Exercice 1

On considère la fonction $f(x)=\left(2x^2+ax-a^2\right)\cdot \mathrm{e}^{-x}$, où a est un nombre réel non nul ($a\in\mathbb{R}^*$).

a) Vérifier que pour toute valeur de a le graphe de f coupe l'axe des abscisses en deux points. Calculer les abscisses de ces points.

b) Vérifier également que pour toute valeur de a le graphe de f possède deux points à tangente horizontale.

Pour la suite du problème, on choisit $a=-1$, donc $f(x)=\left(2x^2-x-1\right)\cdot \mathrm{e}^{-x}$.

c) Étudier la fonction f. On demande : domaine de définition, points d'intersection du graphe et des axes, tableau des signes, équations des éventuelles asymptotes, coordonnées des points à tangente horizontale, tableau des variations, représentation graphique avec une unité égale à deux carreaux.

d) En observant le graphe de f, déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'équation $f(x)=k$ possède une seule solution.

Exercice 2

a) On considère les fonctions du type $f(x)=ax^2+b\cdot\ln(x)$ où a et b sont des nombres réels. Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles la tangente au graphe de f en son point d'abscisse 1 a pour équation $y=1$.

b) Dessiner, dans un même repère, les graphes des fonctions $g(x)=x^2$ et $h(x)=2\ln(x)$.

c) Étudier la fonction $f(x)=x^2-2\ln(x)$.