LDDR / Maths I mars 2022 (A)

TE 3 : Probabilités

Nom : ....

points	note

Exercice 1. [~35 minutes, 11 pts]

Cinq jetons portant les numéros "1", "2", "3", "4" et "4" sont mis dans un chapeau.

a) On tire tous les jetons, successivement et sans remise.

1) Combien de nombres peut-on former ? $\frac{5!}{2!} = 60$

2) Combien de ces nombres commencent par "4" ? $4! = 24$

Répondre aux mêmes questions si on tire sept jetons, successivement mais avec remise.

1') $\underbrace{4 \cdot 4 \cdots 4}_{7} = 4^7 = 16'384$ 2') $\underbrace{4 \cdot 4 \cdots 4}_{6} = 4^6 = 4'096$

b) On tire, avec remise, des jetons du chapeau jusqu'à l'obtention du numéro "1". Quelle est la probabilité de devoir tirer au moins sept jetons ?

$$\mathbb{P}(6 \times \bar{1}) = \left(\frac{4}{5}\right)^6 = \frac{4'096}{15'625} \quad (= 0{,}262144)$$

c) Déterminer le nombre minimal de jetons qu'il faut tirer avec remise pour avoir plus de 97% de chances de tirer au moins une fois celui qui porte le numéro "1" (calculs détaillés).

$$1 - \mathbb{P}(n \times \bar{1}) \geq 0{,}97, \quad 1 - (4/5)^n \geq 0{,}97, \quad -(4/5)^n \geq -0{,}03$$

$$(4/5)^n \leq 0{,}03, \quad n \ln(4/5) \leq \ln(0{,}03), \quad n \geq \frac{\ln(0{,}03)}{\ln(0{,}8)} \cong 15{,}71$$

donc $n = 16$ au minimum

d) On tire un jeton puis on lance autant de dés que l'indique son numéro.

1. Quelle est la probabilité (en fraction) d'obtenir exactement trois "6" ?

$$\mathbb{P}(\text{jeton} = 3 \text{ et dés} = \text{"666"}) + \mathbb{P}(\text{jeton} = 4 \text{ et dés} = \langle 666\bar{6} \rangle)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 4 = \frac{1}{1080} + \frac{40}{6480} = \frac{46}{6480}$$

$$= \frac{23}{3240}$$

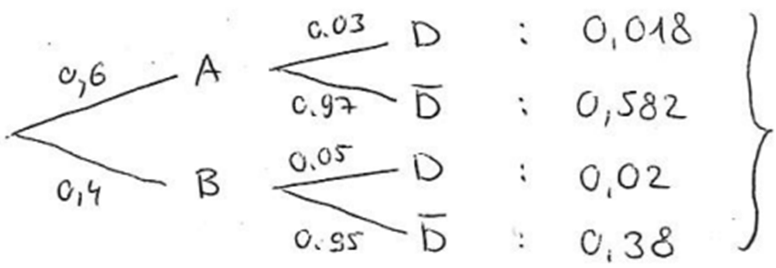
2. Sachant qu'on a obtenu exactement trois "6" avec les dés, quelle est la probabilité (en fraction) d'avoir tiré un des jetons portant le numéro "4" ?

$$\frac{40/6480}{46/6480} = \frac{40}{46} = \frac{20}{23}$$

Exercice 2. [~30 minutes, 10 pts]

Un atelier est équipé de deux machines A et B qui assurent respectivement 60% et 40% de sa production et qui fabriquent respectivement 3% et 5% de pièces défectueuses.

a) Représenter la situation par un arbre (avec probabilités sur les branches).



somme = 1 :)

Calculer la probabilité des événements suivants.

b) Une pièce prise au hasard dans la production est défectueuse.

$$\mathbb{P}(-D) = 0,018 + 0,02 = 0,038$$

c) Une pièce prise au hasard a été produite par B sachant qu'elle est défectueuse.

$$\mathbb{P}(B- | -D) = \frac{\mathbb{P}(BD)}{\mathbb{P}(-D)} = \frac{0,02}{0,038} = \frac{20}{38} = \frac{10}{19}$$

d) Sur quinze pièces produites par A, exactement trois d'entre elles sont défectueuses.

$$\mathbb{P}(\langle 3\times D_A, 12\times \overline{D}_A\rangle) = \underbrace{\binom{15}{3}}_{455}(0,03)^3(0,97)^{12} \cong 0,852\ \%$$

e) Sur quinze pièces prises au hasard, il y a douze pièces sans défaut, une pièce défectueuse provenant de la machine A et deux pièces défectueuses provenant de la machine B.

$$\mathbb{P}(\langle 12\times\overline{D}, 1\times AD, 2\times BD\rangle) = \underbrace{\frac{15!}{12!\,1!\,2!}}_{1365}(0,962)^{12}(0,018)(0,02)^2$$

$$\cong 0,617\ \%$$

f) Sur cinq pièces produites par A, au moins deux d'entre elles sont défectueuse.

1 − $\mathbb{P}$(aucune ou une seule pièce défectueuse)

$$= 1 - \left((0,97)^5 + 5\cdot(0,97)^4(0,03)\right) = 1-(0,97)^4\overbrace{\left(0,97+5\cdot(0,03)\right)}^{1,12}$$

$$\cong 0,847\ \%$$

g) Un lot est constitué de dix pièces de la machine A et n pièces de la machine B. Lorsqu'on tire au hasard une pièce de ce lot, la probabilité qu'elle provienne de la machine B vaut 0.8. Trouver la valeur de n.

$$\frac{n}{10+n} = 0,8\ ,\quad n = 8+0,8n\ ,\quad 0,2n = 8\ ,\quad n = 40$$