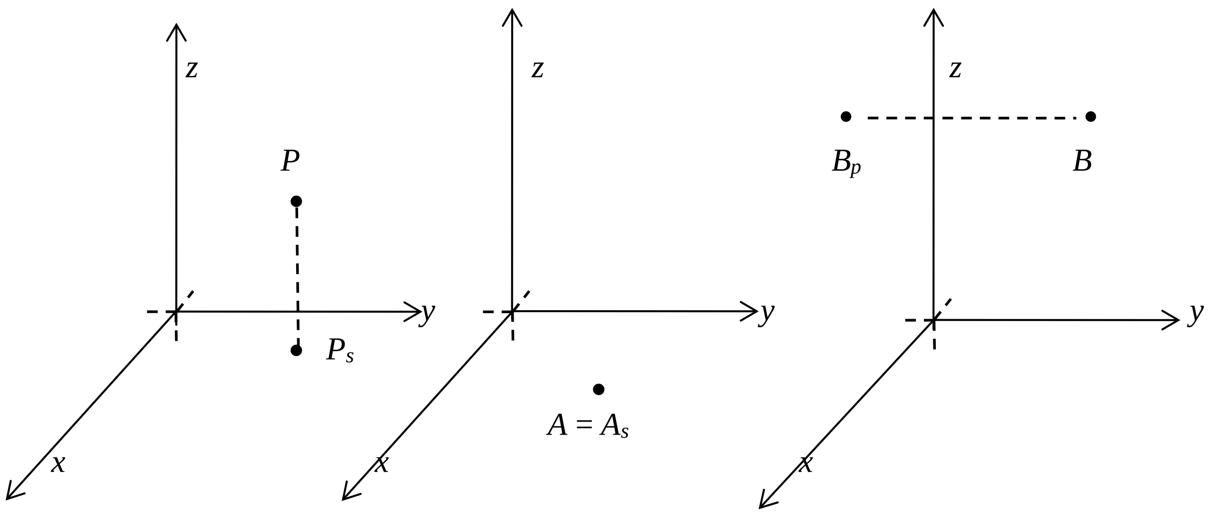
Géométrie dans l'espace

Exercice 1

On donne deux points $A(2 ; 3 ; 5)$ et $B(-2 ; -1 ; 2)$.
Déterminer les projections de ces points sur le mur, sur le sol et la paroi.

Exercice 2

Pour chacun des points suivants, on donne soit sa projection sur le sol, soit sur le mur, soit dans la paroi.
En utilisant uniquement une règle et une équerre, construire les autres projections.



Exercice 3

On donne deux points $A(2 ; 5 ; 3)$ et $B(4 ; 9 ; 1)$.

a) Calculer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
b) Calculer le milieu du segment AB.
c) Calculer le symétrique de A par rapport à B.

Exercice 4

Relativement à un repère de l'espace, on donne trois points : $A(4 ; 0 ; 0)$, $M(2 ; 3 ; 1)$ milieu du segment AB et $D(0 ; 0 ; 3)$.

a) Montrer, par calcul, que les points A, M et D ne sont pas alignés.
b) Calculer les points B et C pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
c) Trouver les coordonnées du centre du parallélogramme.

Exercice 5

Trouver les équations paramétriques de la droite d dans les cas suivants :

a) d passe par le point $A(4 ; 0 ; 2)$ et est parallèle au vecteur $\vec{d} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$.

b) d passe par le point $A(3 ; 0; 4)$ et est parallèle au vecteur $\vec{d} = \vec{u}_1$.
Dessiner la droite d.

c) d passe par le point $A(4 ; 5 ; 1)$ et est parallèle à l'axe des z.
Dessiner la droite d.

d) d passe par le point $A(3 ; 5 ; 4)$ et est parallèle à la droite a : $\begin{cases} x = -3 - m \\ y = 2 - 5m \\ z = -1 \end{cases}$.

Géométrie dans l'espace

Exercice 6

Relativement à un repère de l'espace, on donne deux points A et B par leurs coordonnées.
Calculer la droite passant par A et B, puis ses traces.

a) $A(5 ; 1 ; 5)$, $B(2 ; 4 ; 3)$
b) $A(1 ; 3 ; 3)$, $B(2 ; 2 ; 3)$
c) $A(1 ; 4 ; 2)$, $B(3 ; 4 ; 2)$

Exercice 7

Relativement à un repère de l'espace, deux droites d_1 et d_2 sont données chacune par un point et un vecteur directeur.
Etudier la position relative de ces droites.

a) $d_1 : A(6 ; 3 ; 0)$ et $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $d_2 :$ $B(0 ; 0 ; 4)$ et $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $d_1 : A(-3 ; 1 ; 2)$ et $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $d_2 :$ $B(4 ; -1 ; 0)$ et $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $d_1 : A(1 ; 4 ; 1)$ et $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $d_2 :$ $B(5 ; -1 ; 0)$ et $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $d_1 : A(2 ; -1 ; -4)$ et $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $d_2 :$ $B(4 ; 0 ; -5)$ et $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 8

On considère deux droites: $d_1 : \begin{cases} x = 2 + 2m_1 \\ y = 1 - m_1 \\ z = 1 + m_1 \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 1 + m_2 \\ y = 4 - m_2 \\ z = 2 + pm_2 \end{cases}$

Trouver la valeur du paramètre p pour que d_1 soit sécante à d_2.

Exercice 9

Dessiner les traces des plans suivants :

a) $4x + 6y + 3z - 12 = 0$
b) $x - y + z = 5$
c) $2x + y - z = 10$
d) $2x + y - 6 = 0$
e) $x - 5 = 0$
f) $x - y = 0$
g) $4x - y - 2z = 0$
h) $z = 4$

Exercice 10

Les plans suivants sont donnés par trois points.

a) $A(2 ; 3 ; 5)$, $B(1 ; 0 ; 5)$ et $C(6 ; -2 ; 5)$
b) $A(2 ; 1 ; 3)$, $B(5 ; -1 ; 6)$ et $C(1 ; 4 ; 2)$

1. Trouver l'équation cartésienne de chaque plan.
2. Calculer les intersections avec les axes et faire une représentation graphique.

Exercice 11 (facultatif)

Construire les traces du plan π sachant que :

a) π est parallèle à la paroi et passe par le point $A(5 ; 2 ; 3)$.
b) π est parallèle au sol et passe par le point $A(3 ; 3 , 4)$.
c) π contient l'axe des y et passe par le point $A(2 ; 3 ; 3)$.
d) π contient l'axe des z et passe par le point $A(2 ; 4 ; 5)$.

Exercice 12

Trouver l'équation du plan π contenant le point $A(1 ; 2 ; 5)$ et la droite d .
La droite d passe par le point $B(6 ; 0 ; 0)$, son vecteur directeur est $\vec{d} = -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

Exercice 13 (facultatif)

Trouver la forme de l'équation cartésienne d'un plan π si :

a) $\pi \parallel$ sol **c)** $\pi \parallel$ paroi **e)** $\pi \parallel OY$
b) $\pi \parallel$ mur **d)** $\pi \parallel OX$ **f)** $\pi \parallel OZ$
g) π passe par l'origine

Exercice 14 (après !!!)

Relativement à un repère $(0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, une droite d est donnée par un point $A(2 ; 3 ; 3)$ et par un vecteur directeur $\vec{d} = 2\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3$.
On appelle d' la parallèle à d passant par le point $B(4 ; 4 ; 0)$.

a) Dessiner les droites d et d' ainsi que leurs projections sur le sol.
b) Dessiner les traces et donner l'équation cartésienne du plan vertical contenant la droite d.
[$x + y - 5 = 0$]
c) Dessiner les traces et donner l'équation cartésienne du plan π contenant d et d'.
[$7x + 4y + 6z - 44 = 0$]
d) Dessiner et donner les équations paramétriques d'une droite horizontale h du plan π passant par le point A.

Exercice 15

Dessiner la droite d'intersection d_i des deux plans suivants :

a) $\pi_1 : 2x + 2y + 2z - 12 = 0$ et $\pi_2 : 6x + 2y + 9z = 18$
b) $\pi_1 : y = 3$ et $\pi_2 : 4x + 6z - 12 = 0$
c) $\pi_1 : 3x - 4y + 6z - 12 = 0$ et $\pi_2 : 4x + 2y - z = 8$

Exercice 16

On donne deux plans π et π' par des équations cartésiennes :

$\pi : 5x + 10y + 6z - 30 = 0$ $\pi' : 6x + 2y - 3z - 12 = 0$

On appelle d la droite d'intersection de π et π'.

a) Représenter, relativement à un repère unique, les deux plans. Dessiner la droite d.
b) Calculer les traces de la droite d dans le sol, le mur et la paroi.
[(6/5; 12/5; 0) , (54/17; 0; 40/17) , (0; 27/7; -10/7)]
c) Donner une représentation paramétrique de d.

Géométrie dans l'espace

Exercice 17 (après !!!)
Soit une droite d donnée par deux points : $A(2 ; 3 ; 3)$, $B(5 ; 8 ; 4)$.
Dessiner le plan vertical π contenant la droite d.

Exercice 19
Relativement à un repère $(0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, une droite d et un plan π sont donnés par des informations géométriques.
Etudier leur position relative.

a) $\pi : \quad 2x + y - z - 10 = 0$
$d : \quad D(4 ; 6 ; 0), \qquad E(1 ; 5 ; 3$

b) $\pi : \quad 2x + y + 2z - 6 = 0$
$d : \quad B(2 ; 4 ; 0), \qquad \vec{d} = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 - \vec{u}_3$

c) $\pi : \quad y - z = 4$
$d : \quad B(3 ; 0 ; 0), \qquad \vec{d} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3$

d) $\pi : \quad x + y + z - 6 = 0$
$d : \quad B(1 ; 4 ; 1), \qquad \vec{d} = \vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 - 5\vec{u}_3$

Produit scalaire

Exercice 20
Calculer la projection orthogonale Q' de $Q(8 ; 6 ; 11)$ sur le plan
$\pi : 2x - y + 4z - 12 = 0$, puis le symétrique Q'' de Q par rapport à π.

Exercice 21
Calculer la projection orthogonale Q' de $Q(5 ; 5 ; 9)$ sur la droite d donnée par
le point $A(4 ; 4 ; 2)$ et le vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 22
Un plan π est donné par son équation : $12x + 20y + 15z - 120 = 0$, tandis qu'une droite d est donnée par deux points $D(3 ; 2 ; 2)$ et $E(4 ; 5 ; 1)$.

a) Déterminer les points d'intersection F, G et H de π avec les axes de coordonnées.

b) Dessiner les traces du plan π sur les trois plans de référence et construire la droite d.

c) Vérifier si les points $A(5 ; 0 ; 4)$, $B(0 ; 3 ; 4)$ et $C(5 ; 3; 0)$ appartiennent au plan π. Calculer les côtés, les angles et l'aire du triangle ABC.
[a = 6,4 b = 5 c = 5,83 α = 72,02° β = 47,96° γ=60,02 S = 13,87]

d) Déterminer les trois angles suivants:
- angle aigu que font le plan π et le mur . [64,36°]
- angle aigu que font le plan π et la droite d . [38,3°]
- angle aigu que font la droite d et le sol . [17,55°]

e) Calculer la projection orthogonale D' de D sur le plan π.
[3,22; 2,36; 2,27]

f) Calculer les distances du point E, et de l'origine au plan π.

g) On considère la pyramide de sommet 0 et de base FGH.
Déterminer son aire latérale totale, son volume, ainsi que les coordonnées du pied de sa hauteur issue de 0.
[s = 149,46 V = 80 H(1,87; 3,12; 2,34)]

Géométrie dans l'espace

Exercice 23

1. Calculer la distance du point $A(3 ; 4 ; -4)$ au plan $\pi : 2x - y - 2z - 12 = 0$.

2. Déterminer les plans parallèles à π dont la distance

a) à A vaut 5.

b) à π vaut 5.

Exercice 24

On considère le plan π et la droite d :

$$\pi : 3x + 4y - 10 = 0 \qquad d : \begin{cases} x = 2 + m \\ y = 3 - 2m \\ z = 1 + 2m \end{cases}.$$

Déterminer les points de d qui se trouvent à distance 4 de π.

Exercice 25 (facultatif)

On donne deux plans par des équations cartésiennes :

$\pi_1 : 6x + 2y + 3z - 12 = 0$ et $\pi_2 : x + 2y - 2z - 4 = 0$

a) Déterminer l'angle aigu que font les deux plans.

b) Déterminer l'angle aigu que font le plan π_1 et la paroi.

Exercice 26

On considère deux plans :

$\pi_1 : 4x - 5y - 2z - 16 = 0$ et $\pi_2 : -4x + 5y + 2z - 7 = 0$

a) Prouver qu'ils sont bien parallèles.

b) Déterminer la plus courte distance les séparant.

Exercice 27

On considère une droite d donnée par le point $A(1 ; 5 ; 6)$ et son vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ainsi qu'un plan $\pi : 4x - 5y - 2z - 16 = 0$ parallèle à la droite d.

a) Vérifier que π est parallèle à d.

b) Déterminer la plus courte distance les séparant.

Produit vectoriel

Exercice 28

Le plans π est donné par :

a) $A(2 ; 1 ; -1)$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ [$3x + 2y - z - 9 = 0$]

b) $A(7 ; 2 ; -2)$, $B(2 ; -1; 1)$ et $C(-3 ; 1; 4)$. [$3x + 5z - 11 = 0$]

En utilisant le **produit vectoriel**, trouver l'équation cartésienne de π.

Géométrie dans l'espace

Exercice 29

Soit deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Calculer le vecteur-unité perpendiculaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Exercice 30 (facultatif)

Relativement à un repère métrique, on dessine un tétraèdre donné par ses sommets : A(6; 2; 0), B(4; 5; 0), C(0; 0; 1) et D(1; 3; 6).

- **a)** Déterminer les plans médiateurs des arêtes AB, AC et AD.
- **b)** Calculer l'aire de chacune des quatre faces du tétraèdre.
  [11,15 17,85 12,62 18,61]
- **c)** Calculer la distance séparant le sommet D de chacune des trois arêtes AB, AC et BC.
  [7 5,81 5,51]

Exercice 31

Le plan π est donné par l'équation suivante : $x + 2y - 3z - 4 = 0$.

Trouver le vecteur horizontal $\vec{h}$ "contenu" dans π, puis un vecteur $\vec{k}$ " contenu" dans π et perpendiculaire à $\vec{h}$.

Exercice 32

1. La droite d est donnée par le point A(8 ; 2 ; 7) et le vecteur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer la distance du point C(3 ; 8 ; 5) à la droite d.

2. La droite d est donnée par deux points A(2 ; 4 ; 3) et B(3 ; 3 ; -2).

Calculer la distance de l'origine à d.

Exercice 33

On considère trois points A, B et C donnés par leurs coordonnées relatives à un repère standard : A(3 ; 0 ; 1), B(0 ; 1 ; 3), C(5 ; 4 ; 3).

- **a)** Trouver les coordonnées d'un point D de sort que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- **b)** Calculer l'aire du parallélogramme et la distance de C à la droite d_{AB}.
  [D(8 ; 3 ; 1) S =18,22 dist(C,d_{AB}) = 4,87]
- **c)** Déterminer l'équation cartésienne du plan π contenant les points A, B et C.
  [$3x - 5y + 7z - 16 = 0$]
- **d)** Trouver l'équation cartésienne du plan π' qui est perpendiculaire à π et qui contient la droite d_{AB}.
  [$17x + 27y + 12z – 63 = 0$]
- **e)** Calculer la distance de C à π' et la comparer à dist(C,d_{AB}).
- **f)** Trouver des équations paramétriques de la droite d du plan π qui est perpendiculaire à d_{AB} en A.
- **g)** Calculer la distance de C à d. [0,53]

Exercice 34

On donne deux plans α et β, chacun par un point et un vecteur normal :

α : $A(-1 ; 6 ; 0)$, $\vec{a} = 6\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 + 11\vec{u}_3$

β : $B(5 ; 0 ; 3)$, $\vec{b} = 9\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 10\vec{u}_3$

Déterminer la droite d'intersection d des ces deux plans.

Exercice 35

1. Etablir l'équation de la sphère σ de centre $\Omega(4 ; 1 ; 5)$ passant par $A(3 ; 3 ; 1)$.

[$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 5)^2 = 21$]

2. Le point $B(5 ; 5 ; 7)$ appartient-il à cette sphère ?

3. Trouver le plan tangent à σ en A.

[$x - 2y + 4z - 1 = 0$]

4. Trouver les points d'intersection de σ et de l'axe $0Z$**.**

Exercice 36

Etablir l'équation de la sphère σ de centre $\Omega(3 ; 0 ; 1)$ et tangente

a) au plan π : $x + 2y + 2z - 25 = 0$ [$(x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = (20/3)^2$]

b) à la droite $d : \begin{cases} x = 6 - n \\ y = 2 + 2n \\ z = 3 + n \end{cases}$ [$(x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 31/2$]

Exercice 37

Etablir l'équation de la sphère σ dont le centre est sur l'axe des x et qui passe par les points $A(2 ; -2 ; -1)$ et $B(-1 ; 1 ; 5)$.

[$(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 30$]

Exercice 38

Soit une sphère σ centrée en $\Omega(2 ; 7 ; -5)$ et tangente au sol.

a) Etablir son équation.

b) Quelle est la position de cette sphère par rapport au mur, par rapport à la paroi ?

c) Pour quelle valeurs de y le point $A(3 ; y ; -1)$ se trouve-t-il à l'intérieur de σ ?

Exercice 39

Soit la sphère σ : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 = 0$.

a) Trouver le centre et le rayon de σ**.**

[$\Omega(2;0;-1)$ $r = 3$]

b) Quelle est la position de cette sphère par rapport à une droite donnée par (donner les éventuels points communs) :

1. $d_1 : \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ **2.** d_2 : $A(2 ; -3 ; 5)$, $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

[1) secant ; $I_1(3;2;1)$, $I_2(7/3;4/3;5/3)$ 2) tangent ; $I(4; 1;1)$]

Exercice 40

Soit la sphère σ : $(x - 11)^2 + (y - 4)^2 + z^2 - 100 = 0$ et π : $4x + y - z - 12 = 0$.

Déterminer le centre et le rayon du cercle d'intersection de σ et π.

[$C(3 ; 2 ; 2)$ et $r = 5{,}29$]

Exercice 41

Soit σ: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2 - 14 = 0$ et $\pi : 3x + 2y + z = 0$

Trouver les plans parallèles à π et tangents à σ.

[$3x + 2y + z - 1 = 0$, $3x + 2y + z - 29 = 0$]

Exercice 42

On donne une sphère σ et une droite d :

σ est centrée en $\Omega(-1 ; 1 ; -3)$ de rayon 7,

d passe par $A(6 ; 2 ; 2)$ parallèlement à $\vec{d} = 4\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 - \vec{u}_3$.

a) Vérifier que d est tangente à σ et calculer l'équation du plan tangent au point de contact I.

[$I(2; -1; 3)$, plan: $3x - 2y + 6z - 26 = 0$]

b) Trouver l'équation d'une tangente à σ en I qui soit perpendiculaire à d.

[tangente || $-16\vec{u}_1 + 27\vec{u}_2 + 17\vec{u}_3$]

Exercice 43

Soit une sphère σ de rayon 3, centrée en $\Omega(0 ; 4 ; 5)$ et une droite d_k passant par le point $A(3 ; 7 ; 2)$ parallèlement au vecteur $\vec{d} = k\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

a) **Facultatif.** Donner les éventuels points communs à σ et d_k dans les trois cas suivants

$k = -2$ $\quad$ $k = 0$ $\quad$ $k = \frac{1}{2}$

[(-3;4;5) (1;6;3) / (3; 4; 5) / néant]

b) **Obligatoire.** Quelles sont les valeurs de k qui rendent la droite d_k tangente à la sphère?

[$k = -4$ ou $k = 0$]

Exercice 44

Trouver des équations cartésiennes des sphères de rayon ρ = 4 qui sont centrées sur la droite d et tangentes au plan π donnés ci-dessous :

$$d : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad , \quad \pi : 2x + 3y - 6z - 6 = 0$$

Exercice 45

Dans le plan π d'équation $2x - 2y + z - 8 = 0$, on envisage le cercle c de centre $N(3 ; -5 : ?)$ et de rayon $r = 2$. Trouver les centres puis des équations cartésiennes des sphères de rayon $\rho = 2\sqrt{10}$ qui coupent le plan π selon le cercle c.

Exercice 46 (facultatif)

a) Trouver le centre et le rayon de la sphère d'équation :

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 17z + 25 = 0$

[$\Omega(3; 4; 8{,}5)$, $\rho = 8{,}5$]

c) Quelle est la position de cette sphère par rapport au plan π d'équation : $x + 2y + 2z + 8 = 0$ et par rapport au sol?

[sphère disjointe de π, tangente au sol]

d) Trouver les plans $\pi_{1,2}$ qui sont tangents à la sphère et parallèles à π.
[$2x + 4y + 4z - 5 = 0$, $2x + 4y + 4z - 107 = 0$]

e) Le plan π' d'équation $x + 2y + 2z - 10 = 0$, coupe la sphère selon un cercle. Déterminer le centre C et rayon de ce cercle.
[$C(1 ; 0 ; 4{,}5)$, $r = 6{,}02$]

f) La verticale qui passe par le point $S(7 ; 4 ; 0)$ rencontre la sphère en deux points A et B. Calculer les plans tangents à la sphère en ces points, puis l'angle entre ces plans.
[en $A : 8x - 15z - 41 = 0$, en $B : 8x + 15z - 296 = 0$]

Exercice 47 (facultatif)

On donne une sphère σ et une droite d :

σ est centrée en $\Omega(-1 ; 1 ; -3)$ de rayon 7,

d passe par $A(6 ; 2 ; 2)$ parallèlement à $\vec{d} = 4\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 - \vec{u}_3$.

a) Vérifier que d est tangente à σ et calculer l'équation du plan tangent au point de contact I.
[$I(2; -1; 3)$, plan: $3x - 2y + 6z - 26 = 0$]

b) Trouver l'équation d'une tangente à σ en I qui soit perpendiculaire à d.
[tangente $\parallel -16\vec{u}_1 + 27\vec{u}_2 + 17\vec{u}_3$]

Exercice 48

1. On considère le plan π d'équation $2x - y + 2z - 8 = 0$ ainsi que les points $A(3 ; 2 ; 2)$, $B(7 ; 6 ; 0)$, $C(5 ; 10 ; 4)$, tous inclus dans le plan π et le point $E(8 ; 4 ; 7)$.

a) Vérifier que le triangle ABC est isocèle et rectangle puis calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré.
b) En travaillant avec le produit vectoriel, calculer l'aire du triangle ABC.
c) Calculer la distance du point E au plan π.
d) Calculer le volume du tétraèdre $ABCE$.

2. La sphère s de centre E passe par le point A.

e) Trouver une équation cartésienne de la sphère s et vérifier que cette sphère passe aussi par les points B et C.

f) Trouver les coordonnées du centre F et le rayon du cercle d'intersection de s et π.

3. La droite t est incluse dans le plan π et tangente à la sphère s en C.

g) Trouver des équations paramétriques de la droite t.

h) Trouver des équations paramétriques de l'autre droite du plan π tangente à la sphère s et parallèle à t.

4. On donne la droite $d : \begin{cases} x = 6 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ incluse dans le sol.

i) Calculer les coordonnées des points d'intersection G et H de d et de la sphère s.

Exercice 49

On envisage le plan π d'équation $x + 2y + 2z + 3 = 0$, la sphère σ de centre

Ω (8 ; 5 ; 0) et de rayon $\rho = 6$ et la droite d qui passe par les points A(0 ; 17 ; 6) et B(6 ; 9 ; 4).

- **a)** Trouver les points d'intersection I et J de la sphère σ et de la droite d.
- **b)** Calculer les angles et l'aire du triangle $IJ\Omega$.
- **c)** Soit K le point de la sphère σ le plus proche du plan π . Calculer ses coordonnées et sa distance à π.
- **d)** Vérifier que L(4 ; 3 ; 4) est un point de la sphère σ et trouver des équations paramétriques de la droite t qui est tangente à la sphère σ en L et parallèle au plan Oyz.
- **e)** Calculer l'angle aigu que forment la tangente t et le plan π.
- **f)** Le plan π' coupe la sphère σ en un cercle c de centre N(20/3 ; 11/3 ; -2/3) .
  Trouver une équation cartésienne du plan π' et le rayon r du cercle c.

Exercice 50

On considère trois points : A(2; 3; 2), B(-2; 3; 6) et C(6;-5; 2), ainsi que le plan
$\pi : 2x + y + 2z - 7 = 0$.

- **a)** Trouver une équation cartésienne du plan π' contenant le triangle ABC.
  [π` : $2x + y + 2z - 11 = 0$]
- **b)** Expliquer pourquoi les plans π et π' sont strictement parallèles, puis calculer la plus courte distance qui les sépare. [1/3]
- **c)** Trouver des équations paramétriques de la droite d sachant qu'elle passe par les points suivants D(20 ; -37 ; 2) et E(-10 ; 23 ; 2).
- **d)** Trouver l'équation d'une sphère s centrée sur la droite d et qui est tangente à la fois au mur et à la paroi. Combien y a-t-il de sphères possibles ?
  [s_1 : $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 9$, s_2 : $(x-1)^2 + (y-)^2 + (z-2)^2 = 1$]

Exercice 51

On considère deux points $D(0\,;0\,;4)$ et $J(4\,;4\,;2)$ et la sphère s de diamètre DJ

- **a)** Établir l'équation de cette sphère. [$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$]

On considère la sphère s d'équation $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

- **b)** Montrer que le point $G(0\,;4\,;4)$ est situé sur la sphère s .
- **c)** Établir les équations paramétriques de la droite t tangente à la sphère s en G et contenue dans le plan $\pi : x + y + 2z - 12 = 0$.
  [$t \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$]
- **d)** Déterminer les coordonnées du point S où la droite GJ coupe le sol. Trouver le point P de la sphère s qui est le plus proche du point S .
  [S(8 ; 4 ; 0), P(32/7 ; 20/7 ; 12/7]