Géométrie analytique 2D

EXERCICES

2M - 02

2019-20

Michel Feuz

Révision : Exercice 1

Soit ABCD le parallélogramme donné par A(-3 ; -1) ; B(2 ; 2) et M(3 ; 0), l'intersection des deux diagonales.

a) Calculer les sommets C et D du parallélogramme
b) Calculer une équation cartésienne pour chacun des côtés du parallélogramme.
c) Donner des équations paramétriques scalaires pour chacune des diagonales du parallélogramme.

Révision : Exercice 2

a) Donner une représentation paramétrique pour chacune des droites suivantes :

$d_1 : 3x - 2y + 27 = 0$ $d_2 = O_x$ $d_3 : y = -\frac{2}{7}x + 1$ $d_4 : 3x + 5y - 15 = 0$

b) Donner une équation cartésienne pour chacune des droites suivantes :

$d_5 : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$ $d_6 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \end{cases}$

Révision : Exercice 3

1) Calculer a et b pour que : $2a\,x + 2y - 5 = 0$ et $4x - 3y + 7b = 0$ représentent la même droite.
2) Soit d : $(2m - 1)x + my + m + 1 = 0$

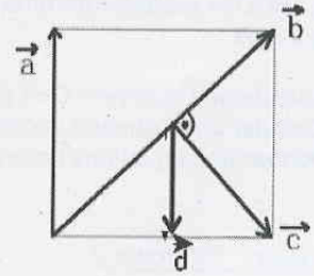
Quelle valeur faut-il donner à m pour que d soit une droite :

a) Qui passe par O ? b) Qui passe par (2 ; 5) ?

c) Qui soit // $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$? d) Qui soit // $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$? e) Qui soit // O_x ?

======================== Fin de la révision ===============================

Exercice 1



Soit un carré de côté x représenté ci-contre,
Calculer la projection de :

a) $\vec{a}$ "sur" $\vec{a}$ b) $\vec{b}$ "sur" $\vec{a}$ c) $\vec{c}$ "sur" $\vec{a}$
d) $\vec{d}$ "sur" $\vec{a}$ e) $\vec{b}$ "sur" $\vec{b}$ f) $\vec{c}$ "sur" $\vec{b}$
g) $\vec{b}$ "sur" $\vec{d}$ h) $\vec{c}$ "sur" $\vec{d}$

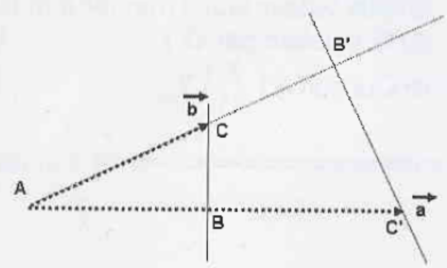
Attention aux signes !!

Exercice 2

1) On se donne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$
Dessiner ces vecteurs et mesurer à chaque fois la longueur des 2 vecteurs et la projection de chacun sur l'autre vecteur. Conseil : Prendre 1cm comme unité !

2) Idem avec $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3



Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ 2 vecteurs, "placés" en A. Grâce aux projections orthogonales, on construit 2 triangles ABC et AB'C' (cf dessin ci-contre).

1) Montrer que les 2 triangles sont semblables.
2) Placer sur le dessin les grandeurs suivantes : $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, a' et b'.
3) Montrer que : $\|\vec{a}\| \cdot b' = \|\vec{b}\| \cdot a'$

NB : $\|\vec{v}\|$ se dit norme de $\vec{v}$ et représente la longueur du vecteur $\vec{v}$

==

On définit une nouvelle opération sur les vecteurs : le produit scalaire, noté : $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b}}$

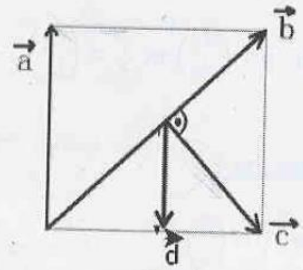
Se souvenir : $\vec{a} \cdot \vec{b}$ est un nombre et est définit par $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}\| \cdot b'}$

A remarquer :

- dans $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot b'$, les 2 symboles "·" ne représentent pas la même opération
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Exercice 4

Soit un carré de côté x représenté ci-contre,
Calculer les produits scalaires suivants :



a) $\vec{a} \cdot \vec{a}$ b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ c) $\vec{a} \cdot \vec{c}$ d) $\vec{a} \cdot \vec{d}$
e) $\vec{b} \cdot \vec{b}$ f) $\vec{b} \cdot \vec{c}$ g) $\vec{b} \cdot \vec{d}$
h) $\vec{c} \cdot \vec{c}$ i) $\vec{c} \cdot \vec{d}$ j) $\vec{d} \cdot \vec{d}$

Attention aux signes !!

Il est conseillé de faire cet exercice comme si l'exercice 1 n'avait pas été fait *(même si l'exercice 1 a une forte corrélation avec celui-ci)*

Exercice 5

Soit A et B 2 points fixes

1) Dessiner en **bleu** l'ensemble des points P(x,y) tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

2) Dessiner en **rouge** l'ensemble des points P(x,y) tels que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$

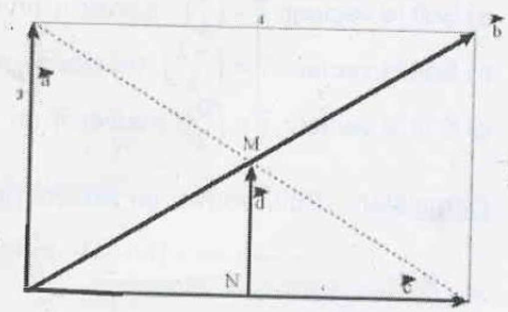
3) Dessiner en **jaune** l'ensemble des points P(x,y) tels que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$

4) Dessiner en **vert** l'ensemble des points P(x,y) tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$

Exercice 6

Soit un rectangle de côté 3 et 4
M est l'intersection des diagonales et N est le pt-milieu de la longueur

Compléter :



a) $\vec{a} \cdot \vec{a}$ b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ c) $\vec{a} \cdot \vec{c}$
d) $\vec{a} \cdot \vec{d}$ e) $\vec{b} \cdot \vec{b}$ f) $\vec{b} \cdot \vec{c}$
g) $\vec{b} \cdot \vec{d}$ h) $\vec{c} \cdot \vec{c}$ i) $\vec{c} \cdot \vec{d}$
j) $\vec{d} \cdot \vec{d}$

Forme algébrique du produit scalaire :

Soit $\vec{a}=\binom{a_1}{a_2}$ et $\vec{b}=\binom{b_1}{b_2}$, alors $\vec{a}\cdot\vec{b}$ est un nombre définit par $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2}$

Exercice 7

Soit $\vec{v}=\binom{3}{4}$

Calculer $\vec{v}\cdot\vec{v}$ et donner une signification géométrique au résultat

Exercice 8

Soit $\vec{a}=\binom{2}{-3}$, $\vec{b}=\binom{-3}{7}$, $\vec{c}=\binom{12}{8}$ et $\vec{d}=\binom{5}{0}$

1) A l'aide de la forme algébrique du produit scalaire calculer :

a) $\vec{a}\cdot\vec{a}$ b) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ c) $\vec{a}\cdot\vec{c}$ d) $\vec{a}\cdot\vec{d}$ e) $\vec{b}\cdot\vec{b}$

f) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ g) $\vec{b}\cdot\vec{d}$ h) $\vec{c}\cdot\vec{c}$ i) $\vec{c}\cdot\vec{d}$ j) $\vec{d}\cdot\vec{d}$

2) Calculer la norme de chacun des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$

3) Calculer a', la projection de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ et b' celle de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$

Exercice 9 Vecteurs $\perp$ entre eux

a) Soit le vecteur $\vec{v}=\binom{3}{4}$, trouver $\vec{n}$ un vecteur $\perp$ $\vec{v}$

b) Soit le vecteur $\vec{v}=\binom{-2}{5}$, trouver $\vec{n}$ un vecteur $\perp$ $\vec{v}$

c) Soit le vecteur $\vec{v}=\binom{0}{3}$, trouver $\vec{n}$ un vecteur $\perp$ $\vec{v}$

Compléter : Pour trouver un vecteur perpendiculaire à un vecteur donné, il faut ....

....

....

Exercice 10 Vecteurs $\perp$ à une droite

a) Soit la droite d : -3x + 4y -1 = 0, trouver $\vec{n}$ un vecteur $\perp$ d
b) Soit la droite d : 5x + 2y -9 = 0, trouver $\vec{n}$ un vecteur $\perp$ d
c) Soit la droite d : x + 8 = 0, trouver $\vec{n}$ un vecteur $\perp$ d

Compléter : Pour trouver un vecteur perpendiculaire à une droite donnée, il faut ....

....

....

Exercice 11

a) Soient $A(2;5)$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

1) Donner une équation de d_1 telle que $d_1 \perp \vec{n}$ et $A \in d_1$
2) Donner une équation de d_2 telle que $d_2 \perp \vec{n}$ et $A \notin d_2$
3) Donner un vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} \perp \vec{n}$
4) Donner un vecteur $\vec{n_2} \neq \vec{n}$ tel que $\vec{n_2} // \vec{n}$

b) Soient $A(-3;2)$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Donner une équation de d_3 telle que $d_3 // \vec{v}$ et $A \in d_3$ et de d_4 telle que $d_4 // \vec{v}$ et $A \notin d_4$

Exercice 12

Soient une droite d donnée par $A(2\,;\,-7) \in d$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \perp d$ et $P(x\,;\,y)$ un point quelconque, trouer une équation cartésienne de de d

Exercice 13

Calculer les distances entre les droites suivantes et les points donnés :

1) $d: 4x - 3y - 17 = 0$; $A(10\,;1)$, $B(1\,;2)$, $C(5\,;1)$ et $0(0\,;0)$

2) $d: 5x - 12y + 19 = 0$; $A(10\,;1)$, $B(1\,;2)$, $C(5\,;1)$ et $0(0\,;0)$

3) $d: x + y = 0$; $A(10\,;1)$, $B(1\,;2)$, $C(5\,;1)$ et $0(0\,;0)$

Exercice 14

Déterminer l'équation hessienne de :

$d_1: A(7\,;\,-2) \in d_1$ et $d_1 \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $d_2: B(0\,;\,-5) \in d_2$ et $d_2 \perp d: 3x - 6y - 1 = 0$
$d_3: y = \frac{2}{3}x - 1$ d_4:Axe O_x d_5:Axe O_y
d_6: médiatrice du segment MN si $M(2;5)$ et $N(-3;2)$

Exercice 15

Soit ABC un triangle avec A(1,2) , B(6,-10) et C(-2,6)

a) Calculer une équation hessienne pour d_{AB}, droite passant par A et B et d_{AC}, droite passant par A et C.
b) Calculer le(s) point(s) situés à distance de 8 de d_{AB} et de d_{AC}

Exercice 16

Calculer les points de la courbe $H: y = \frac{1}{x}$ situés à distance $\frac{6}{5}$ de la droite d : $3x + 4y - 2 = 0$

Exercice 17

Calculer les points (la 1ère coordonnée suffit) de la courbe $\mathscr{P}$: $y = x^2$ situés à distance 1 de la droite d : $3x + 4y - 5 = 0$

Exercice 18

Soit $d_1 : 5x + 12y - 2 = 0$
$d_2 : 3x + 4y + 2 = 0$

Décrire le lieu (équations + nature) des points équidistants de d_1 et d_2

Exercice 19

Soit $d : 2x - y + 5 = 0$
$d_1 : 4x - 3y + 10 = 0$

Trouver le(s) point(s) de d à distance 3 de d_1

Exercice 20

Exprimer la plus courte distance entre :

$d_1 : 4x - 3y - 12 = 0$ et $d_2 : 8x - 6y - 9 = 0$

Exercice 21

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq b$

Exprimer en fonction de a et b la plus courte distance entre :

$d_1 : 3x - 4y = a$ et $d_2 : 3x - 4y = b$

Exercice 22

a) Soit K(2 ; 3) et r = 5
Trouver le lieu (équation + nature) de tous les points à distance r du point K

b) Idem avec K(-2 ; 4) et r = 2

c) Idem avec K=O(0 ; 0) et r = 1

d) Idem avec K(1;0) et r = 13

Exercice 23

Soit les cercles $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 - 12 = 0$ et $\mathscr{C}_2 : (x - 8)^2 + (y + 4)^2 - 4 = 0$
ainsi que la droite d : $x + y - 7 = 0$

a) Montrer (par calculs) que la droite d ne coupe aucun des 2 cercles

b) Calculer les coordonnées de A : le point de d le plus proche de $\mathscr{C}_1$

c) Calculer les coordonnées de B : le point de $\mathscr{C}_2$ le plus proche de d

Exercice 24

Soit $\mathscr{C} : (x - 3)^2 + (y + 14)^2 - 68 = 0$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que T(1 ; -6) $\in \mathscr{C}$

b) Trouver t, tangente à $\mathscr{C}$ passant par T

c) Trouver t_1 et t_2 t.q. $t_1 \parallel t_2 \parallel \vec{v}$ et t_1 et t_2 tangentes à $\mathscr{C}$

Exercice 25

Soit $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ et d : $2x - 3y - 18 = 0$

1) Trouver le centre K et le rayon r du cercle $\mathscr{C}$

2) Déterminer la position relative (*le nombre de points d'intersection*) de d et $\mathscr{C}$

3) Trouver d_1 // d t.q. d_1 soit tangente à $\mathscr{C}$

Exercice 26

Soit $\mathscr{C}$: le cercle de centre $K(-1; 2)$et de rayon $r = \sqrt{116}$
Trouver les droites tangentes à $\mathscr{C}$ qui soient // $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 27

Soit $\mathscr{C}$: le cercle de centre K(-1;2) et de rayon r = 5
Trouver la droite t tangente à $\mathscr{C}$ qui passe par T(3,5) $\in \mathscr{C}$

Exercice 28

Soit d : $8x - 15y - 10 = 0$

Donner les points de l'axe Ox à distance 3 de la droite d

Exercice 29

Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et A(5 ; 0)

a) Trouver une équation hessienne de la droite d perpendiculaire à $\vec{n}$ et passant par le point A
b) Trouver le lieu (équation + nature) des points à distance $2\sqrt{13}$ de d
c) Trouver le lieu (équation + nature) des points à distance $2\sqrt{13}$ de A

Exercice 30

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, et le cercle $\mathscr{C}$ donné par son centre $K(-1; 3)$ et son rayon $r = 5$
Soit $d: y = \frac{1}{2}x - 10$

a) Calculer l'équation cartésienne des droites tangentes à $\mathscr{C}$ et parallèles à $\vec{v}$
b) Montrer par calculs que d ne coupe pas $\mathscr{C}$
c) Calculer les coordonnées du point A, tel que A soit le point de d le plus proche du cercle $\mathscr{C}$

Exercice 31

Soit la parabole P : $y = x^2$ et la droite d : $y = x - 1$

1) Trouver A ∈ P tel que $\delta(A; d) = \pm 2\sqrt{2}$
2) Idem avec B ∈ P tel que $\delta(B; d) = \pm \frac{1}{2}$
3) Idem avec C ∈ P tel que $\delta(C; d) = \pm \frac{3\sqrt{2}}{8}$

Exercice 32

Soit les droites $d_1: y = \frac{3}{4}x - 2$ et $d_2: y = 3$

Déterminer (par calculs) l'équation du cercle de rayon r = 3 tangent aux 2 droites.
NB : Si il y a plusieurs solutions : ne pas hésiter, les indiquer toutes !!
Indication : Faire un dessin de la situation avant de commencer les calculs

Exercice 33

Soit les points A(4 ; 4) et B(1 ; 3) ainsi que la droite d : 2x + y - 14 = 0

Déterminer (par calculs) l'équation du cercle $\mathscr{C}$ tel que A et B soient sur $\mathscr{C}$ et que d soit tangent à $\mathscr{C}$

Exercice 34

Soit A(0;2)

0) Expliquer pourquoi $\frac{mx-y}{\sqrt{m^2+1}} = 0$ est la forme générale de l'équation hessienne des droites (non verticales passant par l'origine)

1) Quelle est l'équation de la droite d passant par l'origine et t.q. δ (A,d) = ± 1 ?
2) Dessiner la situation.

Exercice 35

Soit A(10,-1) et K(-1,1)

0) Trouver la forme générale de l'équation hessienne des droites non verticales passant par A

1) Quelle est l'équation de la droite d passant par A et t.q. δ (K,d) = ± 5 ?
2) Dessiner la situation.

