



Equation du cercle $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

Page | $C(x_0; y_0)$ le centre r : le rayon

1

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

- Si $a^2 + b^2 - 4c > 0$ on a un cercle de rayon $r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}}$
- Si $a^2 + b^2 - 4c < 0$ impossible
- Si $a^2 + b^2 - 4c = 0$ on a un point $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$

Exemples :

i. Trouver le centre et le rayon du cercle : $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4 \text{ donc } C(-2; 3), r = 2$$

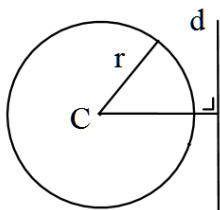
ii. Trouver le centre et le rayon du cercle : $-2x^2 - 2y^2 + 14x - 5y = 0$

$$-2x^2 - 2y^2 + 14x - 5y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 7x + \frac{5}{2}y = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} = 0 \Leftrightarrow$$

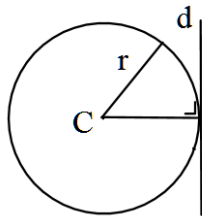
$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{221}{16}, \text{ donc } C\left(\frac{7}{2}; -\frac{5}{4}\right) \text{ et } r = \frac{\sqrt{221}}{4}$$



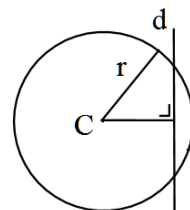
Position relative droite – cercle :



$\text{dist}(C, d) > r$
disjoints



$\text{dist}(C, d) = r$
tangents



$\text{dist}(C, d) < r$
secants

Exemples:

i. Trouver la position relative du cercle $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y = 24$ et la droite $x + 3y - 58 = 0$

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y = 24 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 = 12 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25, C=(2;3)$$

Page |

$$r = 5.$$

$$2 \text{ dist}(C,d) = \frac{|2+3 \cdot 3 - 58|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{47}{\sqrt{10}} \approx 14.9 > 5 = r, \text{ alors la droite ne coupe pas le cercle.}$$

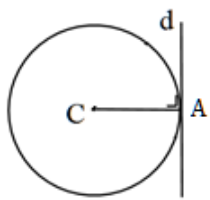
ii. Vérifier que la droite $2x + y - 6 = 0$ coupe le cercle $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ en deux points. En suite trouver les points d'intersection.

$$C(-1;2), r = 3. \text{ Dist}(C,d) = \frac{|2(-1) + 2 - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \approx 2.7 < 3. \text{ Alors la droite est sécante au cercle.}$$

$$2x + y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 6. \text{ On remplace dans l'équation du cercle.}$$

$$(x+1)^2 + (-2x + 6 - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (-2x + 4)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 16x + 16 = 9 \Leftrightarrow$$

$$5x^2 - 14x + 8 = 0, \Delta = 36, x_{1,2} = \frac{14 \pm 6}{10}, x_1 = 2, x_2 = \frac{4}{5} \quad y_1 = 2, y_2 = \frac{22}{5}.$$

**Tangente du cercle**

On cherche le vecteur normal de la droite d.

$$\vec{n}_d = \overrightarrow{CA}$$

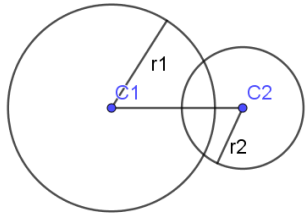
Exemple:

Soit le cercle $(x-3)^2 + (y+14)^2 = 68$ et le point $A(1;-6)$ sur le cercle. Déterminer l'équation de la tangente t au cercle qui passe par le point A.

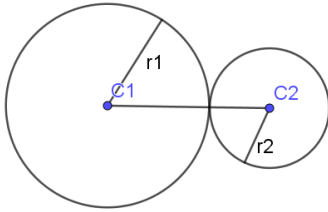
$$\text{Le centre du cercle } C(3;-14), r = \sqrt{68}. \quad \vec{n}_t = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } t : x + 4y + c = 0. \text{ En remplaçant les coordonnées du point A on obtient : } 1 - 24 + c = 0 \Leftrightarrow c = 23$$

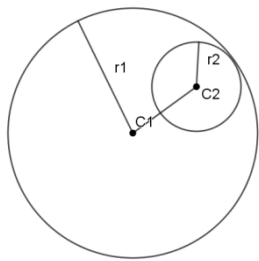
$$\text{Alors } t : x + 4y - 23 = 0$$



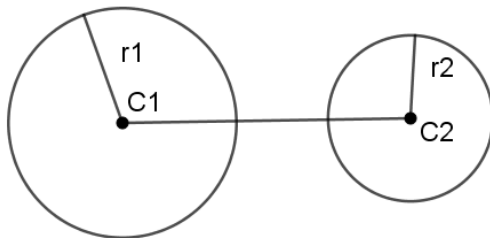
$$\text{Dist}(C_1, C_2) = |r_1 - r_2| < \|\overline{C_1 C_2}\| < r_1 + r_2 \quad (\text{Secants})$$



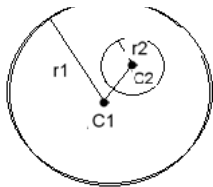
$$\text{Dist}(C_1, C_2) = \|\overline{C_1 C_2}\| = r_1 + r_2 \quad (\text{Tangents extérieurement})$$



$$\text{Dist}(C_1, C_2) = \|\overline{C_1 C_2}\| = |r_1 - r_2| \quad (\text{Tangents intérieurement})$$



$$\text{Dist}(C_1, C_2) = \|\overline{C_1 C_2}\| > r_1 + r_2 \quad (\text{Disjoints})$$



$$\text{Dist}(C_1, C_2) = \|\overline{C_1 C_2}\| < |r_1 - r_2|$$

Exemples :

Etudier la position relative des cercles suivants :

i. $x^2 + 4x + y^2 - 4y - 1 = 0$ et $x^2 - 10x + y^2 - 8y + 16 = 0$

$$x^2 + 4x + y^2 - 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-2)^2 - 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = 9 \quad C_1(-2; 2), r_1 = 3$$

$$x^2 - 10x + y^2 - 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 - 25 + (y-4)^2 - 16 + 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-4)^2 = 16 \quad C_2(5; 4), r_2 = 4$$

$$\text{dist}(C_1, C_2) = \|\overline{C_1 C_2}\| = \left\| \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53} \approx 7.28 > r_1 + r_2 = 7 \quad \text{Donc les cercles sont disjoints}$$

ii. $x^2 + y^2 - 10y + 23 = 0$ et $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 36$

$$x^2 + y^2 - 10y + 23 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-5)^2 - 25 + 23 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-5)^2 = 2 \quad C_1(0;5), r_1 = \sqrt{2}$$

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 36, \quad C_2(-4;3), r_2 = 6$$

Page | 4 $\text{dist}(C_1, C_2) = \|\overrightarrow{C_1 C_2}\| = \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4.47 < r_1 + r_2 = 7.41$ Donc les cercles sont sécants

iii. $(x+2)^2 + (y-7)^2 = 121$ et $x^2 - 12x + y^2 - 2y + 36 = 0$

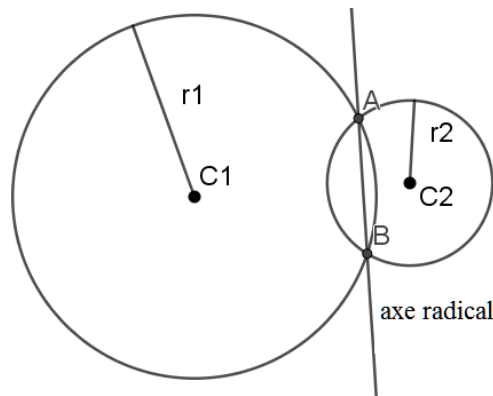
$$C_1(-2;7) \quad r_1 = 11$$

$$x^2 - 12x + y^2 - 2y + 36 = 0 \Leftrightarrow (x-6)^2 - 36 + (y-1)^2 - 1 + 36 = 0 \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-1)^2 = 1, \quad C_2(6;1), r_2 = 1$$

$$\text{dist}(C_1, C_2) = \|\overrightarrow{C_1 C_2}\| = \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 = |r_1 - r_2| \text{ Donc les cercles sont tangents intérieurement}$$



Intersection des deux cercles



- On trouve l'axe radical : On soustrait les équations des deux cercles
- On trouve les points d'intersection entre d'un des deux cercles et l'axe radical.

Exemple :

Trouver les points d'intersections des cercles $x^2 + (y-2)^2 = 25$ et $(x+4)^2 + y^2 = 49$

On trouve l'axe radical : $x^2 + y^2 - 4y + 4 - 25 = x^2 + 8x + 16 + y^2 - 49 \Leftrightarrow 8x + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$

On trouve les points d'intersection entre l'axe et le premier cercle :

$$2x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 3$$

On remplace dans l'équation du cercle :

$$x^2 + (-2x+3-2)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + (-2x+1)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + 4x^2 - 4x + 1 - 25 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 4x - 24 = 0$$

$$x_1 = 2.63 \Rightarrow y_1 = -2.26 \quad A(2.63; -2.26) \text{ et } x_2 = -1.83 \Rightarrow y_2 = 6.65 \quad B(-1.83; 6.65)$$