

Série 4 – Géométrie dans l'espace

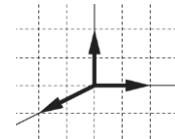
Avant de débuter ces exercices dans la situation actuelle, c'est-à-dire chez vous, voici quelques informations pratiques :

- Plusieurs exercices peuvent être faits directement dans votre cahier quadrillé en respectant l'orientation des axes en fonction de l'exercice. La plupart du temps on utilisera ce système :

Une unité selon l'axe x est un « vecteur » de $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Une unité selon l'axe y représente 2 carreaux vers la droite

Une unité selon l'axe z représente 2 carreaux contre le haut



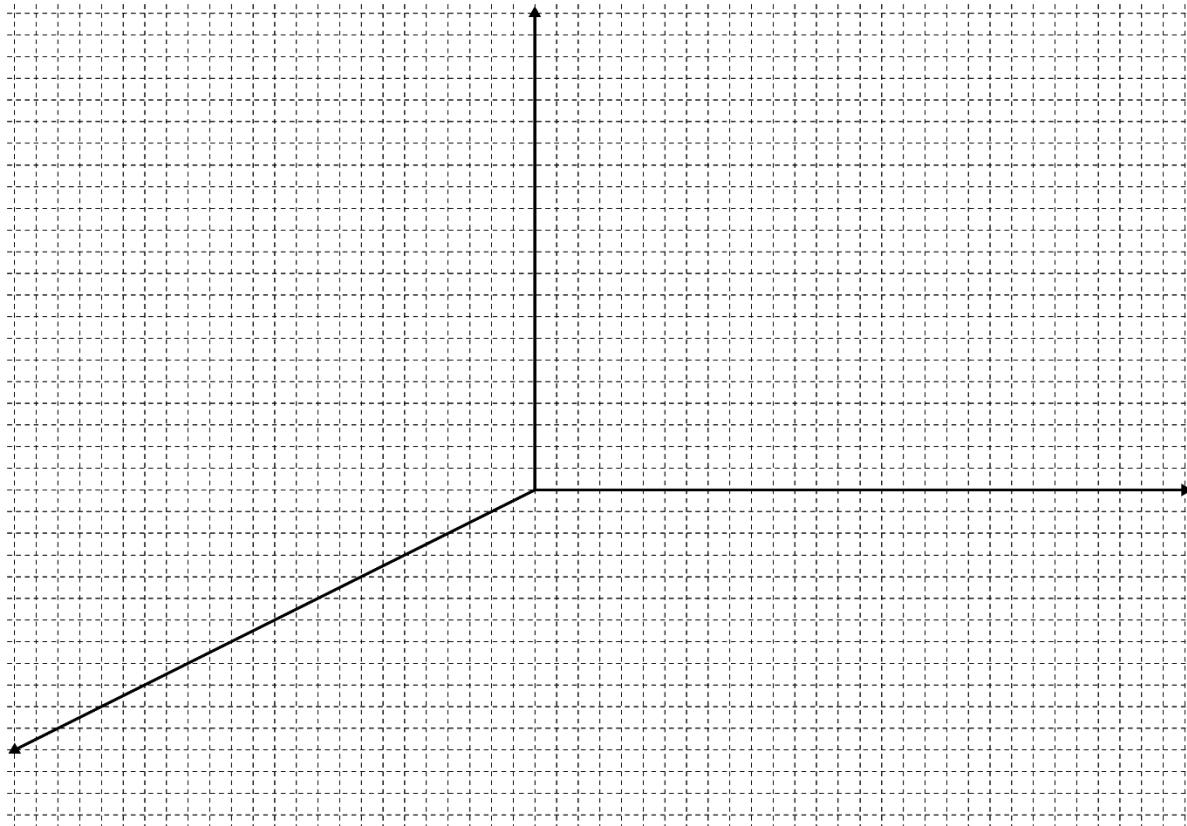
- Ceux qui ont la possibilité, essayez d'imprimer ce feuillet ou alors uniquement les pages nécessaires.
- Ceux qui ont l'opportunité de travailler sur tablette, je pense que vous pouvez faire les exercices directement dessus en traçant des droites.
- Sur l'ordinateur, cela me semble peu adapté. Essayez de reproduire au mieux les exercices dans lesquels des points ou des droites sont déjà donnés.
- L'utilisation de différentes couleurs est fortement conseillée
- Si vous souhaitez essayer de travailler directement sur l'ordinateur, voici un lien pour le quadrillage de base : <https://www.geogebra.org/geometry/j2bpnhsw>

Exercice 1 Points

Selon les unités de la page précédente, placer dans le système d'axes donné les points

$$A(4 ; 5 ; 8), \quad B(3 ; 7 ; -2), \quad C(-2 ; -4 ; 6), \quad D(-1 ; -3 ; -1)$$

$$E(0 ; 8 ; 3), \quad F(-6 ; -5 ; -1,5) \quad \text{et} \quad G(10 ; 14 ; 3)$$

**Exercice 2**

Vrai ou faux :

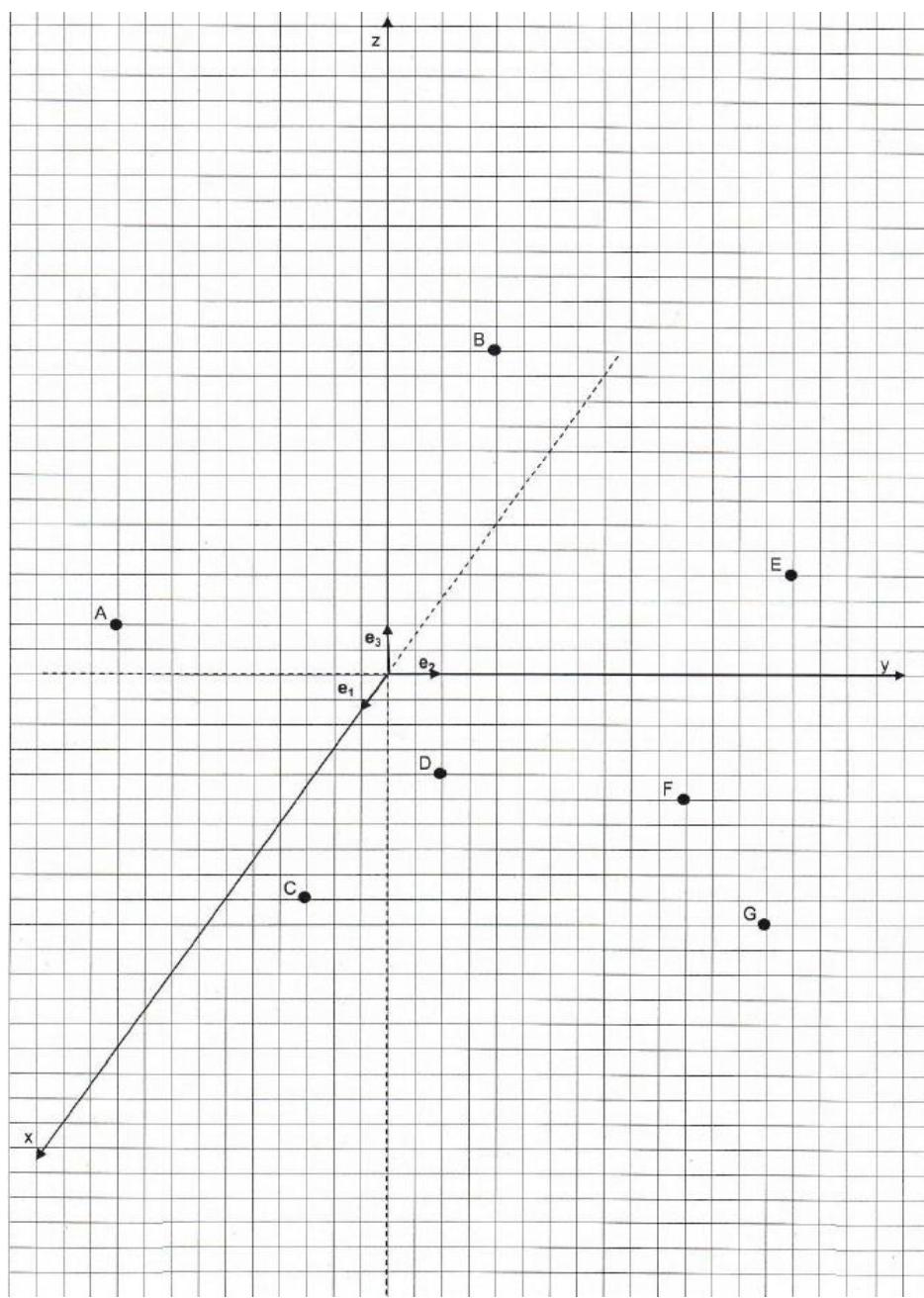
Le point $P(2 ; -3 ; -2)$ est dans l'octant V : Vrai Faux

Le point $P(0 ; -3 ; 0)$ est sur l'axe y : Vrai Faux

Sans une projection, une infinité de points
peut être placée au même endroit : Vrai Faux

Le point $P(-12 ; -12 ; -12)$ est dans l'octant VII : Vrai Faux

L'axe y est perpendiculaire à la paroi : Vrai Faux

Exercice 3

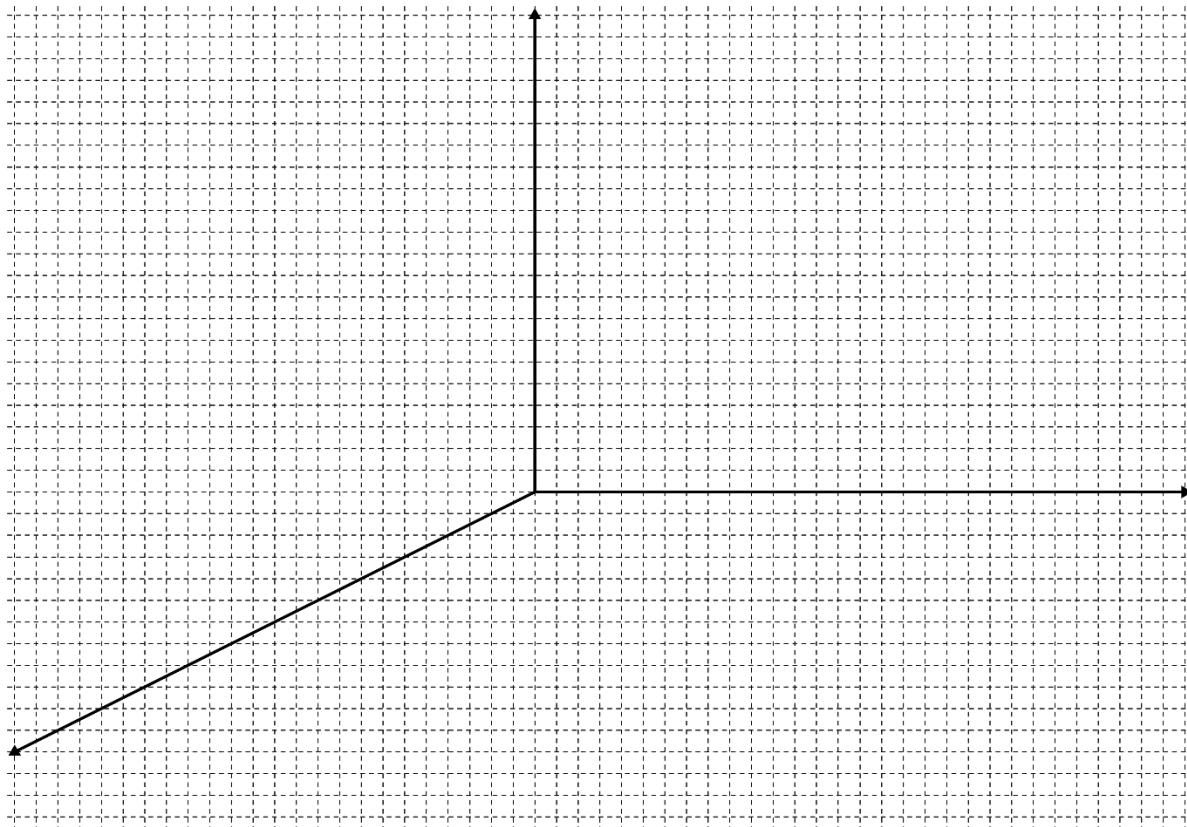
- Le point A peut-il être dans le 7^{ème} octant ? Si oui, donner des coordonnées possibles.
- Le point B peut-il être en dessous du sol s'il est derrière le mur ? Si oui, donner des coordonnées possibles.
- Les points E et F peuvent-ils être à la même hauteur par rapport au sol ?
- Le point E peut-il être dans le 6^{ème} octant ?
- Le point D peut-il être plus haut que le point G par rapport au sol ?
- Dans quel octant le point C peut-il se trouver ?
- Le point G peut-il être dans la paroi ?
- Quelles sont les coordonnées du point E s'il est dans le sol ?
- Le point F peut-il être dans le mur ?
- Le point E peut-il être dans le 7^{ème} octant ?

Exercice 4

Placer les points $A(4 ; 5 ; 6)$, $B(2 ; 9 ; -2)$ et $C(-4, -5, 6)$.

Dessiner les projections de ces points dans les plans de référence sol, mur et paroi.

Dessiner les vecteurs \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} et \overrightarrow{OC} .

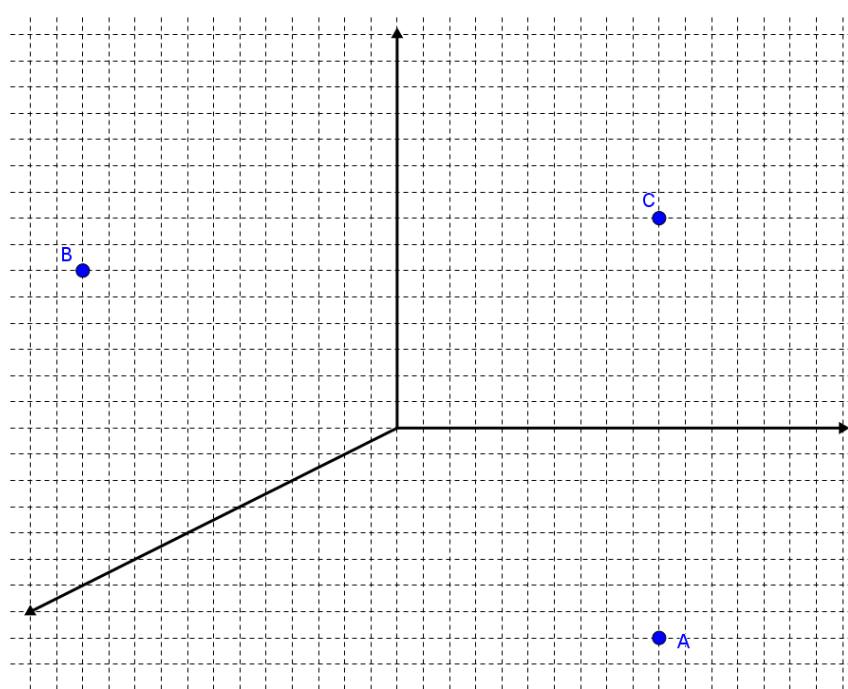
**Exercice 5**

Par dessin, rechercher la coordonnée manquante des points :

$$A(-2; 3; ?)$$

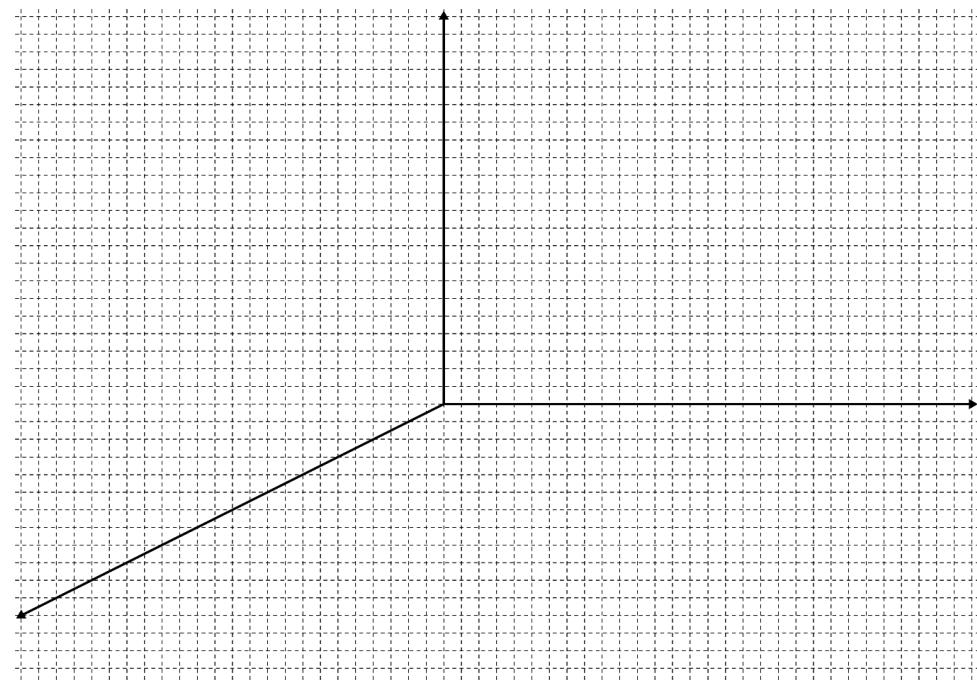
$$B(4; ?; 5)$$

$$C(?; 7; 5)$$

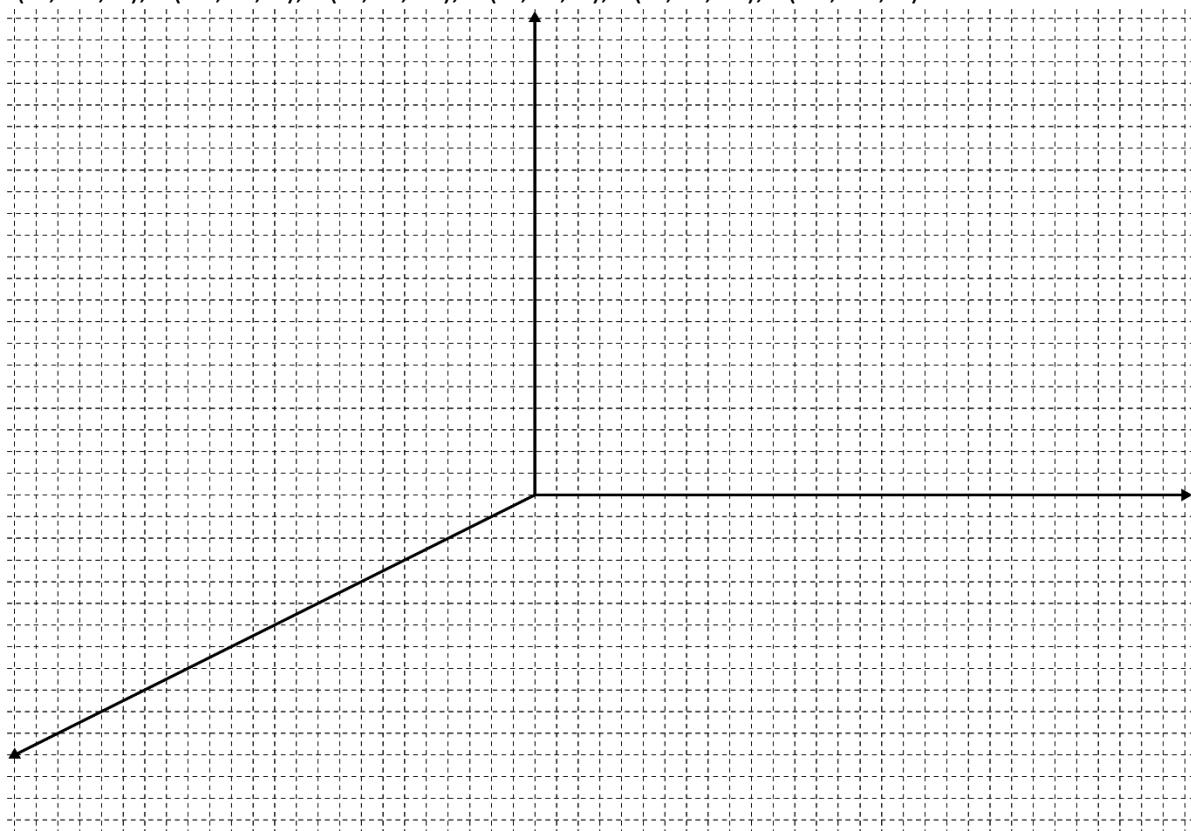


Exercice 6 Droites

Soit les points $A(4 ; -3 ; 7)$ et $B(-2 ; 4 ; 3)$. Dessiner la droite $d(A; B)$ et rechercher par le dessin ses traces dans les plans de référence.

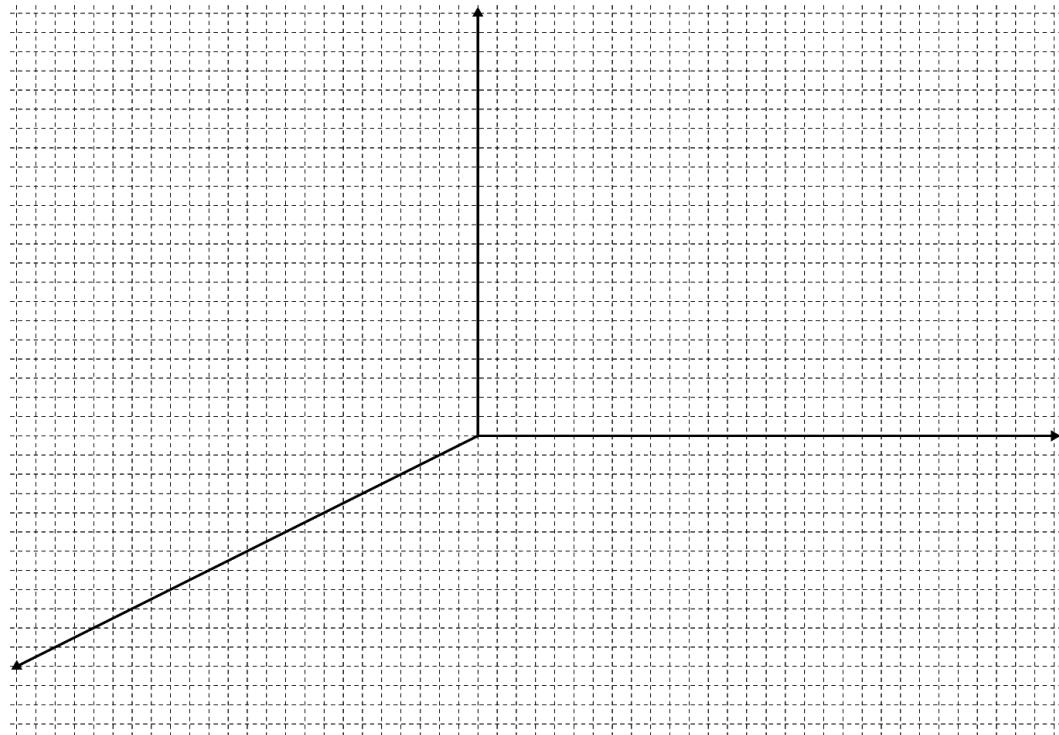
**Exercice 7**

En respectant les conventions de dessin, dessiner les droites $b(A; B)$, $d(C; D)$, $f(E; F)$ avec $A(6 ; -3 ; 8)$, $B(-2 ; 5 ; 8)$, $C(4 ; 6 ; -3)$, $D(4 ; 6 ; 9)$, $E(2 ; 4 ; -3)$, $F(-4 ; -8 ; 6)$.



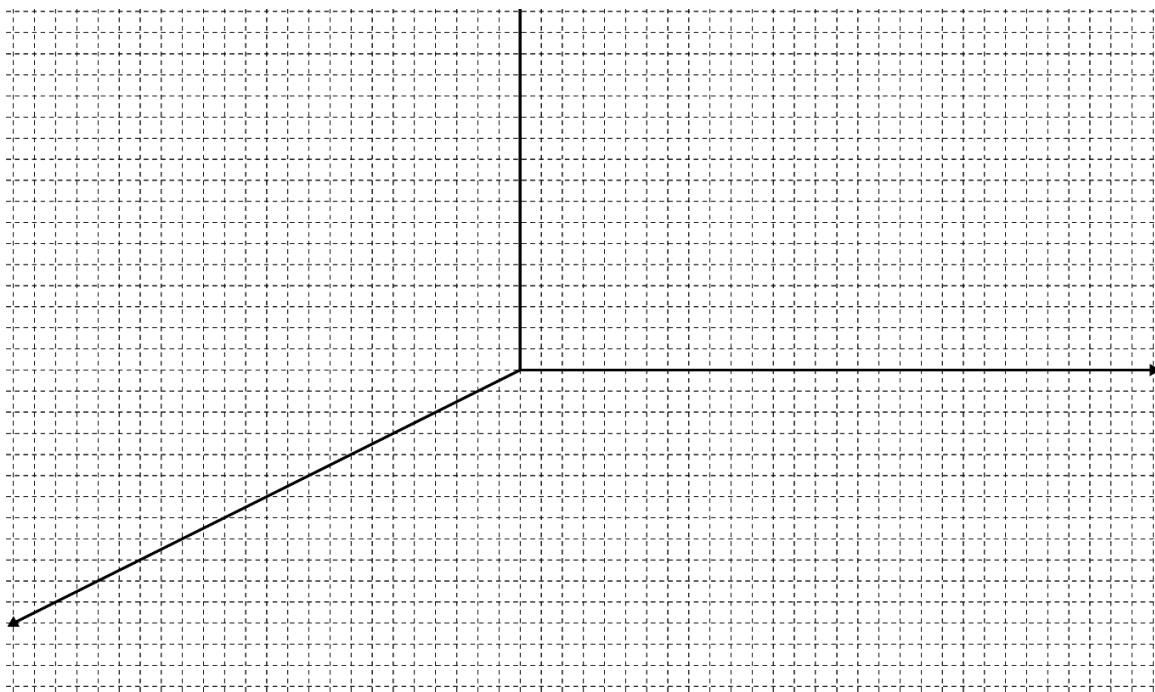
Exercice 8

- Dessiner la droite $d(A; B)$ avec $A(6 ; -4 ; -3)$ et $B(-2 ; 8 ; 7)$.
- Rechercher par le dessin z_C sachant que $C(4 ; -1 ; z_C) \in d(A; B)$.
- Peut-on compléter $D(-3 ; y_D ; z_D)$ sachant que $D \in d(A; B)$?

**Exercice 9**

Dessiner $d(A; B)$ avec $A(-2 ; -4 ; 5)$ et $B(6 ; 8 ; -2)$ et $d(C; D)$ avec $C(8 ; -2 ; 1)$ et $D(1 ; 7 ; 6)$.

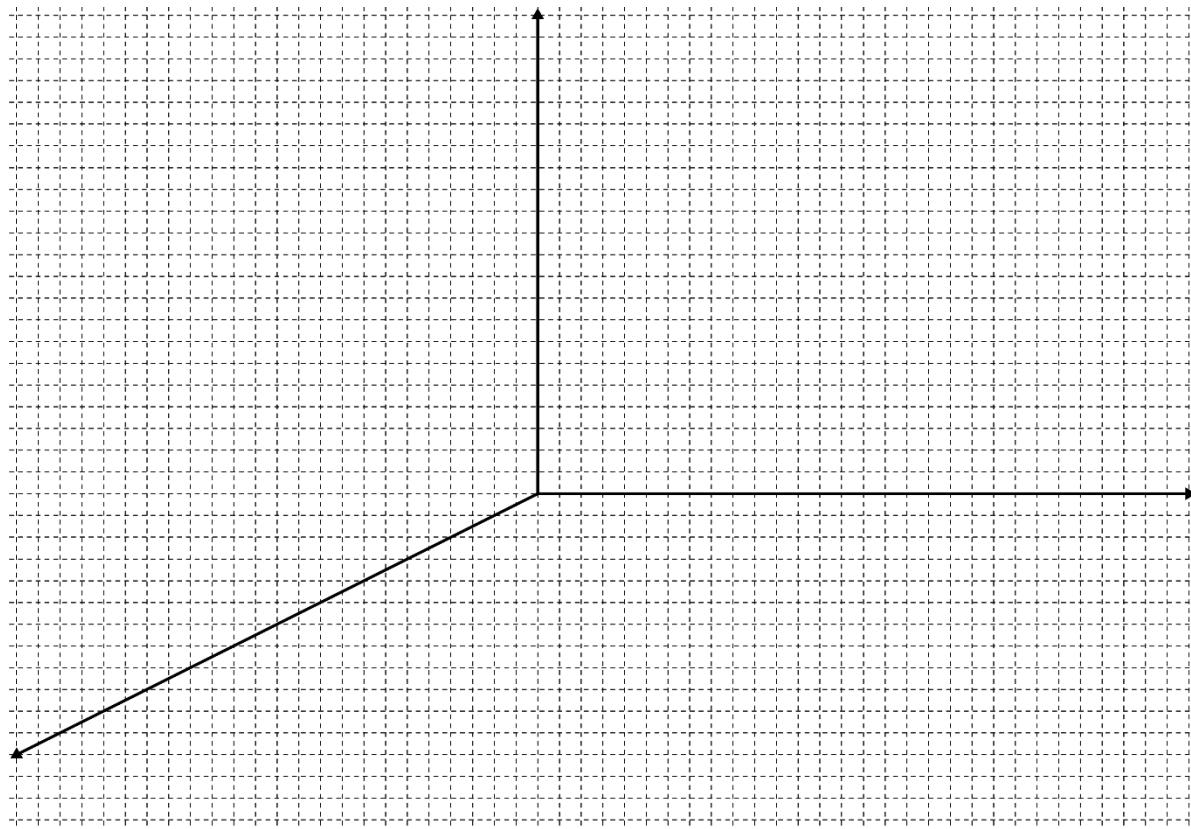
Les droites se coupent-elles ?



Exercice 10

On donne deux points : $A(1.5; 3; 1.5)$ et $B(-3; 1.5; 3)$

- Dessinez la droite passant par A et B, ses trois projections, ainsi que A et B et leurs projections.
- Déterminez à l'aide de ce dessin les coordonnées des traces de cette droite.

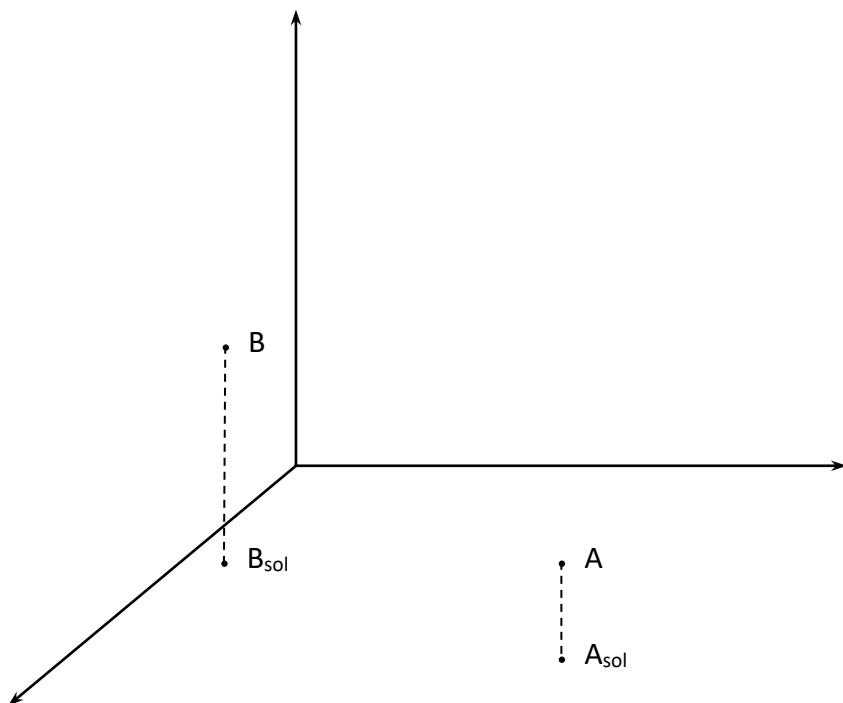
**Exercice 11**

- Dans combien d'octants au maximum une droite qui ne coupe aucun des axes peut-elle passer? Et au minimum ?
- Quel est le cas (de loin !) le plus probable ?
- Une droite peut-elle passer par les octants I, IV et II uniquement ?
- Une droite peut-elle passer par les octants I, IV et VII uniquement ?

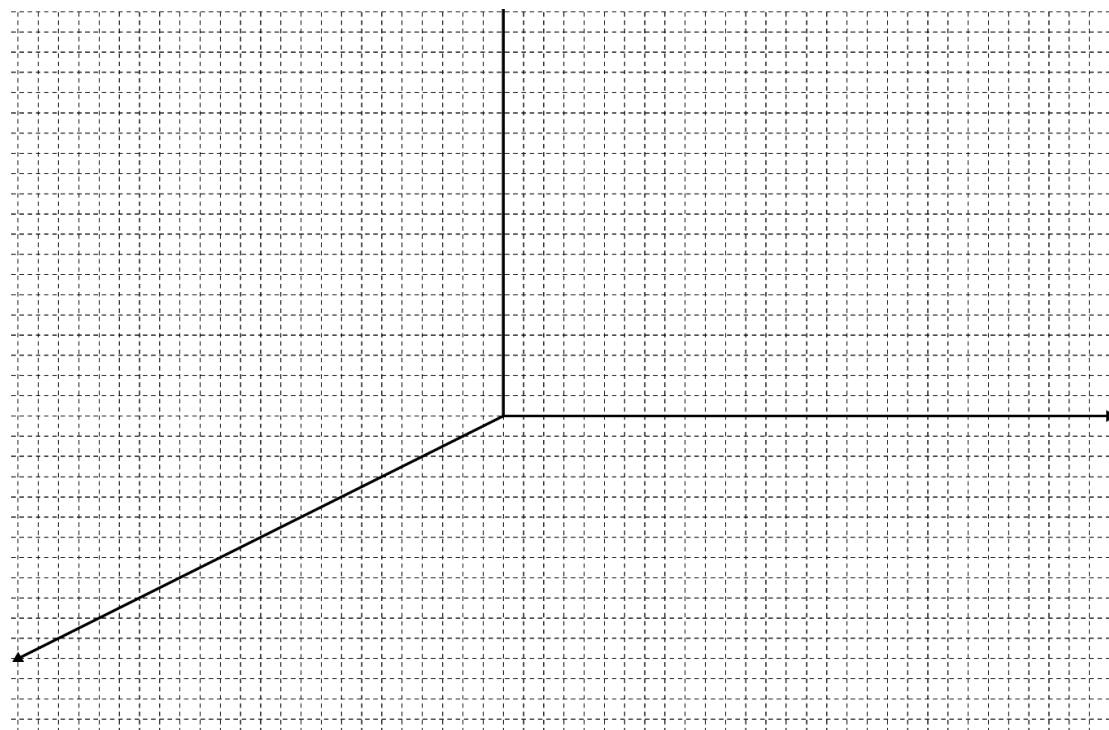
Exercice 12

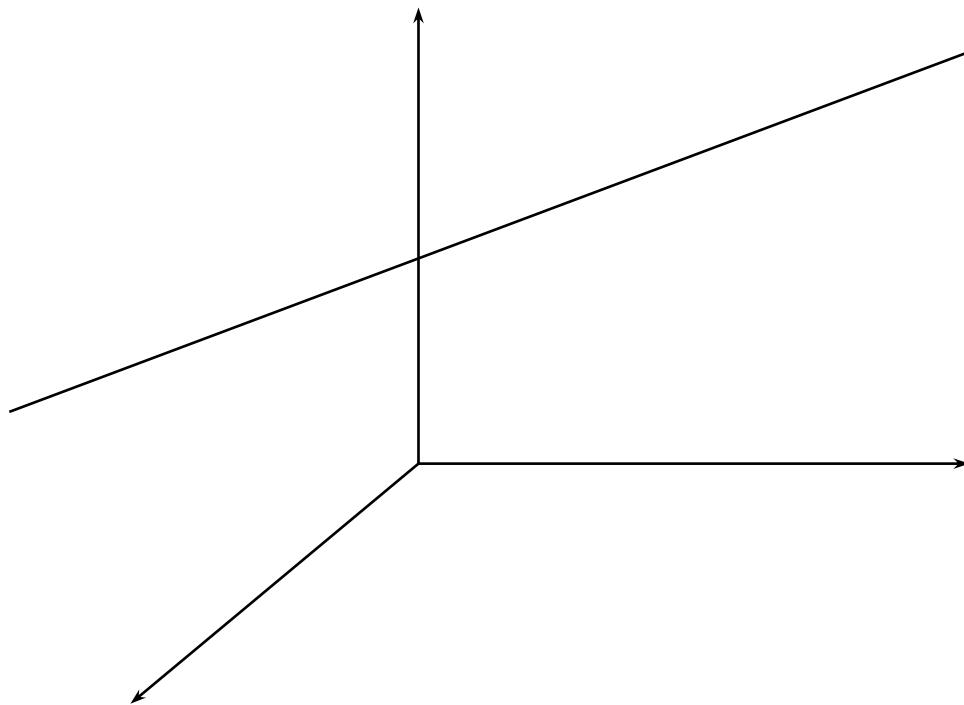
Dans quels octants passe la droite qui contient A et B ?

Dessinez cette droite en distinguant ses parties dans les différents octants.

**Exercice 13**

- Dessinez les trois projections d'une droite d dont deux traces sont $M(0; 5; 7)$ et $P(2; 0; 3)$.
- Construisez ensuite la trace de d dans le sol.

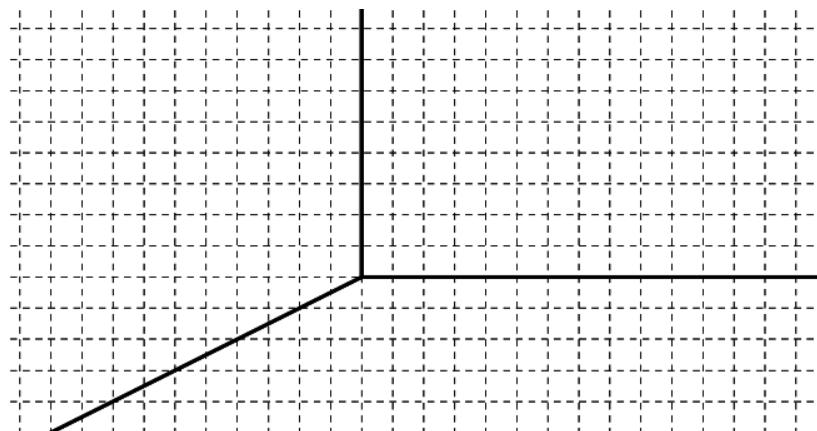


Exercice 14

- La trace d'une telle droite dans le sol peut-elle être visible?
- Dessinez la projection p_1 dans le sol d'une telle droite pour que ses traces dans le mur et dans la paroi soient visibles.
- Dessinez la projection p_2 dans le sol d'une telle droite pour que ses traces dans le mur et dans la paroi soient invisibles.
- Dessinez la projection p_3 dans le sol d'une telle droite pour que sa trace dans le mur soit visible et que sa trace dans la paroi soit invisible.
- Dessinez la projection p_4 dans le sol d'une telle droite pour que sa trace dans le mur soit invisible et que sa trace dans la paroi soit visible.

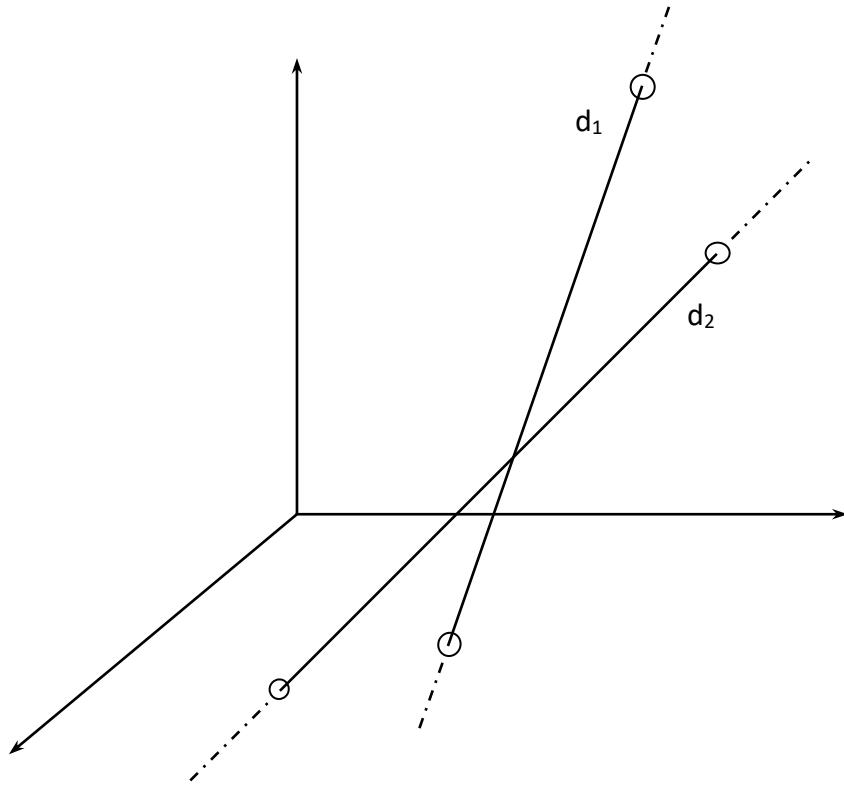
Exercice 15

- À quoi reconnaît-on qu'une droite est verticale ? Dessinez des exemples.
- À quoi reconnaît-on qu'une droite est horizontale ? Dessinez des exemples.

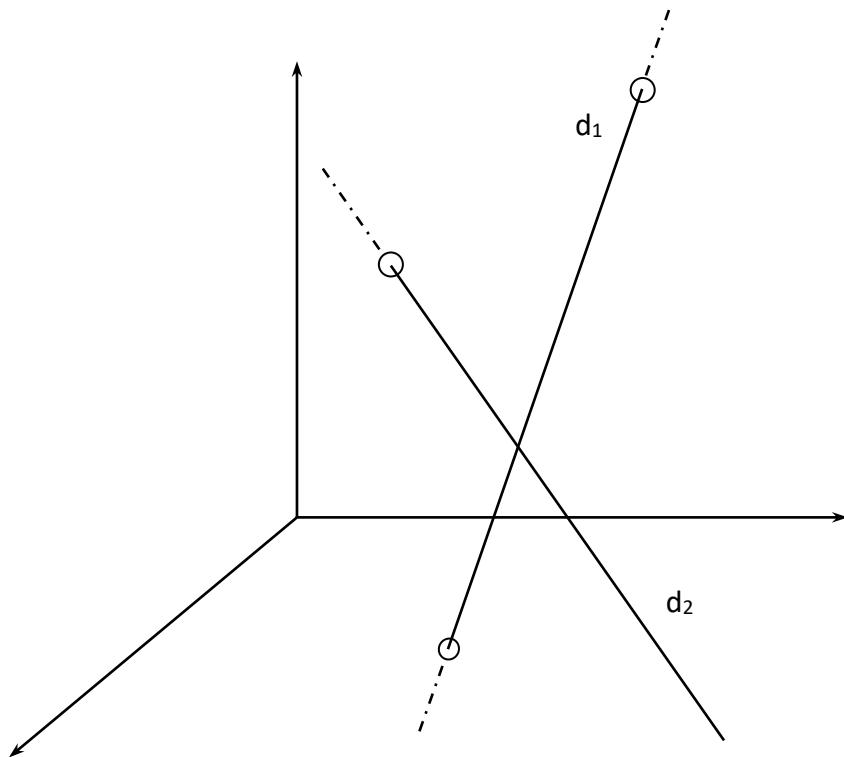


Exercice 16

d_1 et d_2 se coupent-elles ?

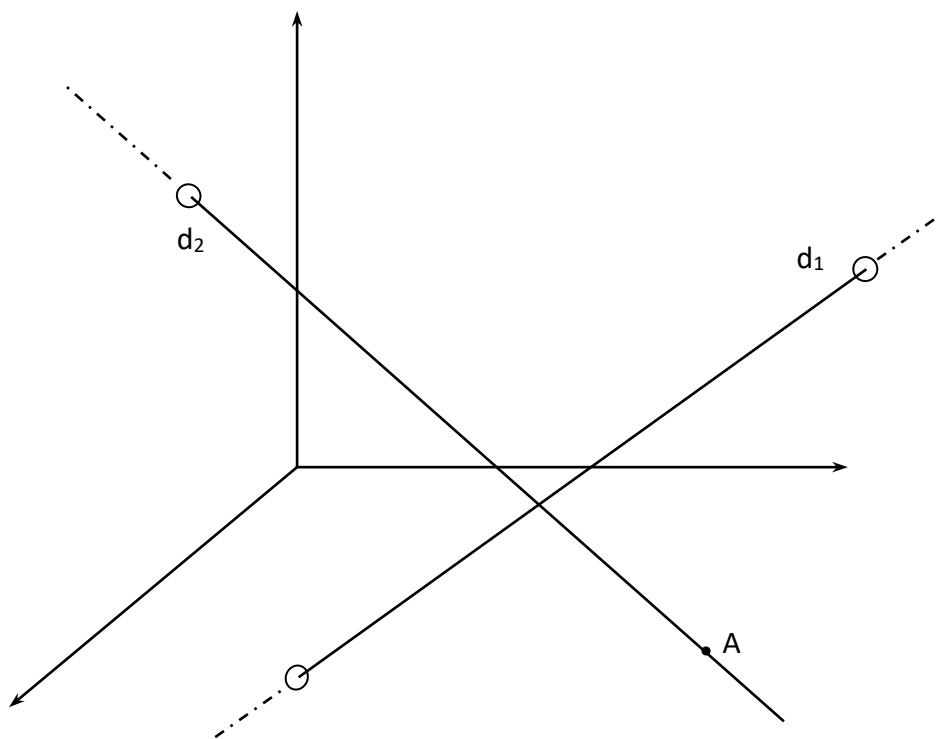
**Exercice 17**

Où doit-on placer la trace de d_2 dans le sol pour que d_1 et d_2 se coupent.

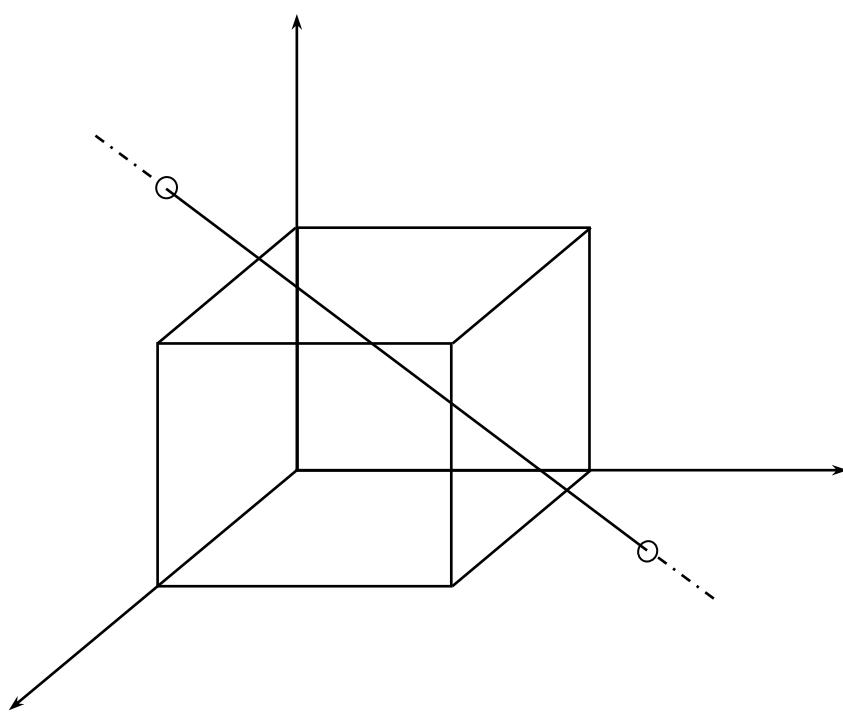


Exercice 18

Placer la projection de A dans le sol pour que d_1 et d_2 se coupent.

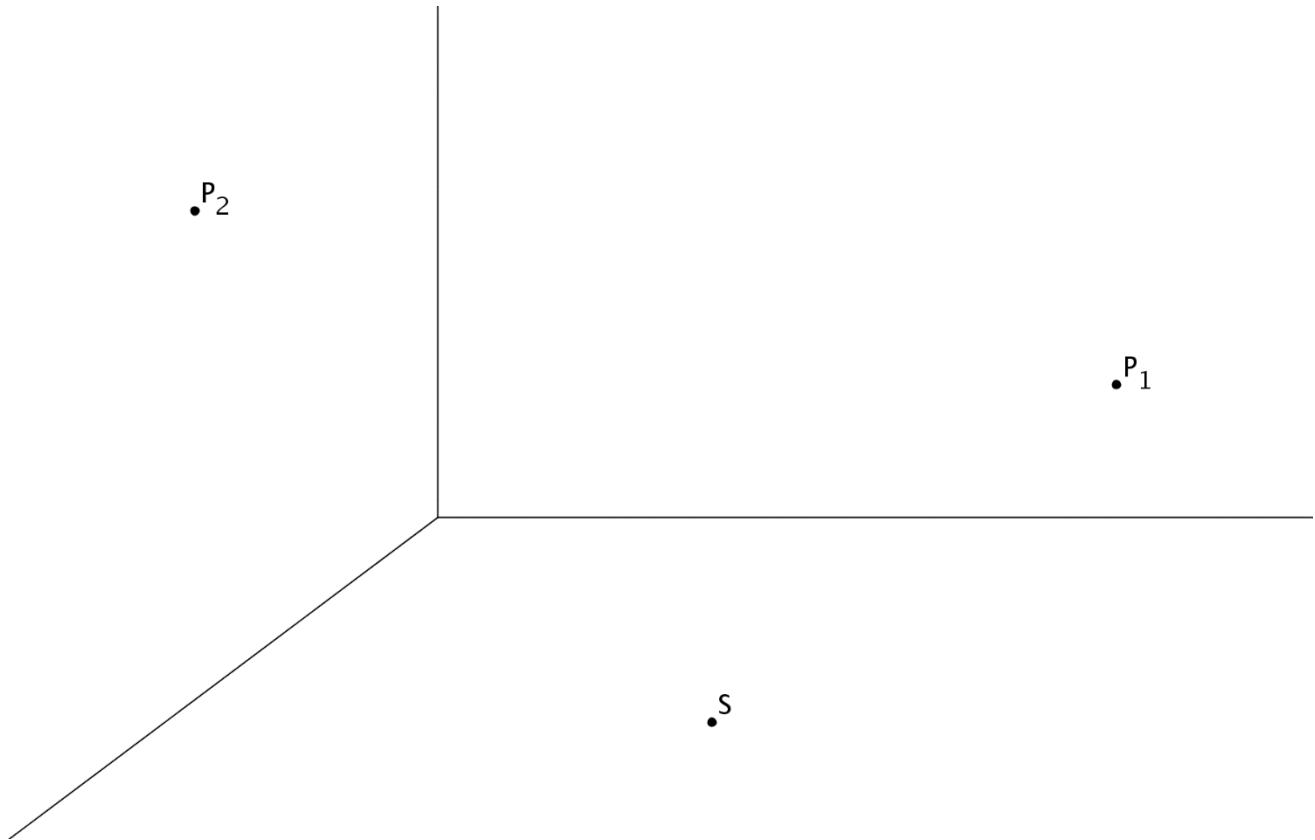
**Exercice 19**

Construisez l'intersection de la droite avec le parallélépipède.

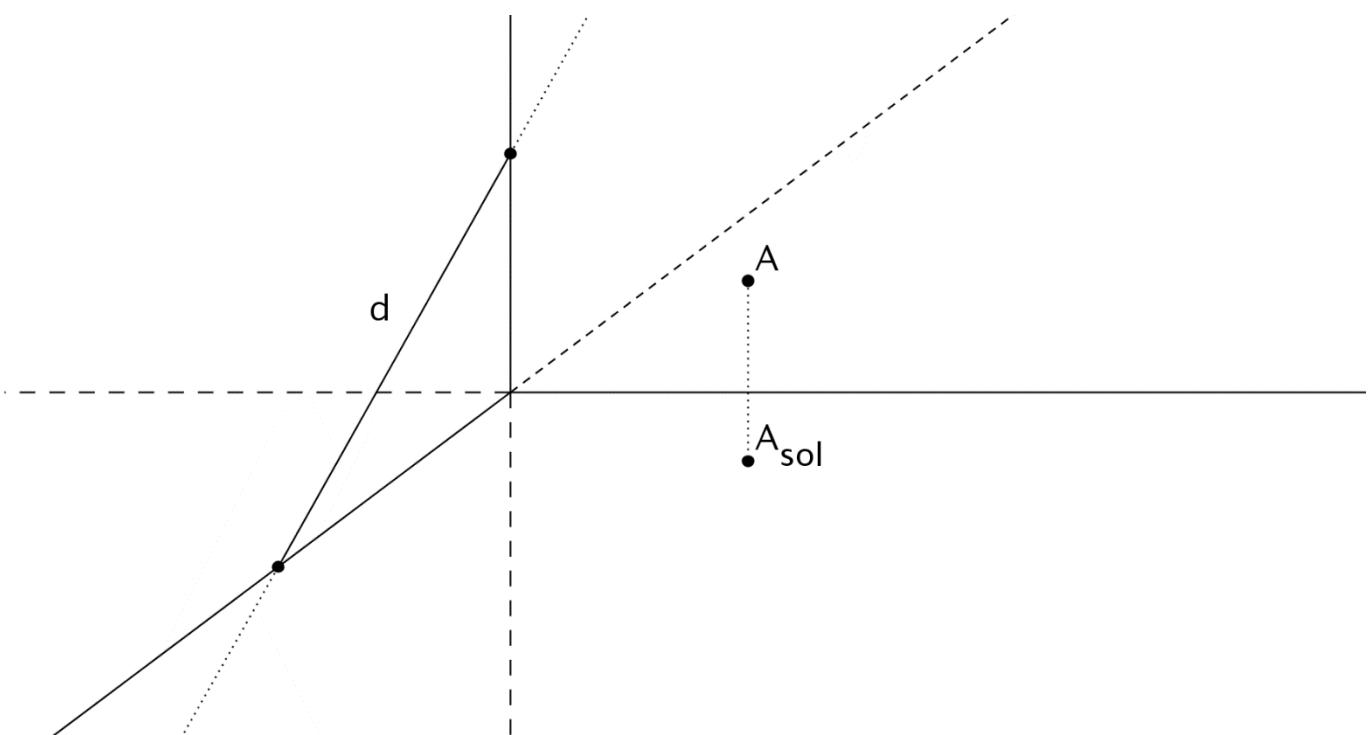


Exercice 20 Plans

Construire les traces du plan qui contient les points P_1 , P_2 et S ($P_1, P_2 \in \text{paroi}$ et $S \in \text{sol}$).

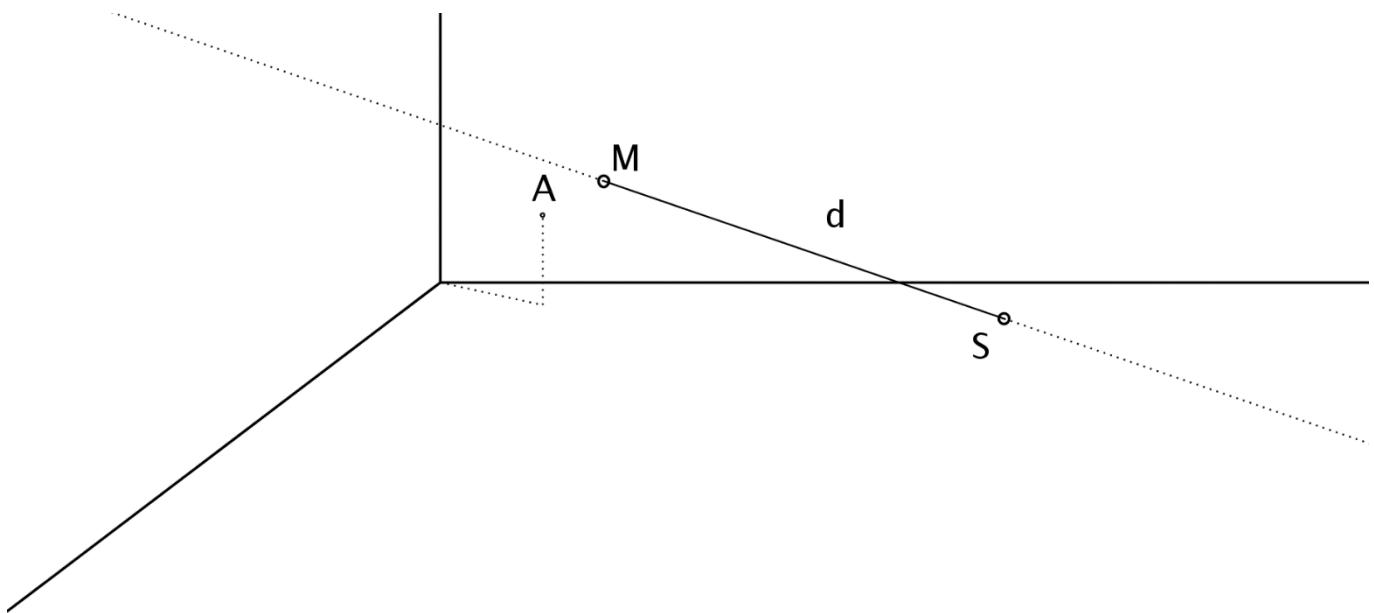
**Exercice 21**

Construire les traces du plan qui contient la droite d (sachant que $d \in \text{paroi}$) et le point A.



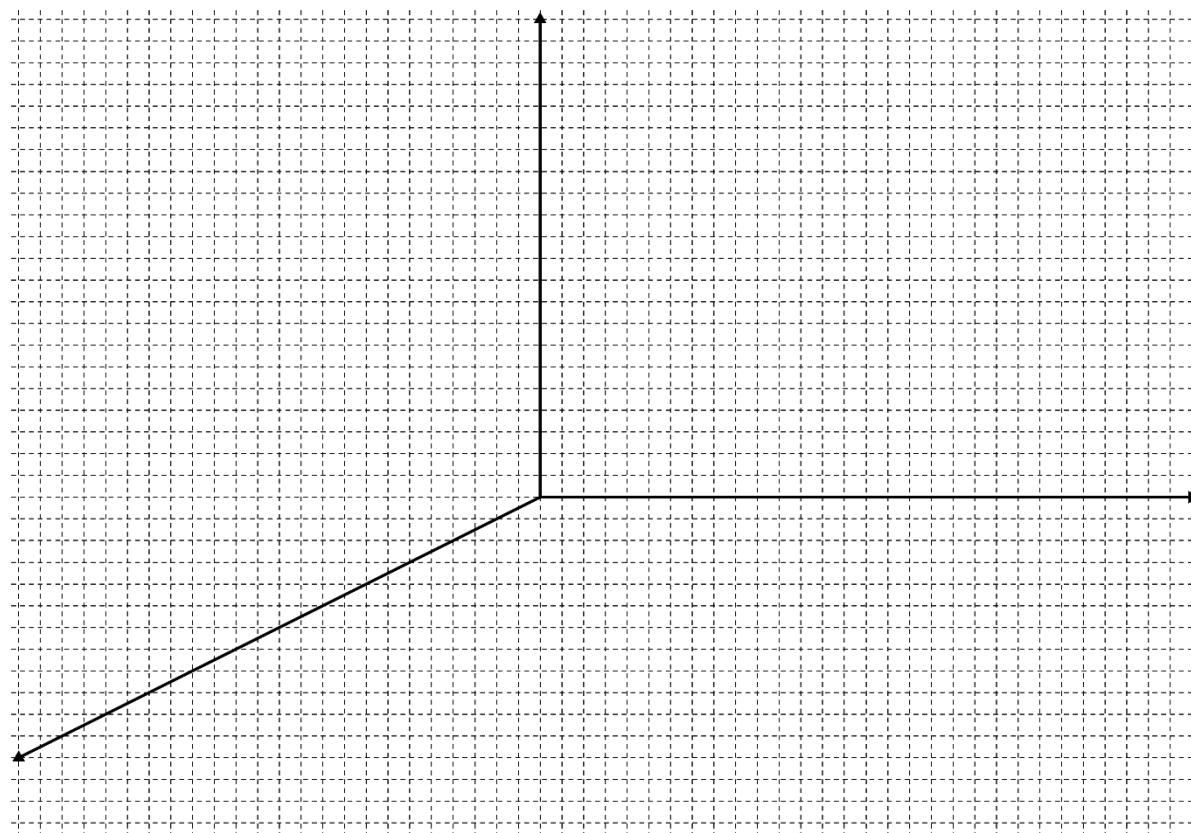
Exercice 22

Construire les traces du plan qui contient la droite d et le point A .

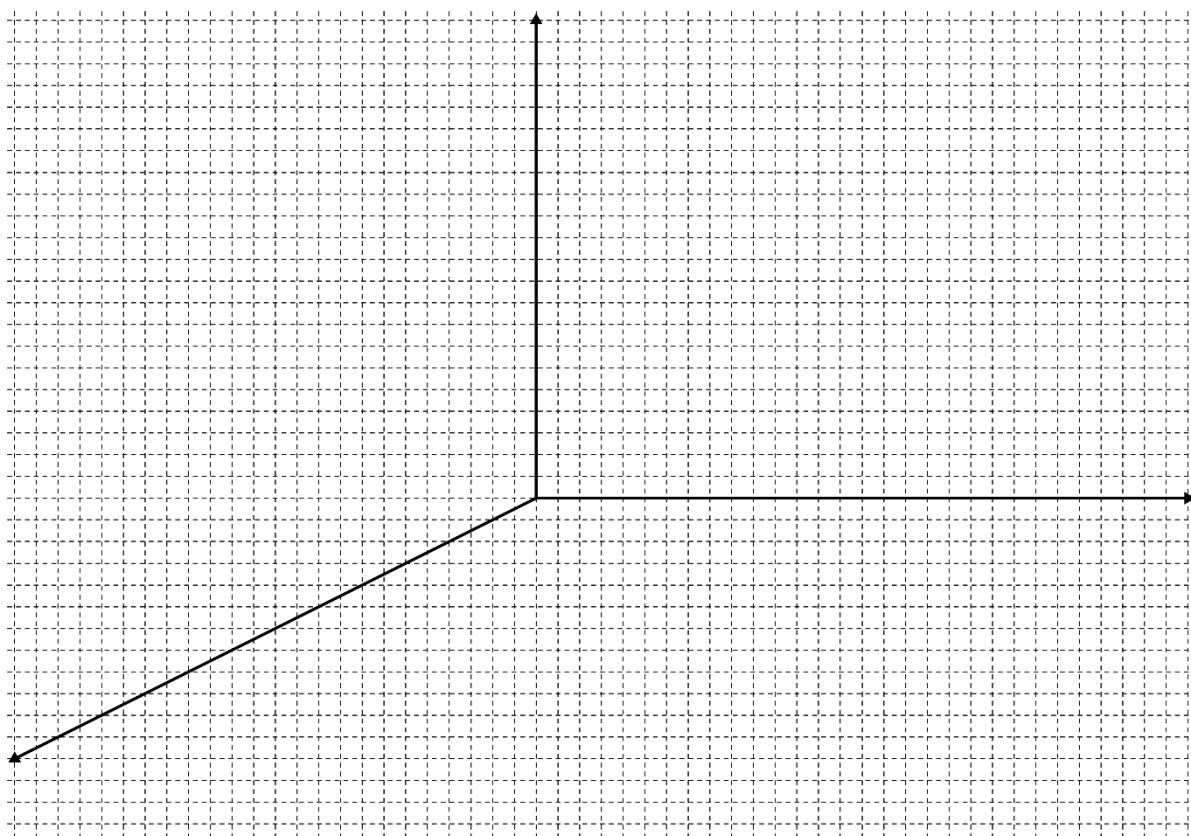
**Exercice 23**

Dessiner les plans :

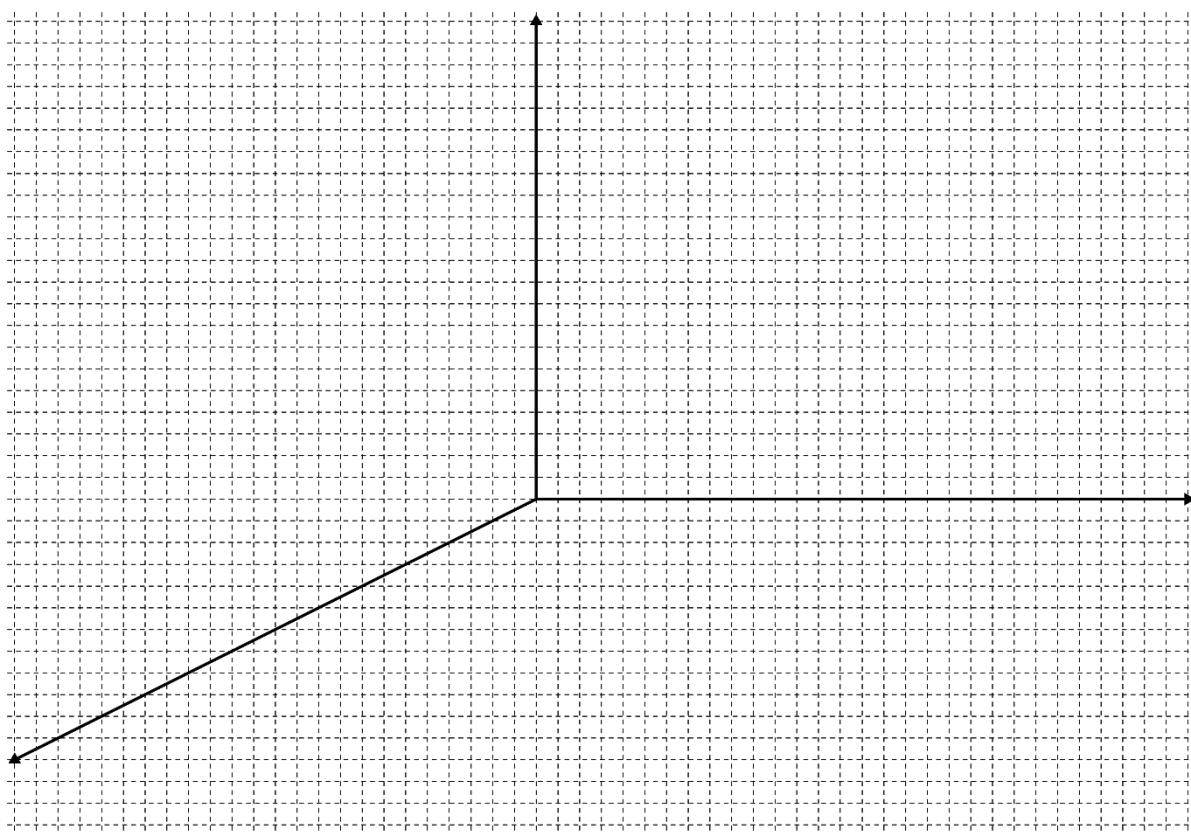
- a. α passant par les points $A(2 ; 9 ; -4)$, $B(-4 ; 0 ; -3)$ et $C(-2 ; 3 ; 3)$



b. β passant par les points $A(5 ; 2 ; 1)$, $B(3 ; -1 ; 2)$ et $C(7 ; 1 ; 1)$



c. γ passant par le point $A(3 ; 0 ; 0)$ et parallèle à $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

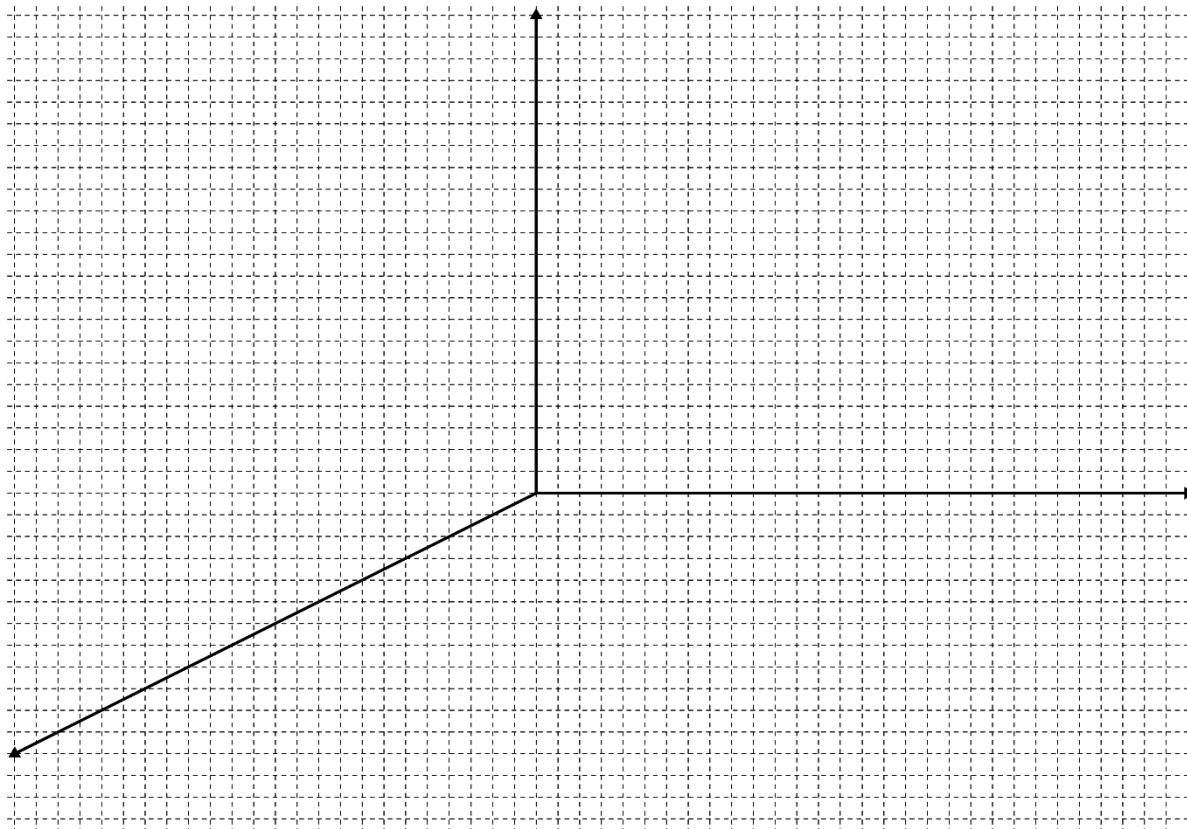


Exercice 24

Soient les points $A(4 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 4 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 4)$, ainsi que les plans suivants :

- α passant par A et parallèle au mur,
- β passant par B et parallèle à la paroi,
- γ passant par C et parallèle au sol.

Dessiner ces trois plans ainsi que leur point d'intersection I.

**Exercice 25**

Vrai ou faux :

L'intersection de deux plans est toujours une droite :

Vrai Faux

Trois plans dont aucun n'est parallèle à un autre se croisent en 1 point :

Vrai Faux

Une droite a toujours au moins une partie visible :

Vrai Faux

Une droite peut avoir deux parties visibles distinctes :

Vrai Faux

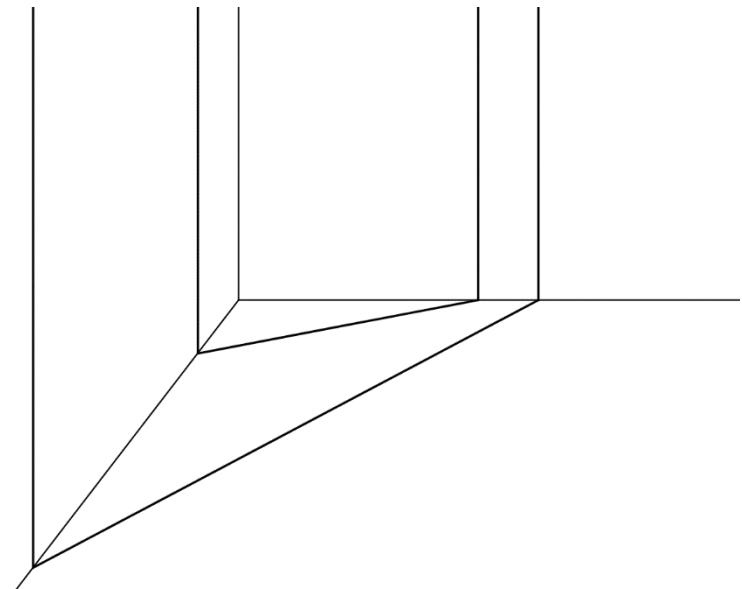
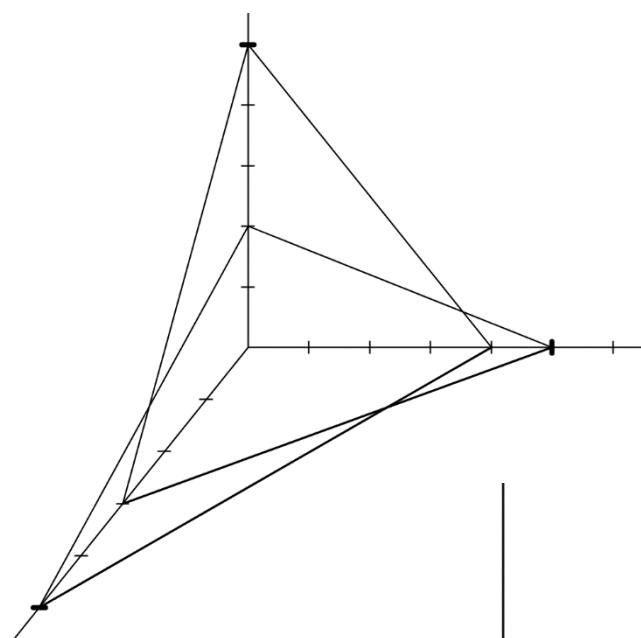
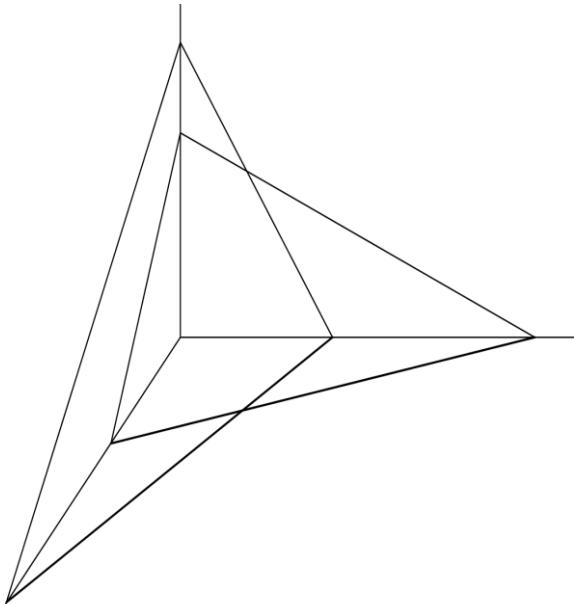
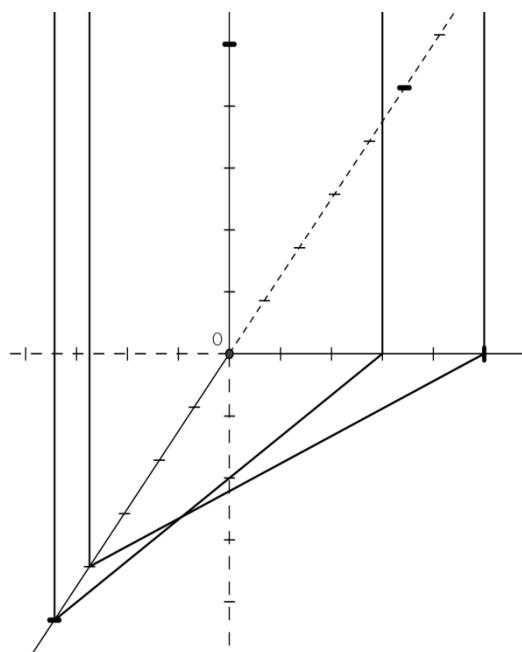
Une droite peut avoir le trajet suivant : octant I, octant II, octant VII :

Vrai Faux

Justifier :

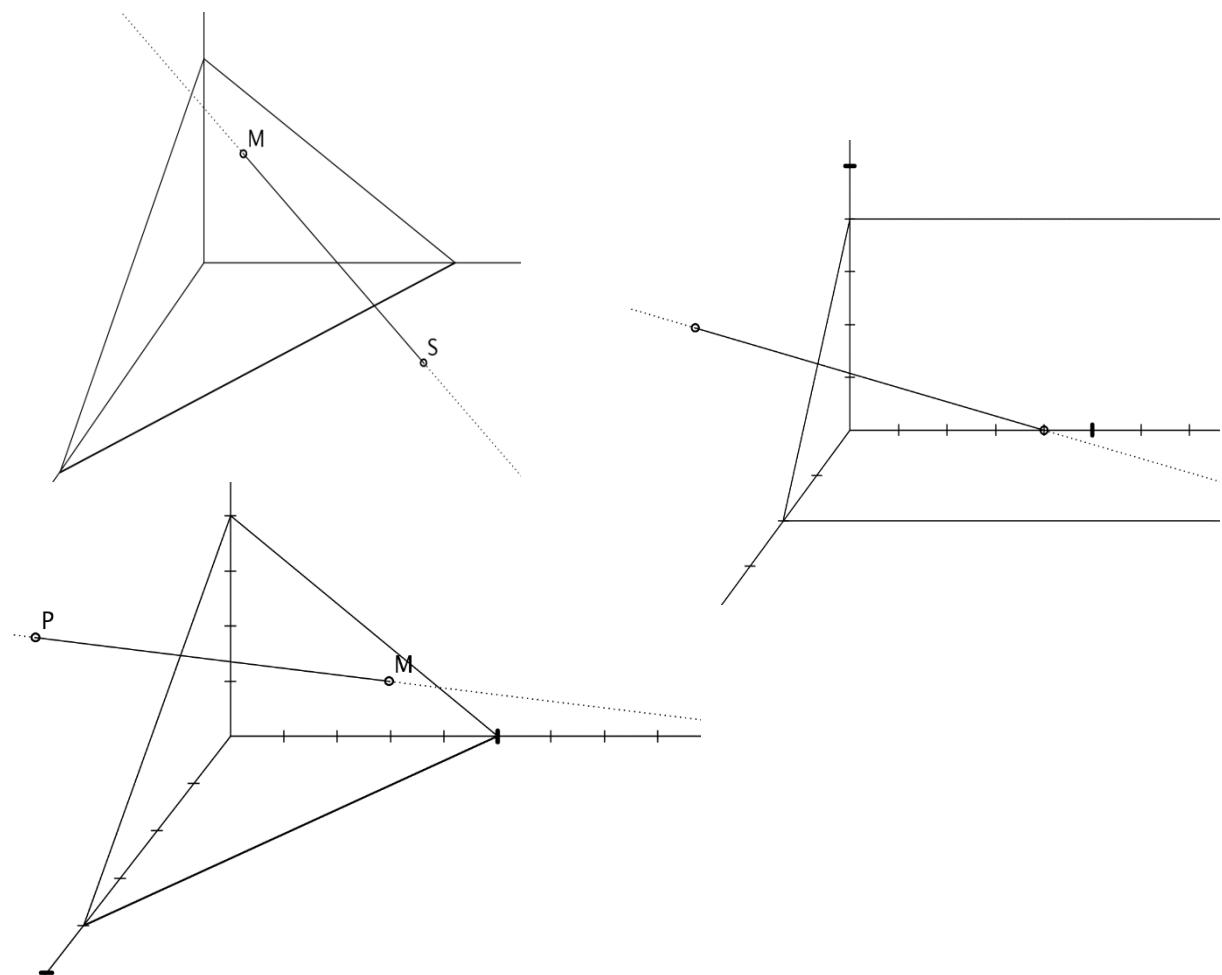
Exercice 26

Dessiner l'intersection des deux plans dans les 4 cas suivants :

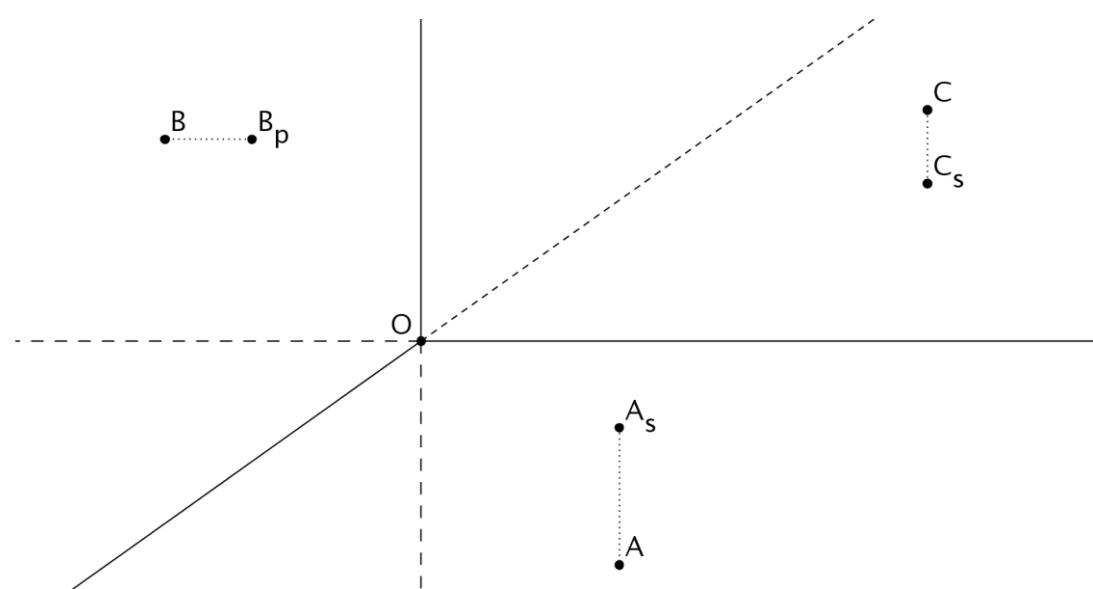


Exercice 27

Dessiner l'intersection entre le plan et la droite dans les 3 cas suivants :

**Exercice 28 (exercice final)**

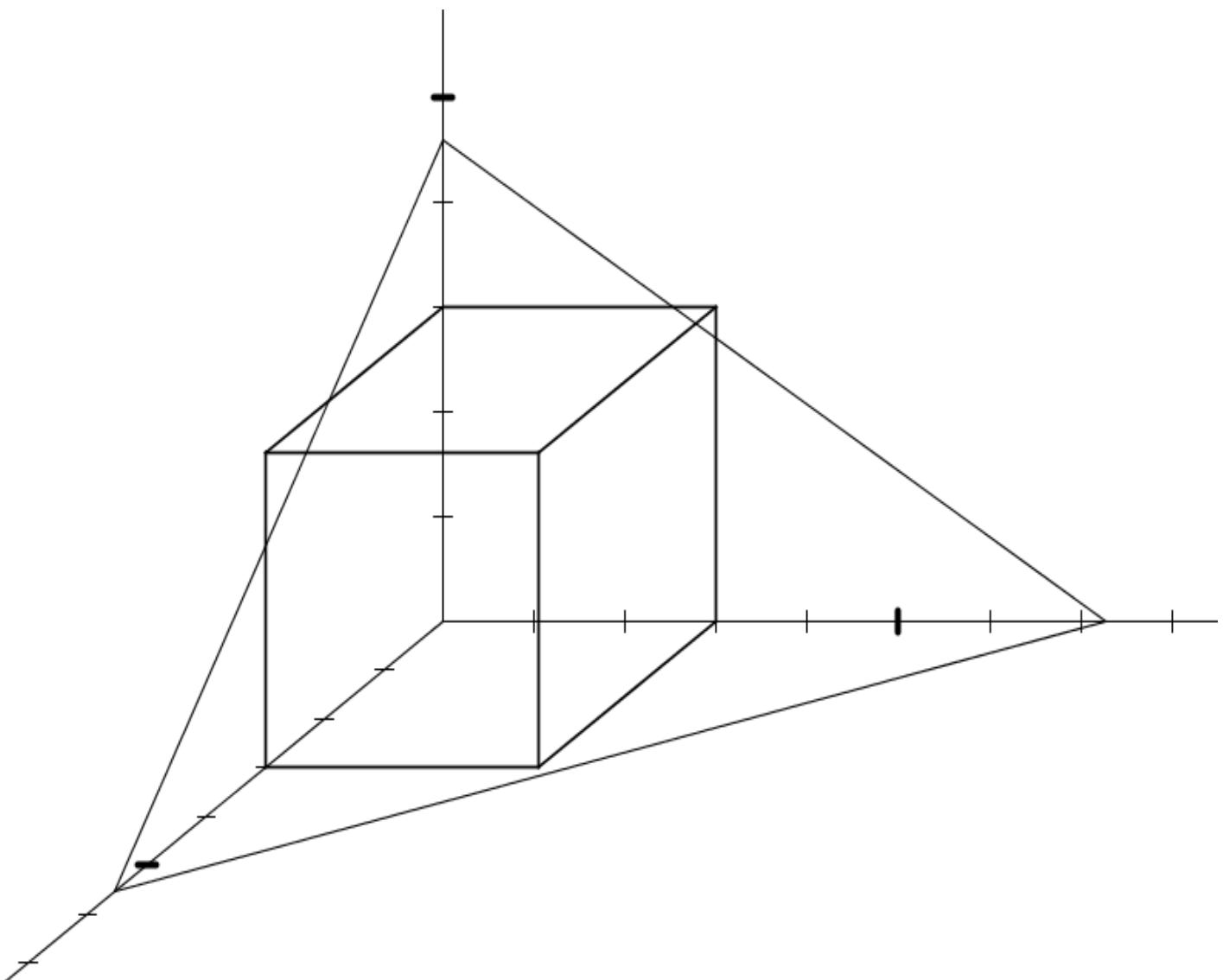
Hachurer en couleur la partie visible (dans le 1^{er} octant) du triangle ABC.



Exercice 29

Sur le dessin, on a représenté un cube et un plan donné par ses traces.

- Dessiner l'intersection entre le plan et les trois faces visibles du cube.
- Épaissir les parties des arêtes du cube qui se trouvent du même côté du plan que vous (au-dessus).



Pour les exercices suivants, les dessins sont faits dans votre propre repère.

Exercice 30 Équations

Donner l'équation paramétrique vectorielle de la droite d qui passe par les points $A(1 ; 5 ; 3)$ et $B(5 ; 3 ; 1)$.

Exercice 31

- Quelle est l'équation paramétrique vectorielle de la droite d qui passe par $A(1 ; 5 ; 3)$ et qui est parallèle à la droite d' : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$?
- Construire d et d' .

Exercice 32

Soit la droite d'équation d : $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$

- Calculer les traces de cette droite, puis dessiner la droite d dans un repère.
- Les points $P(-1 ; 5 ; 1)$ et $Q(7 ; -3 ; 8)$ appartiennent-ils à la droite d ?
- Déterminer le point de la droite d dont la cote est égale au triple de l'ordonnée.
- Déterminer les équations des projections de d dans le sol, le mur et la paroi, puis dessiner ces projections.

Exercice 33

Donner les équations paramétriques, les traces et une représentation graphique des droites suivantes :

- d passe par $A(6 ; 2 ; 1)$ et $B(2 ; 4 ; 3)$.
- t passe par $A(5 ; 7 ; 2)$ et $B(2 ; 2 ; 2)$.

Exercice 34

Par calcul, voir si les quatre points suivants appartiennent à un même plan : $A(2 ; 5 ; 3)$, $B(-1 ; 6 ; 5)$, $C(0 ; 0 ; 10)$ et $D(5 ; 0 ; 5)$.

Exercice 35

Le plan π est donné par trois points : $A(2 ; -1 ; 4)$, $B(-2 ; 1 ; 2)$ et $C(5 ; -4 ; 6)$.

Donner l'équation vectorielle paramétrique de π , ainsi que son équation cartésienne.

Exercice 36

Dessiner les plans suivants :

$$\begin{array}{lll} \alpha : 2x - 2y + z - 6 = 0 & \beta : 2x + 3y - 2z - 6 = 0 & \gamma : 2x + 3y - 6 = 0 \\ \delta : 2x + 3y + 2z + 6 = 0 & \epsilon : 3y - 2z - 6 = 0 & \phi : z - 6 = 0 \end{array}$$

Exercice 37

On donne deux droites $d_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $d_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vérifier qu'elles se coupent et construire les droites, ainsi que le plan qui les contient toutes les deux.

Exercice 38

Déterminer, s'il existe, le point d'intersection entre les droites a et b , puis dessiner ces droites.

a. a passe par $A(3 ; 2 ; 1)$ et $A'(4 ; 4 ; -2)$. b passe par $B(-1 ; 0 ; 2)$ et $B'(3 ; -6 ; 0)$

b. $a: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases}$ $b: \begin{cases} x = 3 + \mu \\ y = 5 - 4\mu \\ z = -2 - 15\mu \end{cases}$

c. $a: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$ $b: \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = -1 - \mu \\ z = 5 + 2\mu \end{cases}$

d. $a: \begin{cases} x = -2 + 4\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = 4 - 2\lambda \end{cases}$ $b: \begin{cases} x = 6 - 2\mu \\ y = -1 - \mu \\ z = \mu \end{cases}$

Exercice 39

Les intersections d'un plan avec les axes sont respectivement

$$\pi \cap O_x = (4 ; 0 ; 0) \quad \pi \cap O_y = (0 ; 6 ; 0) \quad \text{et} \quad \pi \cap O_z = (0 ; 0 ; 8)$$

Déterminer l'équation cartésienne du plan ainsi défini.

Exercice 40

Étudier les positions relatives du plan et de la droite suivante :

- Le plan π passe par les points $A(0 ; 0 ; 6)$, $B(2 ; 0 ; 4)$ et $C(0 ; 1 ; 5)$.
- La droite d passe par le point $D(1 ; 4 ; 1)$ et est parallèle à $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Exercice 41

Que dire de l'intersection des plans suivants :

a. $\alpha: x - 2y + 3z - 6 = 0$ et $\beta: x + 3y - 2z + 5 = 0$

b. $\alpha: x - 2y + 3z - 6 = 0$ et $\beta: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 - \lambda + \mu \\ z = -1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$

c. $\alpha: 3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et $\beta: \begin{cases} x = 4 + 2\lambda + 5\mu \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -3\mu \end{cases}$

d. $\alpha: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda - 2\mu \\ y = 1 - \lambda + \mu \\ z = 3 + \lambda - \mu \end{cases}$ et $\beta: \begin{cases} x = 1 + \lambda + 5\mu \\ y = 1 - 2\mu \\ z = 2 + 2\mu \end{cases}$

Zones de dessin supplémentaires