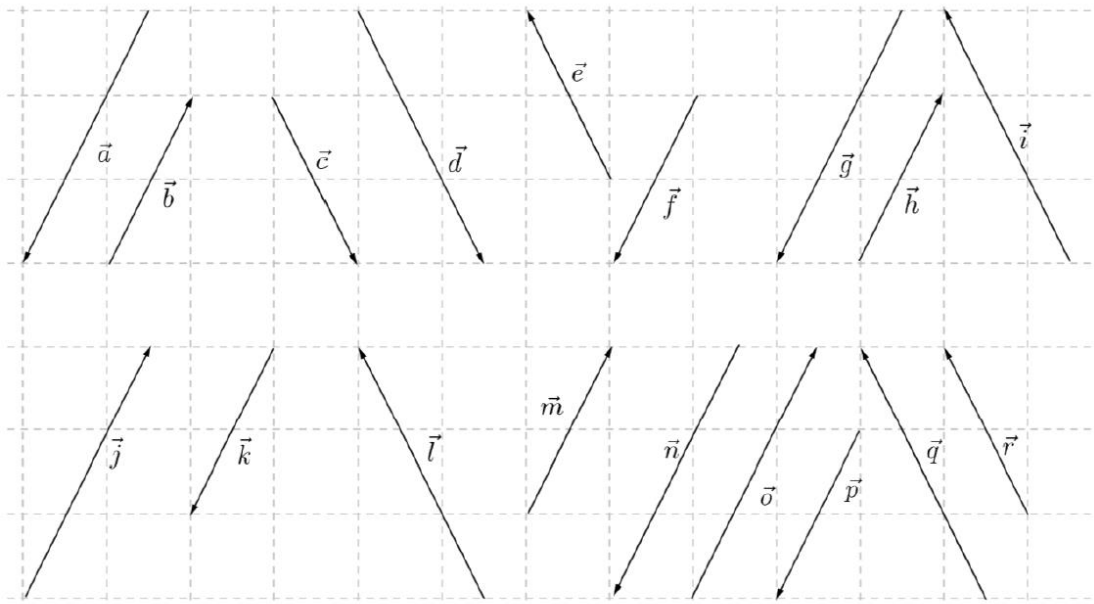
Chapitre 4

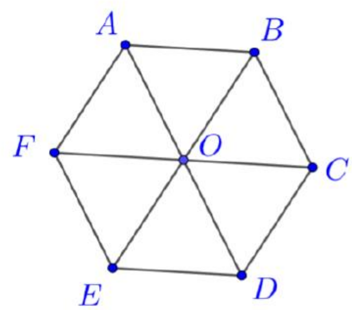
Géométrie plane

Exercice 1. *Parmi les flèches ci-dessous, identifiez celles qui sont « les mêmes ».*



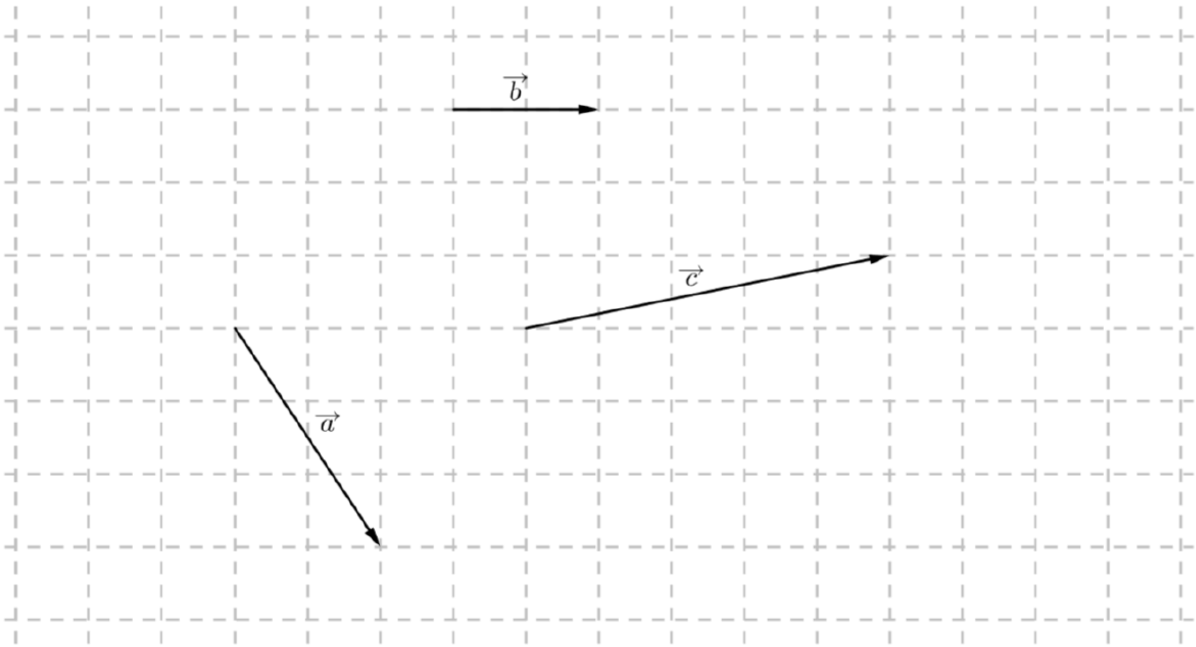
Exercice 2.

Ecrivez toutes les égalités possibles entre les vecteurs que nous pouvons décrire à l'aide des points de la figure ci-dessous :



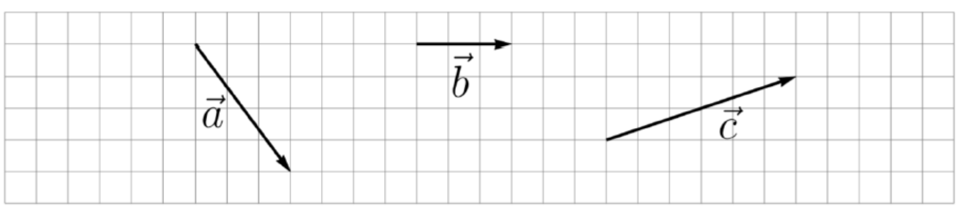
Exercice 3.

a) Construisez un représentant des vecteurs $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{c}$ *et* $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ *à partir des vecteurs* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *et* $\vec{c}$ *ci-dessous.*



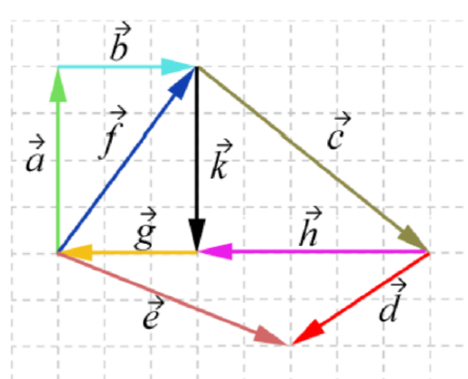
Exercice 4. *A l'aide des vecteurs représentés ci-dessous, construisez dans votre cahier un représentant des vecteurs suivants :*

$$-\vec{a},\quad \vec{a}-\vec{b},\quad \vec{b}-\vec{c},\quad \vec{a}-\vec{c},\quad \vec{a}-\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$$



Exercice 5.

a) Que vaut $\vec{x}$*, sachant que* $\vec{x}+\vec{b}=\vec{f}$ *?*
b) Que vaut $\vec{x}$*, sachant que* $\vec{x}+\vec{d}=\vec{e}$ *?*
c) Exprimez $\vec{c}$ *par rapport à* $\vec{d}$, $\vec{e}$ *et* $\vec{f}$.
d) Exprimez $\vec{g}$ *par rapport à* $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ *et* $\vec{k}$.
e) Exprimez $\vec{e}$ *par rapport à* $\vec{d}$, $\vec{g}$ *et* $\vec{h}$.
f) Exprimez $\vec{e}$ *par rapport à* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *et* $\vec{d}$.
g) Que vaut $\vec{x}$*, sachant que* $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{k}+\vec{g}$ *?*
h) Que vaut $\vec{x}$*, sachant que* $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{h}$ *?*



Exercice 6. *Dessinez un vecteur quelconque $\overrightarrow{a}$ dans votre cahier puis dessinez un représentant de*

a) $2 \cdot \overrightarrow{a}$ *b)* $0,75 \cdot \overrightarrow{a}$ *c)* $-\dfrac{3}{2} \cdot \overrightarrow{a}$

d) $\dfrac{4}{5} \cdot \overrightarrow{a}$ *e)* $1,\overline{3} \cdot \overrightarrow{a}$ *f)* $\sqrt{2} \cdot \overrightarrow{a}$

Exercice 7. *Soient A, B, C et D quatre points quelconques du plan. Simplifiez autant que possible :*

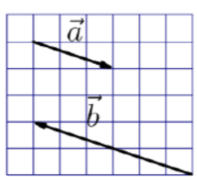
a) $\dfrac{1}{2}\left(3\vec{a} - 6\vec{b}\right) - 2\vec{a}$ *b)* $-3\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) + \dfrac{1}{2}\left(2\vec{a} + \vec{b}\right)$

c) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$ *d)* $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$

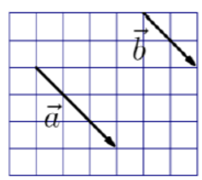
Exercice 8. *Soient O, A et B trois points quelconques du plan. Exprimez le vecteur $\overrightarrow{AB}$ à l'aide de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.*

Exercice 9. *Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ci-dessous sont-ils colinéaires (parallèles) ? Si oui, estimez la valeur de k pour que $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$.*

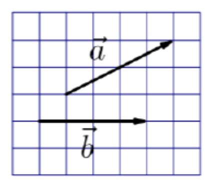
a)



b)

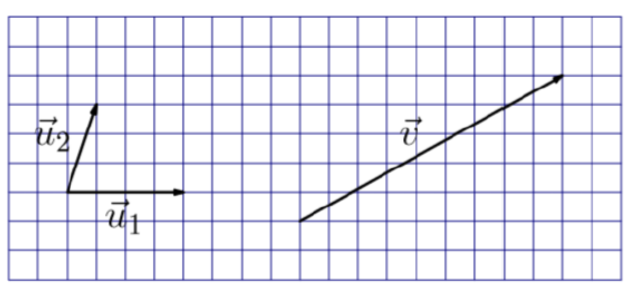


c)



Exercice 10.

a) Construire $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ tels que $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \vec{v}$, $\overrightarrow{v_1} \parallel \overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v_2} \parallel \overrightarrow{u_2}$.



b) Déterminez les nombres α et β tels que $\vec{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{u_1} + \beta \cdot \overrightarrow{u_2}$.

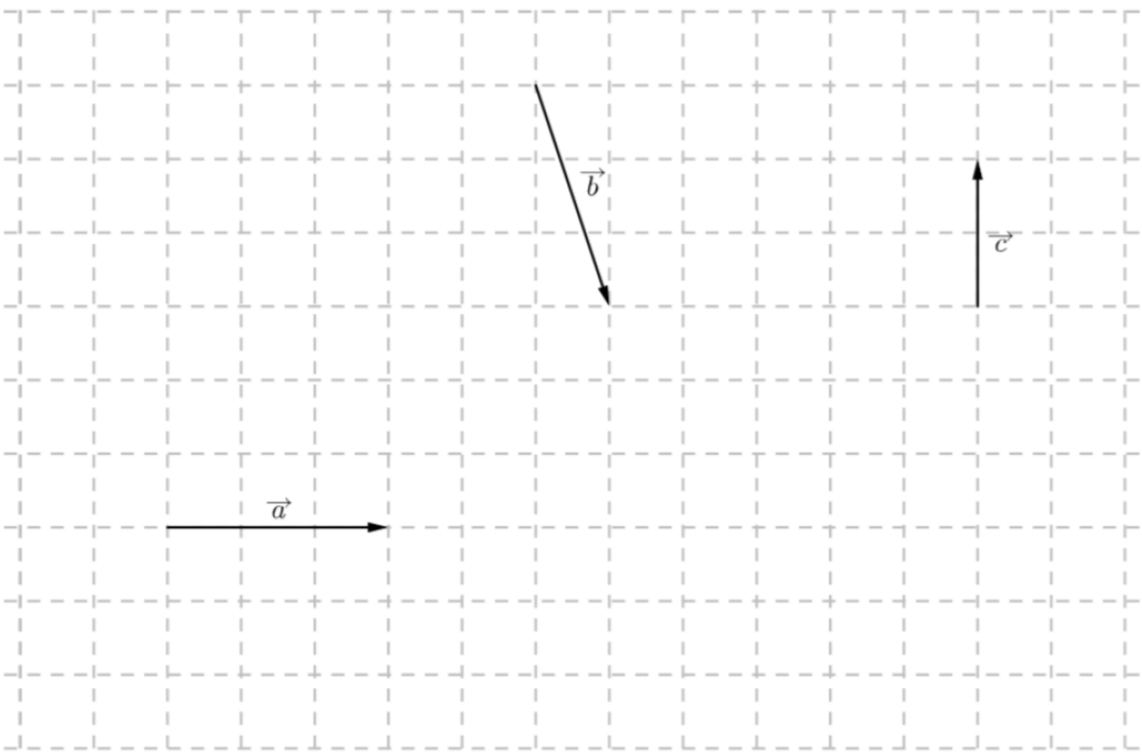
Exercice 11. *Soient $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ les vecteurs du plan donnés ci-dessous. Dessinez un représentant des combinaisons linéaires suivantes :*

a) $3 \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c})$

b) $-\overrightarrow{a} + 2 \cdot \overrightarrow{c}$

c) $3 \cdot \overrightarrow{a} - 3 \cdot \overrightarrow{c}$

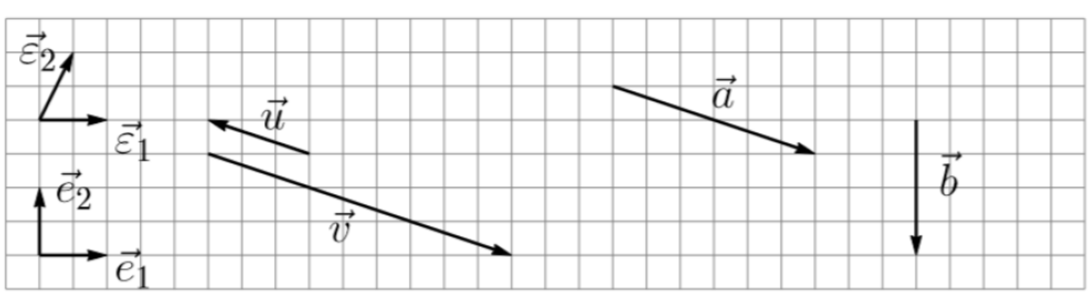
d) $-\frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$



Exercice 12. *Lorsque c'est possible, exprimez les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ comme combinaisons linéaires des vecteurs :*

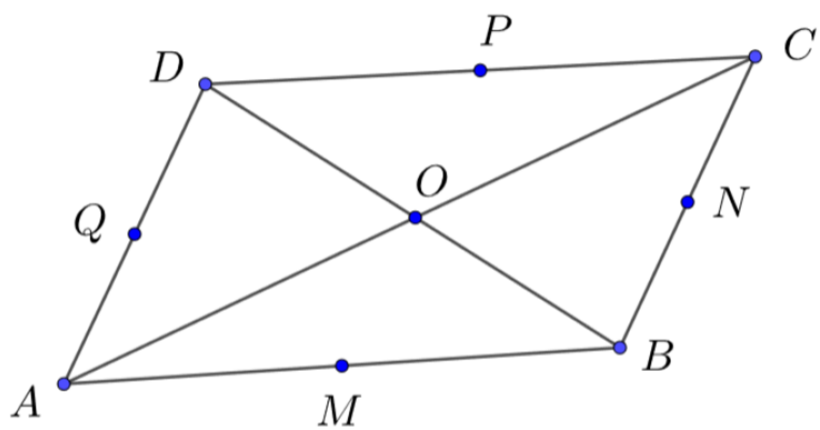
a) $\vec{e}_1$ *et* $\vec{e}_2$, *b) puis* $\vec{\varepsilon}_1$ *et* $\vec{\varepsilon}_2$, *c) et enfin* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

d) Définissez quand est-ce que cela n'est pas possible ?

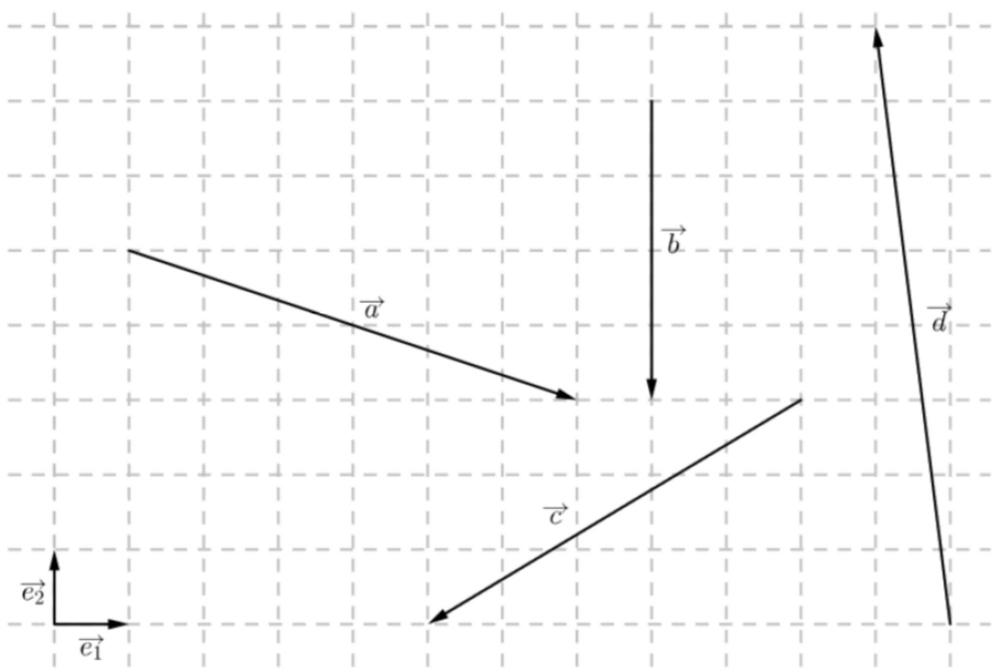


Exercice 13. *Soient le parallélogramme $ABCD$ et M, N, P et Q, les milieux des côtés de $ABCD$ et O, l'intersection des diagonales.*

Ecrivez les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{CM}$, comme combinaisons linéaires des vecteurs de la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$.



Exercice 14. *Déterminez les combinaisons linéaires correspondant aux vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$.*



Exercice 15. *a) Construisez les vecteurs* $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ *et* $-\frac{1}{2}\,\vec{v}$.

b) Complétez : $\vec{u}=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$, $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$,

$\vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$, $-\frac{1}{2}\,\vec{v}=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$.

Exercice 16. *Construisez les vecteurs ci-dessous dans la base usuelle.*

a) $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *c)* $\overrightarrow{c}=\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ *d)* $\overrightarrow{d}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 17. *Calculez les expressions vectorielles suivantes.*

$$\overrightarrow{a}=3\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{b}=\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}\right)-\frac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. *Soient les vecteurs* $\vec{a}=\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{c}=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calculez les composantes des vecteurs suivants :

a) $3\vec{a}-4\vec{b}+\vec{c}$ *b)* $\vec{a}-2\vec{b}+\frac{1}{2}\,\vec{c}$ *c)* $-5\vec{a}-3\vec{b}-8\vec{c}$

Exercice 19. *Parmi les vecteurs suivants, déterminez les vecteurs parallèles.*

$$\vec{a} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ -1/3 \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \tfrac{2}{3}\,\vec{e}_2 \quad \vec{l} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 20. *Soient les vecteurs* $\vec{a} = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ *et* $\vec{b} = 3\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$.

Calculez y *tel que* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *soient colinéaires.*

Exercice 21. *Déterminez la(les) valeur(s) du paramètre* m *de sorte que les deux vecteurs* $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} m^2+1 \\ m+2 \end{pmatrix}$ *soient colinéaires.*

Exercice 22. *Calculez* m *pour que* $\vec{v} = \begin{pmatrix} -m \\ m+1 \end{pmatrix}$ *soit parallèle à* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2m \end{pmatrix}$.

Exercice 23.

a) Décomposez le vecteur $\vec{c}$ *dans la base formée par les vecteurs* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

b) Idem avec les vecteurs suivants :

$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 \qquad \vec{b} = -4\vec{e}_1 + 16\vec{e}_2 \qquad \vec{c} = 7\vec{e}_1 - 13\vec{e}_2 \,.$$

Exercice 24. *Soient les points* $A(-2;1)$, $B(\frac{3}{2};-\frac{5}{3})$ *et* $C(4;\frac{1}{3})$. *Déterminez :*

a) les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{AC}$;

b) les coordonnées du point D *tel que* $\overrightarrow{AD} = \binom{-1}{5}$;

c) le milieu M *du segment* AC ;

d) le symétrique C' *de* C *par rapport à* A .

Exercice 25. *Déterminez par calcul les coordonnées du point* S_B, *symétrique du point* $B(-1;-2)$ *par rapport au point* $A(2;-3)$ *(symétrie centrale).*

Exercice 26. *Soient les trois vecteurs* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Déterminez les coordonnées des points A, B *et* C *sachant que :*

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} + \frac{1}{3}\vec{w}\,, \quad \overrightarrow{AB} = 2\vec{v} - \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CB} = 2\vec{v} - \overrightarrow{OA}\,.$$

Exercice 27.

a) *Les points* $A(0;-3)$, $B(2;0)$ *et* $C(8;8)$ *sont-ils alignés ?*

b) *Calculez* y *tel que* $A(0;-2)$, $B(2;1)$ *et* $C(3;y)$ *soient alignés.*

Exercice 28. *Le point* $A'(3;-3)$ *est l'image de* $A(-1;-1)$ *par une translation. Quelles sont les images de* $B(2;0)$ *et* $C(1;2)$ *par cette translation ?*

Exercice 29. *Soient les points* $P(-1;0)$, $Q(2;-1)$ *et* $R(1;2)$.

Déterminez l'image du triangle PQR *par l'homothétie de sommet* $S(1;0)$ *et de rapport* -2.

* **Exercice 30.** *Soit le triangle* ABC *avec* $A(3;2)$, $B(-1;4)$ *et* $C(0;2)$. *Le triangle* $A'B'C'$ *est obtenu par une homothétie de centre* $M(-2;1)$ *et de facteur* -2.

Déterminez les coordonnées des points A', B' *et* C'.

Exercice 31.

a) *Les points* $A(-5;-2)$, $B(4;1)$ *et* $C(6;5)$ *sont trois sommets d'un parallélogramme* $ABCD$. *Déterminez les coordonnées du quatrième sommet* D.

b) *Soit le parallélogramme* $ABCD$ *de centre* $M(4;2)$ *dont on connaît les sommets* $A(-2;-3)$ *et* $B(8;1)$. *Déterminez les coordonnées des sommets* C *et* D *de ce parallélogramme.*

Exercice 32. *Soit le quadrilatère* $ABCD$ *de sommets* $A(0;4)$, $B(2;6)$, $C(4;2)$ *et* $D(2;-4)$, *et soient* E, F, G, H *les milieux des côtés* AB, BC, CD *et* DA.

Montrez par calcul que le quadrilatère $EFGH$ *est un parallélogramme.*

Exercice 33. *D'un parallélogramme* $ABCD$, *nous connaissons le centre* $M(3;-1)$, *le sommet* $C(6;2)$ *ainsi que* $\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2}$.

Déterminez par calcul les coordonnées des sommets A, B *et* D.

Exercice 34. *Déterminez les coordonnées des points milieux des côtés ainsi que du centre de gravité* G *du triangle* ABC, *où* $A(-2;-7)$, $B(3;-1)$ *et* $C(-10;2)$.

Exercice 35. *Un triangle est donné par le sommet* $A(1;2)$, *son centre de gravité* $G(5;7)$ *et le vecteur* $\overrightarrow{BC} = \binom{-4}{6}$.

Calculez le point A' *(milieu du segment* BC*) puis les sommets manquants* B *et* C.

Exercice 36. *Soit d la droite passant par $A(0;3)$ de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.*

a) Dessinez la droite d dans le repère usuel.

b) Le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ -10 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur directeur de la droite d ?

c) Le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. Que vaut v_2 ?

d) Par calcul, déterminez si les points $B(-1;3)$, $C(3;-7)$ et $D(\frac{3}{4};2)$ appartiennent à la droite d.

Exercice 37. *Soit la droite d passant par les points $A(\frac{1}{2};-5)$ et $B(\frac{5}{2};-3)$. Déterminez :*

a) les composantes d'un vecteur directeur de d.

b) des équations paramétriques de d.

c) les coordonnées de deux autres points de d.

Exercice 38. *La droite d passe par $A(-2;1)$ et $B(1;3)$.*

a) Déterminez des équations paramétriques de d.

**b) Les points $P(-\frac{1}{2};2)$ et $Q(7;8)$ sont-ils sur d ?*

c) Les points $C(c_1;0)$ et $D(\frac{5}{2};d_2)$ sont sur d. Déterminez c_1 et d_2.

d) Déterminez des équations paramétriques de la droite d' parallèle à d passant par $E(-1;1)$.

Exercice 39. *Soient les points $A(1;-2)$, $B(-5;2)$, $C(-4;1)$, $D(-1;-1)$ et $E(50;-40)$.*

a) Les droites AB et CD sont-elles parallèles ?

b) Les droites BD et CE sont-elles parallèles ?

* **Exercice 40.** *Soit la droite $d: A(2;-4), B(-1;-3)$.*

a) Déterminez des équations paramétriques de la droite d.

b) Les points $C(1;-1)$, $D(0;0)$, $E(5;-5)$ et $F(-139;43)$ sont-ils situés sur la droite d ?

c) Déterminez le point H de la droite d dont l'abscisse vaut le double de l'ordonnée.

Exercice 41. *Déterminez des équations paramétriques de la droite horizontale h passant par $A(5;7)$.*

Exercice 42. *Soit le triangle ABC avec $A(-4;1)$, $B(2;-3)$ et $C(5;4)$ et m_A la médiane issue du sommet A.*

Déterminez des équations paramétriques de m_A et vérifiez que cette médiane contient le centre de gravité G du triangle ABC.

Facultatif : *Idem avec les deux autres médianes.*

Exercice 43. *Déterminez une équation cartésienne de chacune des deux droites suivantes.*

$$d : \left\{ \begin{array}{lcr} x & = & -2+4\lambda \\ y & = & 1-\frac{5}{2}\,\lambda \end{array} \right. \qquad d' : \left\{ \begin{array}{lcr} x & = & 2+3\mu \\ y & = & -2\mu \end{array} \right.$$

Exercice 44. *Donnez une équation cartésienne de d définie par $A(5;3)$ et $\vec{d} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Exercice 45. *L'équation cartésienne de la droite d est $5x - 2y - 11 = 0$.*

a) *Les points $A(-3;-13)$, $B(-\frac{4}{3};-\frac{5}{6})$ et $C(\frac{1}{2};-\frac{17}{4})$ sont-ils sur d ?*

b) *Trouvez la coordonnée manquante des points $P(3;p_2)$ et $Q(q_1;-\frac{5}{6})$ de d.*

c) *Déterminez l'ordonnée à l'origine et le zéro de cette droite.*

Exercice 46. *Déterminez des équations paramétriques ainsi que l'équation réduite de chacune des droites suivantes.*

$$d_1 : 5x - 6y - 7 = 0 \qquad d_2 : 4x - 3y = 0 \qquad d_3 : x = 3$$

Exercice 47. *Soit la droite d d'équation explicite $y = -\frac{2}{3}\,x + 3$. Quelle valeur faut-il donner à v_2 pour que le vecteur $\vec{v} = \binom{1}{v_2}$ soit un vecteur directeur de d ?*

* **Exercice 48.** *Déterminez le point d'intersection des droites d et d' dans chacun des cas suivants.*

a) $d : 3x - 7y + 1 = 0$, $d' : \left\{ \begin{array}{lcr} x & = & 4+2\lambda \\ y & = & 6+5\lambda \end{array} \right.$

b) $d : 4x - 6y + 3 = 0$, $d' : \left\{ \begin{array}{lcr} x & = & -2-3\lambda \\ y & = & -2\lambda \end{array} \right.$

c) $d : 3x + 2y - 1 = 0$, $d' : 9x + 6y - 3 = 0$

Exercice 49.

a) *Soit d la droite d'équation $y = 4x - 5$. Déterminez une équation cartésienne de la droite d' parallèle à d passant par $A(3;2)$.*

b) *Soit d la droite d'équation $-2x + 3y - 1 = 0$. Déterminez une équation cartésienne de la droite d' parallèle à d passant par $B(0;-2)$.*

* **Exercice 50.** *Déterminez une équation cartésienne de la droite d passant par les points $A(3;0)$ et $B(5;1)$.*

Exercice 51. *Déterminez la projection du point $P(2;4)$ sur la droite $a : 2x - y + 5 = 0$ parallèlement à $d : x - 3y = 0$.*

Exercice 52. *Complétez les tableaux suivants.*

<table>
<tr><td>équations paramétriques
$d : \begin{cases} x = 2 + 10\lambda \\ y = -3 + 5\lambda \end{cases}$</td><td>équation cartésienne</td><td>équation explicite</td></tr>
<tr><td colspan="3">La droite d passe (par exemple) par les points $A(.....;.....)$ et $B(.....;.....)$</td></tr>
<tr><td>vecteur directeur $\vec{d} =$</td><td>vecteur normal $\vec{n} =$</td><td>pente $m =$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>équations paramétriques
$d_1 : \begin{cases} \\ \end{cases}$</td><td>équation cartésienne</td><td>équation explicite</td></tr>
<tr><td colspan="3">La droite d_1 passe (par exemple) par les points $A(3;4)$ et $B(.....;.....)$</td></tr>
<tr><td>vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$</td><td>vecteur normal $\vec{n} =$</td><td>pente $m =$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>équations paramétriques
$d_2 : \begin{cases} \\ \end{cases}$</td><td>équation cartésienne</td><td>équation explicite</td></tr>
<tr><td colspan="3">La droite d_2 passe (par exemple) par les points $A(0;1)$ et $B(3;0)$</td></tr>
<tr><td>vecteur directeur $\vec{d} =$</td><td>vecteur normal $\vec{n} =$</td><td>pente $m =$</td></tr>
</table>

Exercice 53. *Déterminez la position relative des droites d_1 et d_2 dans chacun des cas suivants :*

a) $d_1 : 4x - 2y - 1 = 0$ *et* $d_2 : -2x + y - 5 = 0$

b) $d_1 : 3x + y - 8 = 0$ *et* $d_2 : y = 3x - \frac{3}{2}$

c) $d_1 : 8x - 4y - 2 = 0$ *et* $d_2 : -4x + 2y + 1 = 0$

d) $d_1 : -x + 2y - 3 = 0$ *et* $d_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -1 + 2\lambda \\ y & = & 1 + \lambda \end{array} \right.$

e) $d_1 : y = \frac{1}{2}x - 2$ *et* $d_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 6 - 2\lambda \\ y & = & 3 - \lambda \end{array} \right.$

f) $d_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2\lambda \\ y & = & 3 + 5\lambda \end{array} \right.$ *et* $d_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 4 + 3\mu \\ y & = & 1 - 2\mu \end{array} \right.$

Exercice 54. *Soient les trois droites d_1, d_2 et d_3 données par :*

$$d_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 - 3\lambda \\ y & = & 3 + 2\lambda \end{array} \right. \qquad d_2 : \left\{ \begin{array}{lcr} x & = & -2 + \mu \\ y & = & 1 - 2\mu \end{array} \right. \qquad d_3 : \left\{ \begin{array}{lcr} x & = & 2 + 3\nu \\ y & = & -2\nu \end{array} \right.$$

Déterminez les points d'intersection de chacune de ces droites avec les axes Ox et Oy, puis les points d'intersection $d_1 \cap d_2$, $d_1 \cap d_3$ et $d_2 \cap d_3$.

Exercice 55. *Soient les six droites suivantes :*

$$d_1 : y = 3x + 6 \qquad d_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 3 - 3\lambda \\ y & = & 7 - \lambda \end{array} \right. \qquad d_3 : 8x - 7y - 17 = 0$$

$$d_4 : \left\{ \begin{array}{lcr} x & = & 1 + \mu \\ y & = & -1 + \mu \end{array} \right. \qquad d_5 : y = -x + 17 \qquad d_6 : 5x + 3y - 77 = 0$$

a) Déterminez les quatre points suivants :

$$A \in d_1 \cap d_2 \qquad B \in d_3 \cap d_4 \qquad C \in d_5 \cap d_6 \qquad D \in d_3 \cap d_6.$$

b) De quel type est le quadrilatère $ABCD$?

Exercice 56. *Déterminez par calcul les sommets A, B et C du triangle donné par les renseignements suivants :*

1. $d_{AB} : 3x - 5y + 1 = 0$
2. $d_{AC} : x - 9y - 29 = 0$
3. *L'abscisse de C vaut 11*
4. $\overrightarrow{BC} \parallel \vec{t} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$.

* **Exercice 57.** *Soit le triangle ABC, avec $A(-6;-3)$, $B(12;-9)$ et $C(6;3)$.*

a) Déterminez les équations cartésiennes des trois médianes du triangle et montrez qu'elles ont un unique point en commun.

b) Déterminez les coordonnées de ce point et vérifiez votre résultat en utilisant la formule du centre de gravité d'un triangle.

Exercice 58. *Soient les vecteurs $\vec{a} = \binom{2}{-1/2}$ et $\vec{b} = \binom{-4}{-3}$.*

a) Calculez les normes suivantes.

a) $\|\vec{a}\|$ *b)* $\|3\vec{b}\|$ *c)* $\|\vec{a} - \vec{b}\|$ *d)* $\|-\frac{3}{2}\,\vec{a}\|$

b) Déterminez les composantes d'un vecteur parallèle à $\vec{b}$ qui est de norme 10.

* **Exercice 59.**
Dans une base orthonormée $\{\overrightarrow{e_1; e_2}\}$, nous donnons les vecteurs

$$\vec{a} = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}\ ,\ \vec{b} = -2\overrightarrow{e_1}\ \text{ et }\ \vec{d} = -8\overrightarrow{e_1} + 15\overrightarrow{e_2}.$$

a) Calculez la norme de ces vecteurs.

b) Calculez $\|\vec{a} + \vec{b}\,\|$ et $\|\vec{a} + \vec{c}\,\|$.

Exercice 60.

a) Calculez la distance du point $R(-7;6)$ au point $S(5;1)$.

b) Déterminez b_1 pour que la distance séparant les points $A(-2;1)$ et $B(b_1;-3)$ soit $\sqrt{65}$.

c) Trouvez le vecteur unité ayant la direction et le sens de $\vec{a} = \binom{3}{-4}$.

Exercice 61. *Soient les vecteurs* $\vec{a} = \binom{3}{-2}$ *et* $\vec{b} = \binom{4}{3}$.

a) Calculez $\vec{a} \bullet \vec{b}$, $\vec{a} \bullet \vec{a}$ *et* $\vec{b} \bullet \vec{b}$.

b) Quel est l'angle entre $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *?*

Exercice 62. *Calculez la mesure de chacun des côtés et des angles du triangle* ABC *avec* $A(-3; 15)$, $B(-18; -2)$ *et* $C(10; 7)$.

Exercice 63. *Déterminez l'angle entre les droites* $d_1 : 5x - 2y + 8 = 0$ *et* $d_2 : 3y = 4x - 1$.

Exercice 64. *Parmi les quatre vecteurs suivants, déterminez les paires de vecteurs orthogonaux.*

$$\vec{a} = \binom{\frac{1}{2}}{-1} \qquad \vec{b} = \binom{3}{4} \qquad \vec{c} = \binom{-2}{\frac{3}{2}} \qquad \vec{d} = \binom{4}{2}$$

Exercice 65. *Soit le vecteur* $\vec{a} = 3\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2}$.

a) Trouvez un vecteur orthogonal à $\vec{a}$.

b) Trouvez un vecteur unité orthogonal à $\vec{a}$.

c) Trouvez un vecteur de norme 7 orthogonal à $\vec{a}$.

* **Exercice 66.**

a) Trouvez quelques vecteurs orthogonaux au vecteur $\vec{v} = \binom{2}{5}$.

b) Trouvez les vecteurs unités orthogonaux à $\vec{t} = \binom{2}{1}$.

Exercice 67. *Soient les points* $A(-2; -4)$, $B(7; -1)$, $C(5; 5)$ *et* $D(-4; 2)$.

a) Prouvez que $ABCD$ *est un rectangle.*

b) Quelle est l'aire de ce rectangle ?

Exercice 68. *Soient* $A(a_1; 2)$, $B(3; 4)$ *et* $C(1; -2)$ *trois points du plan.*

Déterminez a_1 *pour que le triangle* ABC *soit rectangle en* A.

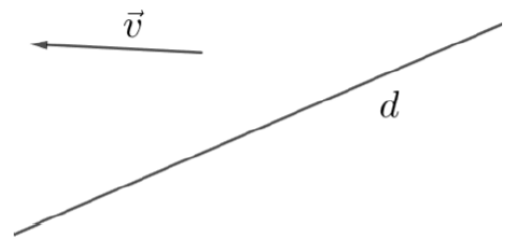
Exercice 69. *Soient les points* $A(3;-2)$ *et* $B(5;-4,5)$ *ainsi que la droite* d *d'équation cartésienne* $x+2y-8=0$.

Calculez la mesure du segment $A'B'$*, projection orthogonale de* AB *sur la droite* d.

Exercice 70. *Le vecteur* $\vec{v}$ *fait un angle de* $30°$ *avec la droite* d *et sa longueur est* $\|\vec{v}\|=4$.

a) *Dessinez le vecteur* $\vec{v}\,'$*, projection orthogonale de* $\vec{v}$ *sur* d.

b) *Quelle est la longueur de* $\vec{v}\,'$ *?*



Exercice 71. *Dans une base orthonormée* $\{\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2}\}$*, nous donnons les vecteurs* $\vec{a}=5\overrightarrow{e_1}-12\overrightarrow{e_2}$ *et* $\vec{b}=6\overrightarrow{e_1}+8\overrightarrow{e_2}$.

Déterminez la norme des vecteurs $\vec{a'}$ *et* $\vec{b'}$ *qui sont respectivement la projection orthogonale de* $\vec{a}$ *sur* $\vec{b}$ *et la projection orthogonale de* $\vec{b}$ *sur* $\vec{a}$.

Exercice 72. *Soit les vecteurs* $\vec{a}=5\overrightarrow{e_1}-12\overrightarrow{e_2}$, $\vec{u}=\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\,\|}$, $\vec{b}=3\overrightarrow{e_1}+4\overrightarrow{e_2}$ *et* $\vec{v}=\dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\,\|}$.

Déterminez par calcul le vecteur $\vec{c}$ *tel que* $\vec{u}\cdot\vec{c}=6$ *et* $\vec{v}\cdot\vec{c}=-1$.

Exercice 73.

a) *Trouvez l'équation de la médiatrice du segment* AB*, où* $A(-4;-2)$ *et* $B(8;4)$.

*b) *Idem avec les points* $A(-5;-4)$ *et* $B(3;2)$.

Exercice 74. *Soit le triangle de sommets* $A(-5;4)$, $B(-3;-10)$ *et* $C(3;8)$. *Déterminez par dessin puis par calcul, le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle* ABC.

Exercice 75.

a) *Soit d la droite d'équation cartésienne* $3x-4y+1=0$. *Déterminez l'équation cartésienne de la droite* d' *perpendiculaire à* d *passant par le point* $A(1;-2)$.

*b) *Même question avec* d : $y=-2x+5$ *et* $A(3;-1)$.

Exercice 76. *Soient les points* $A(1;3)$ *et* $B(8;4)$.

a) *Déterminez les coordonnées de la projection orthogonale* B' *de* B *sur la droite* d *passant par* O *et* A.

b) *Trouvez le symétrique* S *de* B *par rapport à la droite* d.

Exercice 77. *Soient les points* $A(-3;1)$, $B(7;1)$ *et* $C(4;4)$.

a) *Déterminez l'équation de la hauteur du triangle* ABC *issue du sommet* A.

*b) *déterminer les équations des autres hauteurs ainsi que l'aire du triangle* ABC.

* **Exercice 78.** *Soit le triangle de sommets* $A(6;0)$, $B(-2;0)$ *et* $C(0;4)$.

Déterminez les équations cartésiennes des hauteurs du triangle et calculez les coordonnées de l'orthocentre du triangle.

Exercice 79.

a) *Soient les points* $A(1;6)$ *et* $B(7;3)$. *Trouvez le point* C *de l'axe* Ox *tel que* ABC *soit un triangle rectangle d'hypoténuse* BC.

b) *Soient les points* $A(-3;3)$ *et* $B(2;0)$. *Calculez les coordonnées du point* C *de l'axe* Oy *tel que le triangle* ABC *soit isocèle en* C.

* *Dans chaque cas, calculez les angles du triangle* ABC.

* **Exercice 80.** *Soient* $A(-2;0)$ *et* $C(5;-2)$.

Déterminez les points B *et* D *tels que* $ABCD$ *soit un carré.*

* **Exercice 81.** *Soit la droite* d *passant par* $A(-4;1)$ *et perpendiculaire à* $\vec{n} = \binom{1}{2}$.

Déterminez la projection orthogonale P' *du point* $P(5;4)$ *sur la droite* d.

Exercice 82. *Calculez la distance de l'origine* O, *puis du point* $M(3;2)$, *à la droite*

$$d : 3x + 4y - 12 = 0$$

Exercice 83. *Calculez la distance du point* $P(-1;2)$ *à la droite* $d : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 4+4\lambda \\ y & = & 2+3\lambda \end{array} \right.$.

Exercice 84. *Soit le triangle de sommets* $A(-1;-1)$, $B(4;1)$ *et* $C(-2;-5)$.

Calculez la distance de C *au côté* AB*, puis l'aire du triangle.*

* **Exercice 85.** *Soient le point* $A(2;6)$ *et la droite* $d : 3x+5y-2=0$.

a) Trouvez les coordonnées du point B *qui est la projection orthogonale de* A *sur la droite* d.

b) Déterminez la distance de d *à* A.

c) Trouvez les coordonnées du point S *qui est l'image de* A *par une symétrie axiale d'axe* d.

* **Exercice 86.** *Trouvez la distance depuis l'origine jusqu'aux droites suivantes :*

a) La droite a *passant par* $A(1;4)$ *et qui est parallèle à* $15\overrightarrow{e_1} - 8\overrightarrow{e_2}$.

b) La droite b *d'équation* $x+y+1=0$.

c) La droite c *passant par* $B(4;-11)$ *et* $C(-3;13)$.

Exercice 87. *Déterminez les bissectrices de l'angle formé par les droites* $d_1 : 2x + y = 0$ *et* $d_2 : x + 2y + 6 = 0$.

Exercice 88. *Trouvez les équations des droites parallèles à* $3\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2}$ *et dont la distance jusqu'au point* $A(-6; 2)$ *vaut 6.*

Exercice 89. *Trouvez les équations des droites situées à la distance 3 de la droite* d *d'équation*

$$7x - 24y - 8 = 0$$

Exercice 90. *Déterminez les points de l'axe* Ox *situés à distance 2 de la droite*

$$d : 12x - 5y + 30 = 0$$

Exercice 91. *Soient les points* $P(-1; -1)$ *et* $Q(7; 3)$ *et la droite* $d : 3x - y - 3 = 0$.

Trouvez le point R *de* d *tel que*

a) PQR *soit un triangle isocèle (en* R*).*

b) PQR *soit un triangle rectangle en* Q.

* **Exercice 92.** *Soient les points* $D(3; -2)$ *et* $E(4; 5)$*, ainsi que la droite* $d : x - 2y - 3 = 0$.

Trouvez le(s) point(s) F *de* d *tel que le triangle* DEF *soit rectangle en* F.

* **Exercice 93.**

D'un triangle ABC*, nous connaissons* $A(0; -6)$*, la médiane* $m_C : 17x + 6y - 64 = 0$ *passant par* C *ainsi que la hauteur* $h_C : 2x + y - 9 = 0$ *passant par* C.

Trouvez les sommets B *et* C *du triangle.*

Exercice 94. *Calculez la distance minimum entre les droites* d_1 *et* d_2 *dans chacun des cas suivants :*

a) $d_1 : 12x + 5y - 9 = 0$ *et* $d_2 : 24x + 10y + 30 = 0$

b) $d_1 : x - 2y + 4 = 0$ *et* $d_2 : y = -x - 12$

c) $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3 + \lambda \end{cases}$ *et* $d_2 : \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \end{cases}$

Exercice 95.

a) Donnez l'équation du cercle $\mathcal{C}$ centrée en $C(-3;5)$ et de rayon 6.

b) Décrivez les ensembles suivants :

$A = \{P(x;y)\,:\, x^2 + y^2 - 1 = 0\} \quad B = \{P(x;y)\,:\, (x-1)^2 + (y+2)^2 - 4 = 0\}$
$C = \{P(x;y)\,:\, (x-3)^2 + y^2 + 2 = 0\}$

Exercice 96. *Soit le cercle $\mathcal{C}$: $(x+3)^2 + (y-5)^2 - 225 = 0$.*

Donnez le centre et le rayon de $\mathcal{C}$, puis trouvez les points de $\mathcal{C}$ dont :

a) l'abscisse vaut 2, *b) l'ordonnée vaut 5,* *c) l'ordonnée vaut -15.*

Exercice 97. *Déterminez l'équation du cercle...*

a) ...de diamètre BC, avec $B(-2;5)$ et $C(8;1)$.
b) ...passant par les points $D(1;-2)$, $E(4;-1)$ et $F(8;-3)$.
c) ...passant par $G(-2;1)$ et $H(8;3)$ et dont le centre est sur l'axe Oy.
**d) ...passant par $I(2;3)$ et $J(4;5)$ et dont le centre se trouve sur la droite $d : 3x+4y-18=0$.*

Exercice 98. *Trouvez, si possible, le centre et le rayon des cercles donnés par les équations suivantes :*

$\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 = 0$

$\mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 + 4x + 6y + 14 = 0$

$\mathscr{C}_3 : x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$

$\mathscr{C}_4 : x^2 + y^2 + 10x - 2y - 10 = 0$

$\mathscr{C}_5 : x^2 + y^2 - 4x + 6y + 18 = 0$

$\mathscr{C}_6 : 4x^2 + 4y^2 - 12x + 28y + 50 = 0$

* **Exercice 99.** *Même exercice :*

a) $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 14x - 2y - 1246 = 0$

b) $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + 10x + 14y + 25 = 0$

c) $\mathcal{C}_3 : x^2 + y^2 + 5x - 3y + 8 = 0$

d) $\mathcal{C}_4 : 3x^2 + 3y^2 + 7x - 10 = 0$

***Exercice 100.** *Donnez l'équation du cercle $\mathcal{C}$ passant par les points $A(-3;-1)$, $B(4;-2)$ et $C(1;7)$.*

***Exercice 101.** *Soient les points $A(-1;0)$ et $B(1;0)$.*

Établissez l'équation de l'ensemble des points $P(x;y)$ du plan tels que $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$.

Exercice 102. *Déterminez la position relative des points $A(-1;2)$, $B(2,9;0,1)$, $C(6,5;1,5)$, $D(3;0)$ et du cercle $\mathcal{C}$ de centre $M(3;5)$ et de rayon 5.*

Exercice 103. *Soit le cercle $\mathcal{C} : (x-9)^2 + (y+3)^2 = 18$ et la droite $d : x + y - 4 = 0$.*

a) Calculez la distance de d au centre du cercle et en déduire la position relative de la droite et du cercle.

**b) Déterminez la longueur de la corde AB sans calculer les coordonnées des points A et B.*

Exercice 104. *Soit le cercle $\mathscr{C} : (x-6)^2 + (y-3)^2 - 25 = 0$.*

Trouvez les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et

a) des axes Ox et Oy ;

b) de $d : x - 2y + 5 = 0$;

c) de $d' : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 + 4\lambda \\ y & = & 4 + 3\lambda \end{array} \right.$.

Exercice 105. *Trouvez les points de $d : x - 2y + 8 = 0$ situés à distance 4 de l'origine.*

Exercice 106. *Déterminez l'équation du cercle de centre $M(-5;2)$ passant par $A(-1;5)$. Puis trouvez l'équation de la tangente t au cercle en A.*

Exercice 107. *Établissez l'équation du cercle de centre $M(3;1)$ et tangent à la droite*

$$t : x + y + 2 = 0$$

Exercice 108. *Trouvez les cercles de rayon 4 tangents à $t : 12x - 5y - 4 = 0$ en $T(?;4)$.*

****Exercice 109.** *Soit le cercle $\mathcal{C} : (x+5)^2 + (y-2)^2 = 25$.*

Déterminez par calcul les équations des tangentes au cercle en A et B, où A et B sont les deux points du cercle dont l'abscisse vaut -2.

Exercice 110. *Déterminez les équations des droites qui sont tangentes au cercle*

$$\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y+5)^2 - 17 = 0$$

et qui sont parallèles à la droite $d : x - 4y + 10 = 0$.

Déterminez également les points de contact.

****Exercice 111.** *Déterminez l'équation du cercle $\mathscr{C}$ tangent à $t : 3x + 2y - 7 = 0$ en $T(1;?)$, et passant par $A(-4;-3)$.*

****Exercice 112.** *Trouvez les tangentes à $\mathscr{C} : (x+2)^2 + (y+2)^2 - 40 = 0$ qui sont parallèles à $d : 3x + y - 22 = 0$.*

****Exercice 113.** *Dans chacun des cas ci-dessous, déterminez l'équation cartésienne de la (des) tangente(s) au cercle $\mathscr{C}$ au(x) point(s) d'abscisse 6.*

a) $\mathscr{C} : (x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$ *b)* $\mathscr{C} : (x-7)^2 + (y-2)^2 = 1$

Exercice 114. *Soient les droites* $a : 2x - y + 11 = 0$ *et* $b : 2x - y + 1 = 0$ *qui portent deux côtés d'un rectangle. Une des diagonales du rectangle a pour équation* $y = 3$.

a) Trouvez, par dessin puis par calcul, les sommets du rectangle.

b) Calculez l'aire du rectangle.

Exercice 115. *Un rectangle* $ABCD$ *est donné par les renseignements suivants :*

- $\star$ $D(-3; 6)$;
- $\star$ *Son aire vaut 150 ;*
- $\star$ $d_{AB} : 3x + 4y + 35 = 0$;
- $\star$ *L'ordonnée de* B *est négative.*

Construisez le rectangle et calculez les coordonnées des trois sommets inconnus.

Exercice 116. *Un losange* $ABCD$ *est donné par les trois droites suivantes :*

$$d_{AD} : y - 4 = 0\,,\; d_{AC} : x + 3y - 7 = 0 \;\text{ et }\; d_{BC} : y + 2 = 0$$

Trouvez, par dessin puis par calcul, les sommets du losange.

Exercice 117. *Dans un repère orthonormé* $(O; \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\})$, *nous considérons la droite* $d_1 : y = 3x$, *la droite* $d_2 : x + 3y - 30 = 0$, *le cercle* $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 10x - 10y + 40 = 0$ *et le point* A, *point de tangence entre* d_1 *et* $\mathscr{C}$.

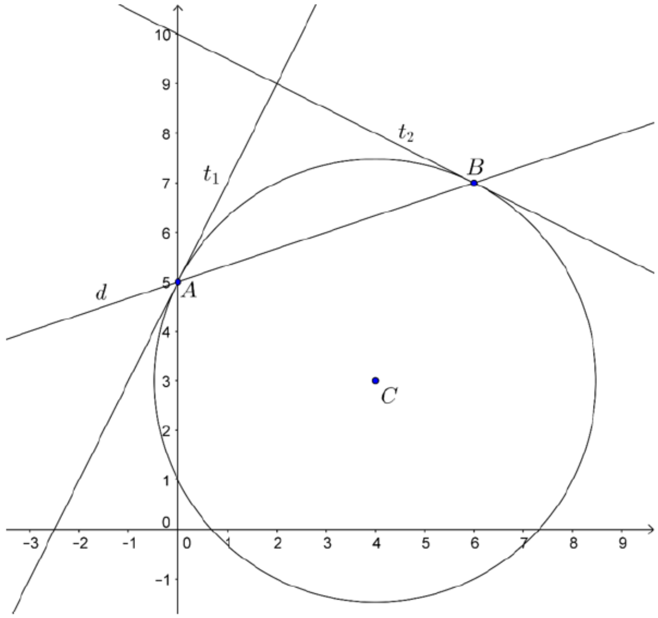
a) Prouvez que les droites d_1 *et* d_2 *sont perpendiculaires.*

b) Calculez les coordonnées du point A.

c) Prouvez par calcul que $\mathscr{C}$ *a pour centre* $M(5; 5)$ *et pour rayon* $r = \sqrt{10}$.

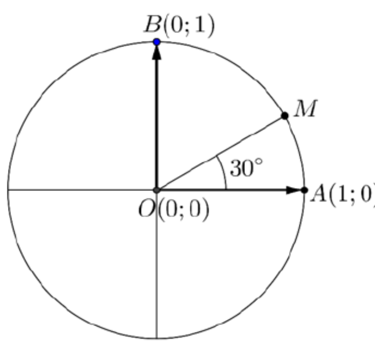
d) Montrez par calcul que $B(6; 2)$ *appartient à* $\mathscr{C}$, *puis déterminez l'équation de la tangente à* $\mathscr{C}$ *en* B.

Exercice 118. *Le cercle* $\mathcal{C} : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 20$ *et la droite* $d : x - 3y + 15 = 0$ *se coupent en deux points* A *et* B*.*



Trouvez, par calcul, les équations des tangentes au cercle en A *et en* B*.*

Exercice 119. *Soit le cercle centré à l'origine et de rayon égal à 1. Ce cercle passe par les points* $A(1;0)$ *et* $B(0;1)$*.*



a) *Donnez l'équation de ce cercle et calculer son périmètre.*

b) *Déterminez les points du cercle dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.*

c) *Déterminez le point* M *du cercle tel que l'angle* AOM *soit de* 30° *.*

d) *Calculez la longueur de l'arc de cercle le plus court reliant les points* $A(1;0)$ *et* $B(0;1)$*.*

e) *Calculez la longueur de l'arc de cercle le plus court reliant les points* $A(1;0)$ *et* M*.*

Exercice 120. *Soit l'ellipse définit par ses foyers* $F_1(-3;0), F_2(3;0)$ *et l'une de ses intersections avec l'axe* Ox *:* $A(5;0)$.

a) Déterminez une équation cartésienne de cette ellipse en vous aidant de la définition.

b) Déterminez ses intersections avec l'axe Oy.

Soit l'ellipse de foyer $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ *et d'intersections avec les axes de référence* $(\pm a;0), (0;\pm b)$.

c) Établissez une relation entre a, b *et* c *puis déduisez une équation cartésienne de l'ellipse en vous aidant des points a) et b).*

Exercice 121. *Déterminez une équation cartésienne de l'hyperbole en fonction de* a *et* b, *puis déterminez ses intersections avec l'axe* Ox.

Exercice 122.

a) Déterminez une équation cartésienne d'une parabole pour laquelle le foyer est le point $F(0;1)$ *et la directrice la droite* $d: y = 1$.

b) Idem avec $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ *et* $d: x = -\frac{p}{2}$.

Exercice 123. *Déterminez le type de chacune des coniques suivantes, puis en fonction de son type, déterminez ses foyers, ses intersections avec les axes, ses asymptotes et sa droite directrice.*

a) $y^2 + 2x = 0$	*b)* $4x^2 - 25y^2 = 121$	*c)* $64x^2 + 100y^2 = 6400$
d) $25x^2 - 144y^2 = 3600$	*e)* $4x^2 + 49y^2 = 225$	*f)* $xy = 16$
g) $y^2 - 8x + 6y + 17 = 0$	*h)* $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 1 = 0$	*i)* $25y^2 - 9x^2 + 54x + 50y + 169 = 0$
j) $y = 3x^2 + 4x + 5$	*k)* $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$	*l)* $y = ax^2 + bx + c$