres de  $f$ .

$$\text{Det}(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{4}{13} - \lambda & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ (projection)}, \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 0 \\ 6x + 9y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x. \text{ Donc } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{2}{3}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} x$$

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ (orthogonale)}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \begin{pmatrix} \frac{4}{13} - 1 & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{9}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & -\frac{4}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -9x + 6y = 0 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x. \text{ Donc } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} x, \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ (orthogonale)}$$

Alors  $f$  est une projection sur la droite parallèle au vecteur  $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  de direction du vecteur  $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  (orthogonale). Alors  $\text{Ker}(f) = \{k \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}\}$  et  $\text{Im}(f) = \{k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}\}$ .

### Transformations Orthogonales

$$f \text{ orthogonale} \Leftrightarrow f(\vec{a}) \cdot f(\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$f \text{ orthogonale} \Leftrightarrow \mathbf{M}^t \cdot \mathbf{M} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^t$$

$f$  orthogonale  $\Leftrightarrow$  les colonnes de sa matrice sont orthonormales (sont perpendiculaires par deux et leur norme = 1).

Si  $M$  est orthogonale  $\Rightarrow \det(M) = \pm 1$

Si  $f$  a une valeur propre  $\lambda \Rightarrow \lambda = \pm 1$

## Description géométrique

### Dans le $V_2$ .

- Si  $\det(M) = +1$  alors  $f$  est une rotation. Elle n'admet pas de valeurs propres.

Page | 8

- Si  $\det(M) = -1$  alors  $f$  est une symétrie axiale. Il y a une seule valeur propre  $\lambda = 1$ . L'axe de symétrie est le 1-propre vecteur.

### Dans le $V_3$ .

- Si  $\det(M) = +1$  alors  $f$  est une rotation. Il y a une v.p.  $\lambda = 1$

-L'axe de rotation est le 1-propre vecteur.

-L'angle de la rotation (a) est l'angle formé par le vecteur normal de l'axe de rotation et l'image de ce vecteur par la transformation  $f$ . Autrement par la formule  $\text{Tr}(M) = 1 + 2\cos(a)$ .

- Si  $\det(M) = -1$  alors  $f$  est une symétrie planaire suivie par une rotation

-Le plan de la symétrie est perpendiculaire au vecteur -1-propre

-L'axe de rotation est le vecteur normal du plan de symétrie, alors c'est le -1-propre vecteur.

-L'angle de rotation est formé par un vecteur sur le plan et l'image de ce vecteur par  $f$ . Autrement par la formule  $\text{Tr}(M) = 2\cos(a) - 1$ .

### Exemple :

Soit la transformation donnée par la matrice  $M = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

- Orthogonale :  $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , On a  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ . En plus  $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = 1$ . Alors c'est orthogonale.
- On trouve le  $\det(M) = 1$  alors  $M$  décrit une rotation et  $\lambda = 1$ .
- L'axe de rotation est le vecteur propre associé à  $\lambda = 1$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- L'angle de rotation  $\text{Tr}(M) = 1 + 2\cos(a)$ .  $\text{Tr}(M) = 2$ , donc  $2 = 1 + 2\cos(a) \Rightarrow \cos(a) = \frac{1}{2}$   
 $\Rightarrow a = 60^\circ$ .

 Transformations symétriques

$$f \text{ symétrique} \Leftrightarrow f(\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot f(\vec{b})$$

$$f \text{ symétrique} \Leftrightarrow M^t = M$$

$$f \text{ symétrique} \Rightarrow \text{diagonalisable}$$

$f$  symétrique  $\Rightarrow$  les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux