Série 1 – Fonctions expo. et log.

Exercice 1

Calculer sans machine:

a. 2^{-1} b. 4^{-2} c. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$ d. $\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

e. $125^{-\frac{1}{3}}$ f. $0{,}125^{-\frac{1}{3}}$ g. $0{,}0001^{-\frac{3}{4}}$ h. $16^{-\frac{3}{4}}$

i. $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$ j. $3^{-2} \cdot 3^{5}$ k. $\frac{5^{-3}}{5^{-5}}$ l. $\left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}\right)^{2}$

Exercice 2

Exprimer les expressions suivantes sous la forme a^n :

a. $\frac{1}{a}$ b. $\sqrt[3]{a}$ c. $\sqrt{a^3}$ d. $\sqrt{\frac{a^2}{a^3}} =$

e. $\frac{(a^2)^3}{\sqrt{a}}$ f. $\sqrt{(a^3)^2}$ g. $\frac{1}{a^3 \cdot a^5}$ h. $\frac{\sqrt[2]{a^3}}{a^{\frac{1}{2}}}$

i. $\left(\frac{a^5}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ j. $(a+a^2)^2$ k. $(a^2 \cdot a^{-3})^{-\frac{1}{2}}$ l. $a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

Exercice 3

Mettre sous forme de puissance et simplifier :

a. $\frac{\sqrt{18} \cdot 2^3}{3^{\frac{1}{2}}}$ b. $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{2^{\frac{1}{2}}+2}$ c. $\frac{2^{-\frac{1}{3}}+2^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}$ d. $\frac{\sqrt{252}+7^{\frac{1}{2}}}{2^3-1}$

Exercice 4

Résoudre pour x en utilisant le fait que si $a^x = a^y$ alors $x = y$

a. $2^x = 4\sqrt{2}$ b. $2^x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{64}}$ c. $5^{2x+1} = \sqrt{5\sqrt{125}}$

d. $3^x\sqrt{3} = 9$ e. $2^x \cdot \sqrt[x]{64} = 32$

Exercice 5

Choisir une valeur pour $k \in]1;10[$ non entière.

Dessiner, à l'aide d'un tableau de valeurs, les graphes des fonctions f et g données par :

$$f(x) = k^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \left(\frac{1}{k}\right)^x$$

Comparer les graphes et déduire des propriétés de la fonction exponentielle.

Que se passe-t-il si $k < 0$? par exemple $f(x) = (-2)^x$?

Exercice 6 (par groupes)

Considérer les quatre fonctions suivantes :

$f(x) = x + 10$ $\quad g(x) = 10x$ $\quad h(x) = x^{10}$ $\quad i(x) = 10^x$

a. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	5
$f(x)$								
$g(x)$								
$h(x)$								
$i(x)$								

b. Déterminer leurs fonctions inverses respectives et **tester ces inverses** sur le tableau de valeurs.

c. Déterminer la dérivée de chacune de ces fonctions

Exercice 7

Calculer ces valeurs **sans** calculatrice, puis vérifier avec :

a. $\log_3(81)$ b. $\log_9(27)$ c. $\log_8(2)$

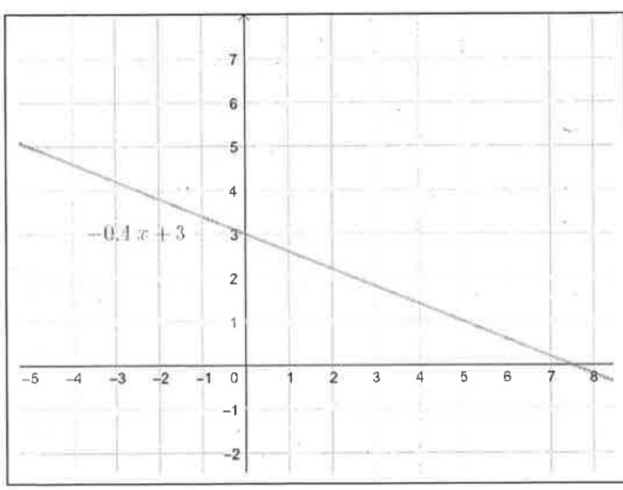
d. $\log_{13}(1)$ e. $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{16}{81}\right)$ f. $\log_5\left(\frac{1}{625}\right)$

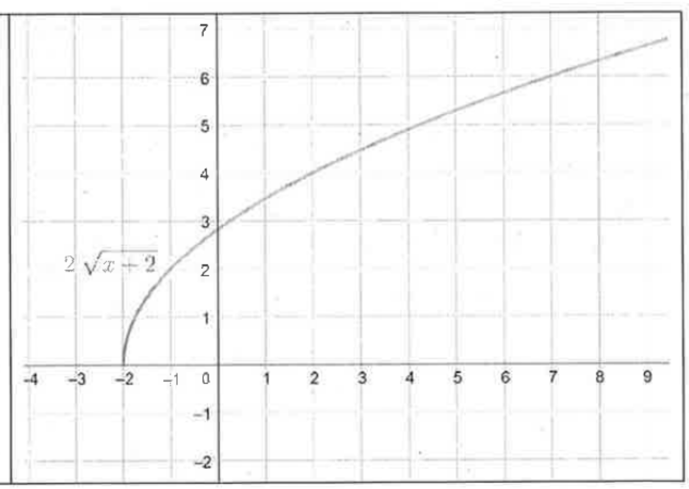
g. $\log_5(125)$ h. $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$ i. $\log_2(0{,}125)$

j. $\log(10)$ k. $\log(0{,}001)$ l. $\log_{\frac{1}{2}}(32)$

Exercice 8

Tracer le graphe des fonctions réciproques à celles tracées ci-dessous :





Exercice 9

Représenter avec soin le graphe de la fonction $y = log_2(x)$ pour $x \in [-4\,;\,16]$. Tracer également sa fonction inverse.

Exercice 10

Simplifier les expressions sans utiliser la calculatrice :

a. $\log_4(7) \cdot \log_7(16)$ b. $\log_3(4) \cdot \log_4(5) \cdot \log_5(9)$ c. $\frac{\log_3(125)\cdot\log_2(\sqrt[3]{3})}{\log_8(5)}$

Exercice 11

Prouver la formule du changement de base à l'aide des propriétés des logarithmes.

Exercice 12

Résoudre les équations ci-dessous :

a. $x = \log_2(3)$ b. $5 \cdot 3^x = 20$ c. $3^x = 2^{x+1}$

d. $\log_4(x-1) = 2$ e. $\log\left(\frac{x}{3}\right) = 1$ f. $4 \cdot 7^x = 3^{2x}$

g. $\log_5(x^2) = 1$ h. $\log_x(2x-3) = 1$ i. $\log_x(2\sqrt{x}-2) = \frac{1}{2}$

Exercice 13

Résoudre les équations ci-dessous :

a. $log(x) = log(3) + log(4)$

b. $log(x) = log(7) - log(6) + log(48)$

c. $log(x) = 2 - 3log(2) + log(4) - 2log(5)$

Exercice 14 (par groupes)

À l'aide des graphes de $f(x) = e^x$ et de $g(x) = \ln(x)$ dans le cours, donner :

a. Les domaines de définition D_f et D_g
b. Les ensembles images Im_f et Im_g
c. Les coordonnées de points d'intersections avec les axes.
d. Les équations des éventuelles asymptotes en précisant les limites associées.
e. Les tableaux de signe, de variation et de courbure de f et g.

Exercice 15

Répondre aux mêmes questions que l'exercice précédent avec les fonctions :

$$f(x) = e^{2x+1} \qquad g(x) = \ln(3x-5)$$

Exercice 16

Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = e^{4x}$ $g(x) = e^{2x^2-3x}$ $h(x) = (2x-1)e^{-3x}$ $i(x) = e^{-x^2}$

Exercice 17

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ dans les situations suivantes :

a. $f(x) = x^2$ b. $f(x) = -\frac{1}{x}$ c. $f(x) = e^x$

d. $f(x) = e^x + 5$ e. $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$ f. $f(x) = x^3$

g. $f(x) = 3$ h. $f(x) = \sin(x)$ i. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Exercice 18

Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(2x^7-1)}{e^{2x}}$ b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-3x^2}{e^x}$ c. $\lim\limits_{x\to0}(3x-2)e^{3x}$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2 \cdot e^{-x}$ e. $\lim\limits_{x\to2^+} e^{\frac{-3}{x-2}}$

Exercice 19 Règle de l'Hospital (en +)

Soit la limite : $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(a) = g(a) = 0$.

Dans cette situation précise, la règle de L'Hospital nous dit que : $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

pour autant que cette nouvelle limite existe.

Calculer les limites suivantes, en faisant usage de la règle de L'Hospital à bon escient

a. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} =$	b. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+3x-4}{x-1} =$	c. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} =$
d. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+3x-4}{x+1} =$	e. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2} =$	f. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5}{e^x} =$

Exercice 20

Pour chacune des fonctions ci-dessous :

a. Déterminer le domaine d'existence et les équations de toutes les asymptotes
b. Dresser le tableau de croissance et le tableau de courbure
c. Esquisser le graphe.

$$f_1(x) = e^x - 1 \quad f_2(x) = e^x - x \quad f_3(x) = xe^x \quad f_4(x) = x^2e^x$$

Exercice 21

Déterminer la valeur de k afin que la fonction $f(x) = e^{-kx^2}$ ait un point d'inflexion en $x = \sqrt{3}$.

Exercice 22

Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = ln(x)$ $\quad$ $f_2(x) = ln(x^2)$

$f_3(x) = ln(x^2 - 1)$ $\quad$ $f_4(x) = ln\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x - 1\right)$

Exercice 23

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \ln(3 - 5x)$ $\quad$ $f_2(x) = -2\ln(x^2 + 5)$ $\quad$ $f_3(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Exercice 24

Considérer la fonction $f(x) = ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$

a. Déterminer son domaine d'existence
b. Dresser son tableau de croissance.

Exercice 25

Étudier (signes, croissance, courbure et esquisse de graphe) les fonctions suivantes :

a. $f_1(x) = x + ln(x)$ $\quad$ b. $f_2(x) = x - ln(x)$ $\quad$ c. $f_3(x) = \frac{ln(x)}{x}$

d. $f_4(x) = x\,ln(x) - x$ $\quad$ e. $f_5(x) = ln(x)^2$ $\quad$ f. $f_6(x) = x\,ln(x)$

Exercice 26

Considérons la fonction $f(x) = \frac{2-x}{x}e^{-x}$

a. Déterminer son tableau de signe.
b. Déterminer les équations de ses éventuelles asymptotes.

Exercice 27

Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, intersections, signe, variation, asymptote) et tracer leur graphe.

a. $f(x) = \ln(3x)$

b. $f(x) = e^x(1-x)$

c. $f(x) = e^{-x}$

d. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$

e. $f(x) = \ln\left(\frac{3x-2}{x-6}\right)$

f. $f(x) = e^{x^2-2x}$

g. $f(x) = \frac{x^5}{e^{x-1}}$

h. $f(x) = \ln(e^x)$

Exercice 28

Déterminer l'équation de la tangente T en $x = 1$ des fonctions suivantes :

a. $f(x) = e^x$ b. $f(x) = \ln(x)$ c. $f(x) = \ln(6-2x)$

Exercice 29

Soit la fonction $f(x) = (kx+4)e^x$ avec $k \in \mathbb{R}$.

a. Quelle valeur doit-on donner à k pour que le graphe coupe l'axe horizontal en $x = 3$?

On fixe pour la suite $k = -3$:

b. Dresser le tableau de croissance de cette fonction, en calculant les coordonnées complètes des points à tangente horizontale.

c. Esquisser proprement sa représentation graphique en indiquant clairement sur le graphique ses éventuels maximums, minimums et intersections avec les axes.

Indiquer également, approximativement, ses éventuels points d'inflexion **sans effectuer de calculs.**

Exercice 30 (CRM – analyse 6.54)

La grippe se propage à partir d'un individu malade dans une population de 1'000 personnes. On admet que le nombre N de personnes qui sont ou ont été atteintes par la grippe après t jours est donné par :

$$N(t) = \frac{1000}{1 + 999 \cdot 10^{-0.17t}}$$

a. Combien de personnes ont-elles été atteintes après 20 jours ?

b. Après combien de jours 600 personnes ont-elles été atteintes ?