Fonctions exponentielles et logarithmiques

Exercice 1
Représenter graphiquement (par étapes !) les fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto 3^x$
b) $g : x \mapsto 3^{-x} - 1$
c) $h : x \mapsto -3^x + 3$

Exercice 2 (facultatif)
A partir du graphe de la fonction $f(x) = 2^x$ esquisser (par étapes) le graphe de :

a) $f_1(x) = 2^x + 2$ **b)** $f_2(x) = 2^x - 2$

c) $f_3(x) = 2^{x-3}$ **d)** $f_4(x) = 2^{x+3}$

Exercice 3
1. Esquisser soigneusement le graphe de $f(x) = e^x$
2. A partir du graphe de la fonction f esquisser (par étapes) le graphe de

$$g(x) = |e^{x-1} - 2|$$

Exercice 4
Résoudre les équations suivantes :

a) $2^{2x} = 8$ **d)** $5^{3x+2} = 5^{x^2+1}$

b) $4^{2x-5} = 256$ **e)** $4 \cdot 2^{x^2+x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

c) $2^{x^2-5x+10} = 64$ **f)** $3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{3}$

Exercice 5
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{4x}$ **g)** $f(x) = \sqrt{e^x}$
b) $f(x) = x^3 e^x$ **h)** $f(x) = e^{\sin(x)}$
c) $f(x) = (2x^2 - 3)e^{3x}$ **i)** $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
d) $f(x) = (-2x^2 + x - 3)e^x$ **j)** $f(x) = \frac{e^x}{x}$
e) $f(x) = \frac{1}{e^{-x}}$ **k)** $f(x) = e^{x^2+4x-1}$
f) $f(x) = e^{-x}$ **l)** $f(x) = \sin(x)e^x$

Exercice 6
1. Trouver l'équation cartésienne de la tangente t au point d'intersection du graphe de la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ avec l'axe des y.
2. Dessiner le graphe de f.

Exercice 7
Soit $f : x \mapsto \frac{e^{-nx^2}}{x+3}$.
Pour quelle valeur de n cette fonction n'a-t-elle qu'un seul point à tangente horizontale ?

Fonctions exponentielles et logarithmiques

Exercice 8

On considère la fonction $f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$.
Trouver les valeurs de a et b sachant que le graphe de f admet un seul point à tangente horizontale, d'abscisse 2.

Exercice 9

Sous quel angle les courbes d'équations $y = e^{x+2}$ et $y = e^{-x}$ se coupent-elles ?

Exercice 10

Pour quelle(s) valeur(s) de a le graphe de $f(x) = e^{x^3+ax+x}$ admet-il

a) un seul point à tangente horizontal ?
b) deux points à tangente horizontal ?

Exercice 11

Trouver le point A pour lequel la pente de la tangente au graphe de $f(x) = e^{2x-1}$ vaut $2e^{-1}$.

Exercice 12

Sachant que la droite $t: -2x + y - 1 = 0$ est la tangente au graphe de $f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$ au point d'abscisse 0, trouver les valeurs de a et b.

Exercice 13

Soit la fonction $f(x) = (x^2 - 2x - 3)e^{-2x}$

a) Trouver les zéros de f.
b) Déterminer son signe.
c) Déterminer son comportement asymptotique.

Exercice 14

Soit la fonction $f(x) = 6xe^{-x^2}$.

a) Déterminer la parité de f.
b) Trouver l'équation de la tangente au graphe de f au point $A(1\ ;\ ?)$

Exercices facultatifs 15 - 23

Exercice 15

Pour quelle(s) valeur(s) de a le graphe de la fonction $f(x) = (x^2 + ax + 1)e^x$ admet- il deux points à tangente horizontal ?

Exercice 16

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes (simplifier au maximum) :

a) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{2x}}{e^x}$

b) $f(x) = e^{-2x} \cdot \cos^2(x)$

Exercice 17

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{x}$

Déterminer :

- **a)** son domaine de définition, puis son comportement au voisinage de l'exclu.
- **b)** son comportement asymptotique.
- **c)** la parité de f.
- **d)** sa dérivée et le(s) point(s) à tangente horizontale

Exercice 18

Soit la fonction $f(x)=e^{\sin(x)}$.

- **a)** Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point $A(0\,;\,?)$.
- **b)** Calculer l'angle aigu formé par le graphe de f et l'axe des y.

Exercice 19

On considère la fonction $g(x) = (x^2 + a)e^x$ où a est un nombre réel.
Pour quelle(s) valeur(s) de a le graphe de g admet-il deux points à tangente horizontal ?

Exercice 20

Montrer que le point $O(0\,;\,0)$ est bien un point à tangente horizontale du graphe de la fonction $f(x)=e^{-2x}\sin^2(3x)$.

Exercice 21

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$

- **a)** Trouver l'équation cartésienne de la tangente au point d'intersection du graphe de f avec l'axe des y.
- **b)** Trouver le point A du graphe de f pour lequel la pente de la tangente en ce point vaut zéro.

Exercice 22

Donner le domaine de définition et la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- **a)** $f(x) = e^{2x}\sin(x)$
- **b)** $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{\cos(x)}$

Exercice 23

On donne la fonction $f : x \mapsto y = (x^2 - 3)e^x$

- **a)** Déterminer le comportement asymptotique de f.
- **b)** Etablir l'équation de la tangente au graphe de f au point $A(-1\,;\,?)$.
- **c)** Déterminer l'ange entre le graphe de f et l'axe des y, l'axe des x.

Fonctions exponentielles et logarithmiques

Exercice 24
Justifier :

1. Les graphes de $f(x) = e^{x^2+x}$ et $g(x) = e^{3x-2}$ ne se coupent pas.
2. Le graphe de $f(x) = e^{(x-2)^2}$ coupe la droite $y = 1$ en un seul point.
3. Le graphe de $f(x) = x + e^{-x}$ présente un seul point à tangente horizontal.

Exercice 25
Etudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = (x - 1)^2 e^x$

b) $f(x) = \dfrac{e^x}{(x-1)^2}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

d) $f(x) = (x^2 + x - 5)e^{-x}$

Exercice 26
Trouver les logarithmes suivants :

a) $\log_3(81) =$

b) $\log_6(\dfrac{1}{36}) =$

c) $\log_8(4) =$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(16) =$

e) $\log(10^5) =$

f) $\log(0{,}00001) =$

g) $\ln(4) =$

h) $\ln(e^3) =$

Exercice 27
Sachant que $\log(2) \cong 0{,}301$ et $\log(3) \cong 0{,}471$, calculer à la main :

a) $\log(6)$

b) $\log(9)$

c) $\log(\dfrac{3}{8})$

d) $\log(\sqrt[3]{3})$

Exercice 28
Trouver la valeur de x :

a) $\log_3(x) = 4$

b) $\log_4(x) = 3$

c) $\log(x) = -4$

d) $\log_x(512) = 9$

e) $\ln(e^2) = x$

f) $\log_x(81) = 4$

g) $\log_x(\dfrac{1}{27}) = 3$

h) $\log_x(32) = -5$

i) $\log(\dfrac{1}{100000}) = x$

j) $\ln(e^x) = - 4$

Exercice 29
Résoudre les équations suivantes :

a) $5^x = 2$

b) $e^{x+3} = 10$

g) $\log(12x + 40) - \log(x - 4) = 2$

h) $\ln(x + 1) + \ln(x + 5) = \ln 96$

c) $2e^{2x} = 1$

d) $\ln(x - 1) = 3$

e) $\log(x) = -\dfrac{3}{4}$

f) $5^{2x} - 7 \cdot 5^{x} + 10 = 0$

i) $e^{x} + e^{-x} = 5$

j) $\log_2(9 - 2^{x}) = 3 - x$

k) $\log(x + 1) = 2\log(x - 1)$

l) $-5\ln^2(x - 1) + 2\ln(x - 1) = -3$

Exercice 30

Donner le domaine de définition et la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3^{x} \cdot x^{3}$

b) $f(x) = \ln(x + 3)$

c) $f(x) = \ln(x^2 + x - 12)$

d) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

e) $f(x) = \ln(|x|)$

f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

g) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x) - 1}$

h) $f(x) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(x)}$

i) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 2x)}{3x^3}$

j) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{x - 1}\right)$

k) $f(x) = x^2[2\ln(x) - 1]$

l) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)$

Exercice 31

1. Pour la fonction $f(x) = x^2\ln(x)$, trouver la pente de la tangente t au point A (e ; e^2).
2. Calculer l'angle entre la tangente t et l'axe des y.

Exercice 32

Quelles valeurs peut-on donner à la constante positive a pour que l'équation suivante ait exactement deux solutions ?

a) $x^2 - 2x + 2\log(a) = 0$

b) $x^2 - [2\log(a)]x + 4 = 0$

Exercice 33

On considère les fonctions $f(x) = 4e^{2x}$ et $g(x) = e^{x} + 3$.

1. Déterminer les points d'intersection des graphes de f et g.
2. Calculer l'angle que forment les deux graphes en leurs points d'intersection.
3. Calculer l'angle que forment les graphes de $h(x) = f(x) - 2$ et
   a) l'axe des x.
   b) l'axe des y.

Fonctions exponentielles et logarithmiques

Exercice 34

Etudier le comportement asymptotique des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+ax+a}$

c) $f(x) = \dfrac{2e^x-1}{e^x+2}$

d) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{\ln^2(x)}$

e) $f(x) = \dfrac{e^x-2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

f) $f(x) = \dfrac{2\ln(x^2)}{e^x}$

g) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\ln(x+3)}$

Exercice 35

Etudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = x\ln(x)$

b) $f(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{x}$

c) $f(x) = \ln(-x^2 - x + 6)$

Exercice 36

1. Esquisser le graphe de $f(x) = 3 + e^{-x}$
2. Esquisser le graphe de $g(x) = -2 - e^{-x}$.
3. Esquisser le graphe de $h(x) = 2 - e^{-|x|}$.

Exercice 37

1. Montrer que pour nombre positif k, la fonction

$$f : x \mapsto 8e^x(1 - ke^x)$$

admet d'un zéros x_o (à calculer), d'autre part un point à tangente horizontale d'abscisse x_1 (à calculer).

2. Montrer que la différence $x_o - x_1$ est indépendante de k.