LDDR – Niveau 1 : TE 25 3D - Solutions

LDDR / Maths I — mai 2018 (B)

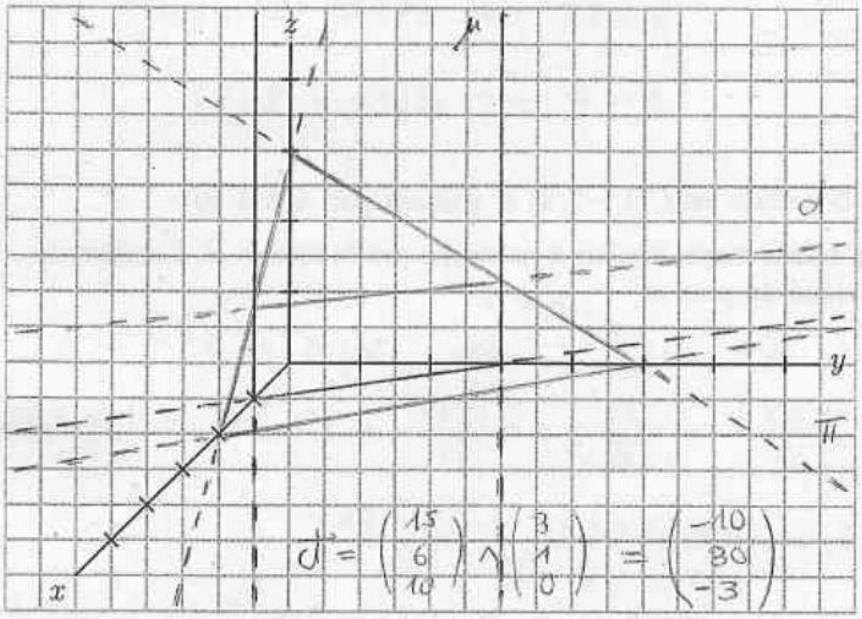
TE 5 : Géométrie 3D

Nom : .....

points	note

Exercice 1 [~15 minutes, 4.5 pts]

Dessiner (avec trois couleurs) les plans $\pi : 15x + 6y + 10z - 30 = 0$ et $\mu : 3x + y - 3 = 0$ ainsi que la droite d'intersection d. Trouver un vecteur directeur $\vec{d}$ et un point P de d.



$\vec{d} = \begin{pmatrix}15\\6\\10\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\30\\-3\end{pmatrix}$

π : $I_x(2,0;0)$

$I_y(0;5;0)$

$I_z(0;0,3)$

μ : $I_x(1,0;0)$

$I_y(0,3;0)$

I_z ∅

$P = mur \cap \mu \cap \pi$

$x=0 \quad y=3 \quad z=1.2$

donc $P(0;3;1.2)$

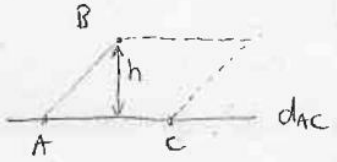
Exercice 2 [~15 minutes, 4.5 pts]

On considère les points $A(2;3;1)$, $B(0;2;-1)$ et $C(6;1;1)$.

a) Calculer l'angle au sommet A dans le triangle ABC avec trois décimales.

$$\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \sphericalangle\left(\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{9}\sqrt{20}}\right) \cong 116.565°$$

b) Calculer la distance du point B à la droite d_{AC}.



$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-8\\8\end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 4 \cdot \sqrt{9} = 12$$

$$h = \frac{\text{Aire}}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{12}{\sqrt{20}} = \frac{12}{2\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

c) Trouver une équation cartésienne simplifiée du plan contenant le triangle ABC.

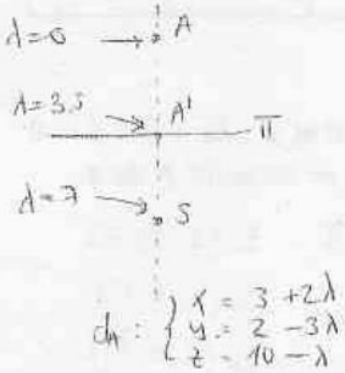
$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \parallel \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ donc $\pi : x + 2y - 2z + d = 0$

$A \in \pi$ donc $2 + 6 - 2 + d = 0$, $d = -6$ donc $\pi : x + 2y - 2z - 6 = 0$

Exercice 3 [~40 minutes, 11 pts]

On considère le point $A(3;2;10)$ et le plan $\pi : 2x - 3y - z - 39 = 0$.

a) Déterminer la projection orthogonale de A sur π et le symétrique de A par rapport à π.



$d_A : \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 2-3\lambda \\ z = 10-\lambda \end{cases}$

$d_A \cap \pi : 2(3+2\lambda) - 3(2-3\lambda) - (10-\lambda) - 39 = 0$

$6 + 4\lambda - 6 + 9\lambda - 10 + \lambda - 39 = 0$

$14\lambda - 49 = 0, \quad 14\lambda = 49$

$\lambda = 3{,}5 \longrightarrow A'(10; -8{,}5; 6{,}5)$

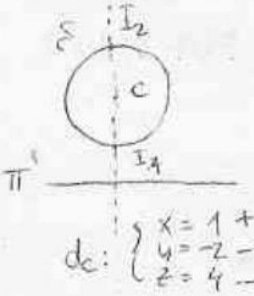
$\lambda = 7 \longrightarrow S(17; -19; 3)$

On considère encore la sphère $\mathcal{S}$ centrée en $C(1;-2;4)$ et passant par $A(3;2;10)$.

b) En calculant des distances, montrer que le plan π ne coupe pas la sphère $\mathcal{S}$. Localiser le point de la sphère $\mathcal{S}$ le plus éloigné du plan π.

$\mathcal{S} : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 56$ ← $A \in \mathcal{S}$ donc rayon $= \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

$\text{dist}(C,\pi) = \dfrac{|2-(-6)-4-39|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}} = \dfrac{35}{\sqrt{14}} = \dfrac{35\sqrt{14}}{14} = 2{,}5\sqrt{14} > r = 2\sqrt{14}$



$d_C : \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -2-3\lambda \\ z = 4-\lambda \end{cases}$

$d_C \cap \mathcal{S} : (2\lambda)^2 + (-3\lambda)^2 + (-\lambda)^2 = 56$

$4\lambda^2 + 9\lambda^2 + \lambda^2 = 56$

$14\lambda^2 = 56, \quad \lambda^2 = 4, \quad \lambda = \pm 2$

$\longrightarrow I_1(-3;4;6)$ et $I_2(5;-8;2)$

$\|\overrightarrow{I_1C}\| = \left\|\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{56} < \text{dist}(C,\pi)$

donc $I_2(5;-8;2)$

c) Trouver les équations des plans parallèles au plan π et tangents à la sphère $\mathcal{S}$.

$\pi_{1,2} : 2x - 3y - z + d = 0$ car plans $\parallel \pi$

$I_1 \in \pi_1$ donc $\pi_1 : 2x - 3y - z + 24 = 0$

$I_2 \in \pi_2$ donc $\pi_2 : 2x - 3y - z - 32 = 0$

d) Trouver une condition sur $c \in \mathbb{R}$ pour que l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 26z + c = 0$ soit celle d'une sphère $\mathcal{S}'$ et indiquer le centre C' de cette sphère.

$x^2 - 8x + y^2 - 8y + z^2 - 26z + c = 0$

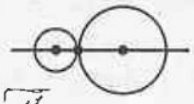
$(x-4)^2 - 16 + (y-4)^2 - 16 + (z-13)^2 - 169 + c = 0$

$(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-13)^2 = 201 - c > 0$

$C'(4;4;13)$

$c < 201$

e) Trouver le rayon de la sphère $\mathcal{S}'$ qui est tangente externe à $\mathcal{S}$:



$\text{dist}(C,C') = \|\overrightarrow{CC'}\| = \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right\| = 3\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = 3\sqrt{14}$

$r' = \text{dist}(C,C') - r = 3\sqrt{14} - 2\sqrt{14} = \sqrt{14}$