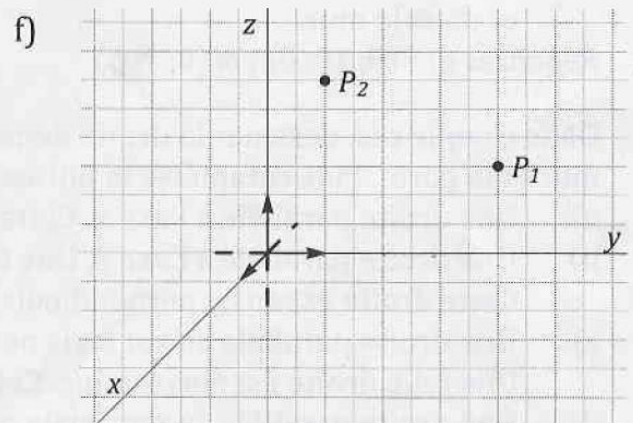
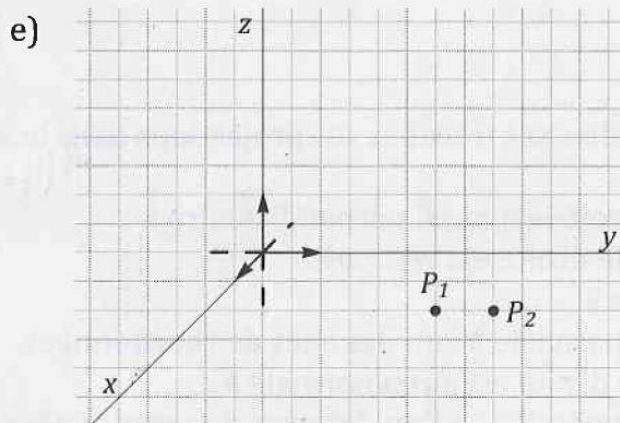
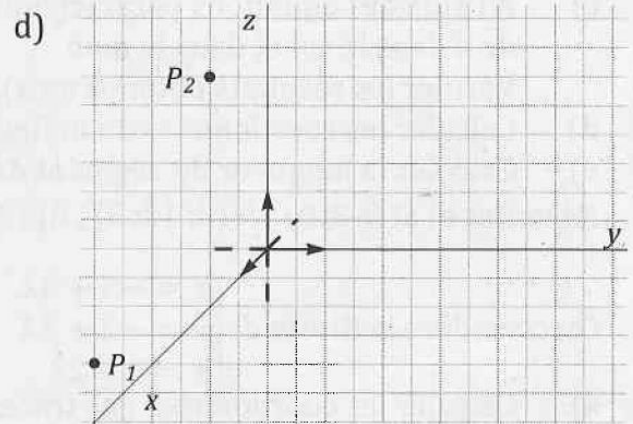
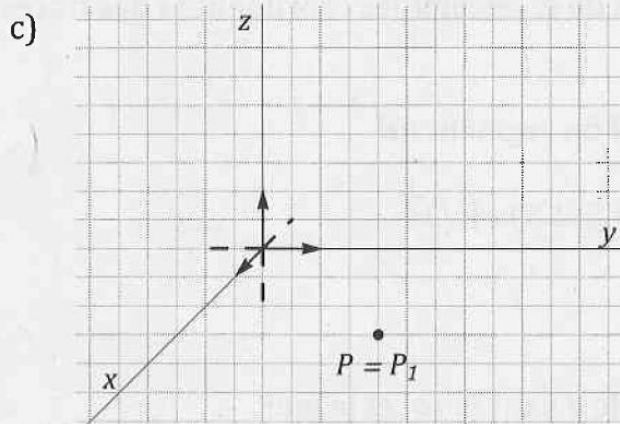
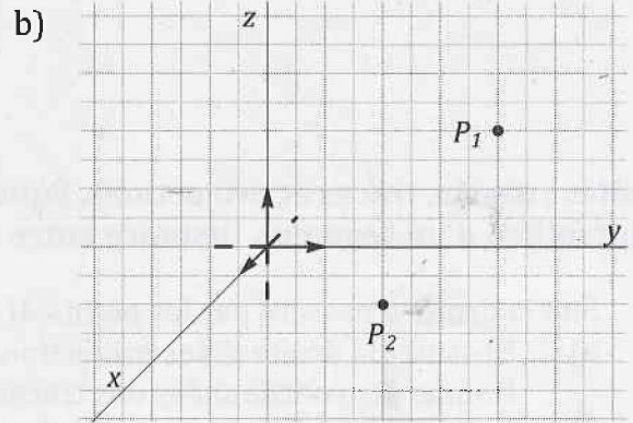
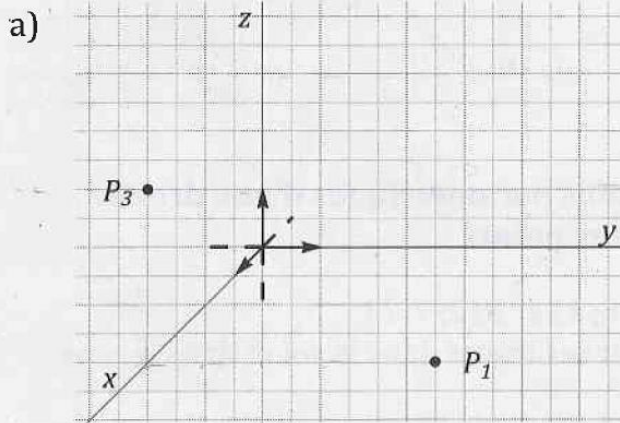


# LDDR – Niveau I : Géométrie 3D

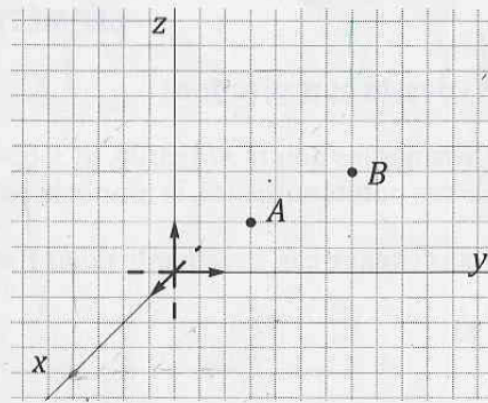
## GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

### Points : dessin et projections

1. Dessiner les points  $A(1; 3; 2)$ ,  $B(3; 6; -1)$  et  $C(5; -2; 3)$ , ainsi que les projections de ces points sur le sol, le mur et la paroi.
2. Dans chaque cas, dessiner le point  $P$  et trouver ses coordonnées.



3. Trouver les coordonnées des points  $A(\dots; 2; \dots)$  et  $B(b; \dots; b)$ .



**Droites : dessin, traces et projections. Équations paramétriques d'une droite. Point milieu d'un segment. Distance entre deux points**

4. Soit la droite  $d$  passant par les points  $A(4; 6; 1)$  et  $B(2; 9; 2)$ .
- Dessiner la droite  $d$ , ses projections et ses traces dans le sol et dans le mur. Donner les coordonnées des traces.
  - Écrire des équations paramétriques de  $d$ .
  - A l'aide des équations paramétriques de  $d$ , calculer les coordonnées des traces de  $d$  dans le sol et dans le mur. Vérifier les résultats obtenus en a).
  - Calculer les coordonnées du milieu  $M$  du segment  $AB$
  - Calculer la longueur du segment  $AB$ .

Réponses a)  $S(6; 3; 0)$ ,  $M(0; 12; 3)$ , d)  $(3; 7.5; 1.5)$  e)  $\sqrt{14}$

5. On considère la droite  $d$ : 
$$\begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 8 - 2\lambda \end{cases}$$
- Calculer les coordonnées des traces de  $d$  dans le sol et le mur.
  - Dessiner les traces de  $d$ , puis la droite  $d$  et ses projections dans le sol et dans le mur.

Réponses a)  $S(9; 10; 0)$ ,  $M(0; 1; 6)$

6. Dans chaque cas, dessiner la droite demandée, ses traces et ses projections dans le sol, le mur et la paroi. Puis compléter la phrase.
- Une droite parallèle à l'axe  $x$ . Cette droite est aussi perpendiculaire à ...
  - Une droite parallèle à l'axe  $z$ . Une telle droite est *verticale*. Cette droite est aussi perpendiculaire à ...
  - Une droite parallèle au sol mais non parallèle à l'un des axes de coordonnées. Une telle droite est *horizontale*. Cette droite est aussi normale à ...
  - Une droite parallèle au mur mais non parallèle à l'un des axes de coordonnées. Cette droite est aussi normale à ...

7. Soit  $d$  la droite passant par les points  $A(-2; 5; 1)$  et  $B(6; 4; 5)$ . Trouver un point  $P$  sur  $d$  tel que la distance de  $A$  à  $P$  soit égale à 27.

Réponse  $(22; 2; 13)$  ou  $P(-26; 8; -11)$

8. Considérons les points  $A(15; -28; 28)$ ,  $B(7; 18; -9)$  et  $C(x; 0; 0)$ .

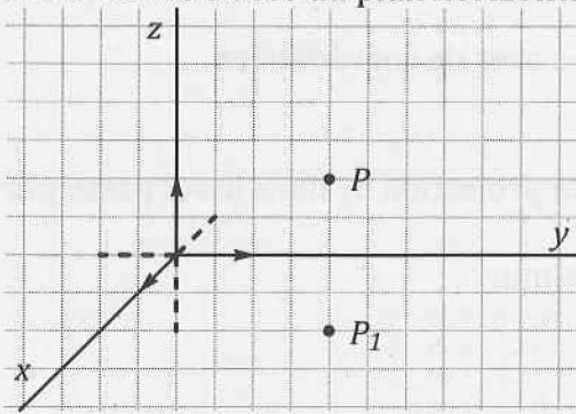
Trouver  $x$  tel que  $\|\overrightarrow{AC}\| = 2 \cdot \|\overrightarrow{BC}\|$

Réponse  $x = 1$  ou  $x = 23/3$

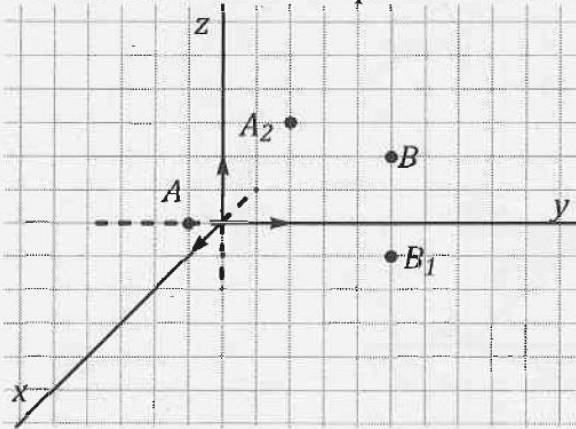
## Plans : dessin et traces. Points et droites d'un plan

9. On donne un plan  $\pi$  par ses intersections avec les axes de coordonnées  $A(6; 0; 0)$ ,  $B(0; 6; 0)$  et  $C(0; 0; 6)$ .
- Dessiner les traces de  $\pi$ .
  - La droite  $d$  est contenue dans le plan  $\pi$  et sa projection  $d_1$  dans le sol passe par les points  $(4; 7; 0)$  et  $(-2; -2; 0)$   
Dessiner la droite  $d$  et sa projection dans le mur.
10. On donne un plan  $\pi$  par ses intersections avec les axes de coordonnées  $A(6; 0; 0)$ ,  $B(0; 6; 0)$  et  $C(0; 0; 4)$ . Dessiner les traces de  $\pi$ .  
Puis dessiner une droite horizontale  $h$  contenue dans  $\pi$  et la projection de  $h$  sur le sol.
11. Dans chaque cas, dessiner les traces du plan demandé. Puis compléter la phrase.
- Un plan parallèle au sol. Un tel plan est *horizontal*.  
Ce plan est aussi perpendiculaire à ....
  - Un plan parallèle au mur. Ce plan est aussi perpendiculaire à ....
  - Un plan parallèle à l'axe  $x$ , mais ni parallèle au sol ni au mur.  
Ce plan est aussi perpendiculaire à ....
  - Un plan parallèle à l'axe  $z$ , mais ni parallèle au mur ni à la paroi.  
Un plan parallèle à l'axe  $z$  est *vertical*.  
Ce plan est aussi perpendiculaire à .....

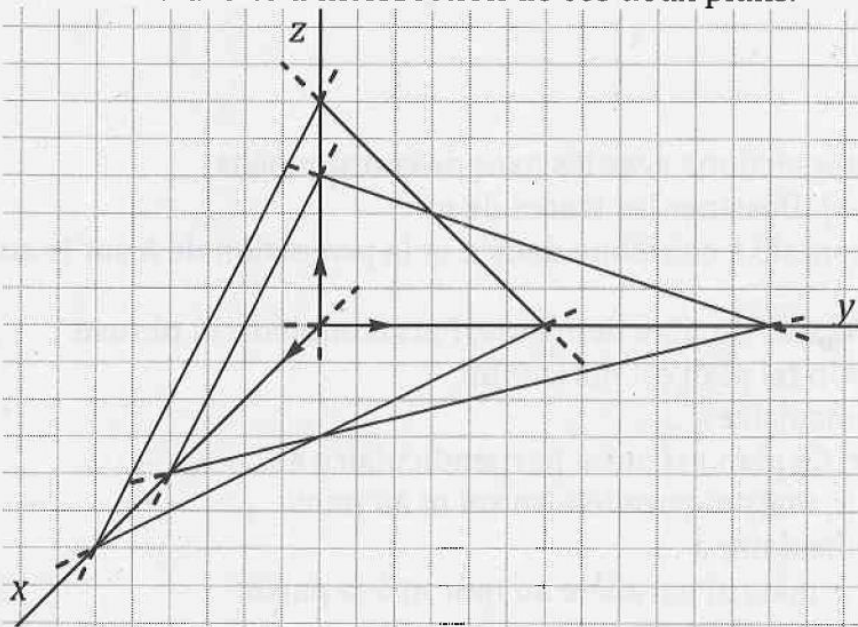
12. Dessiner les traces du plan horizontal contenant le point  $P$  donné.



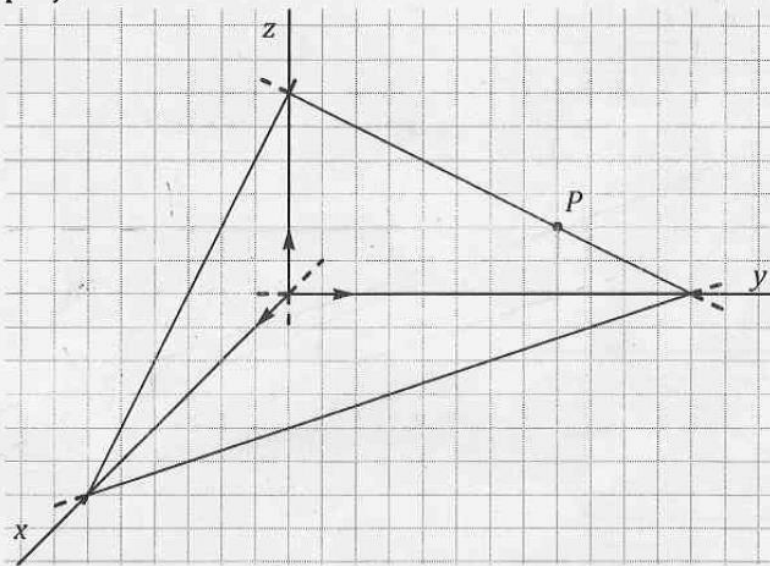
13. Dessiner les traces du plan vertical contenant les points  $A$  et  $B$ .



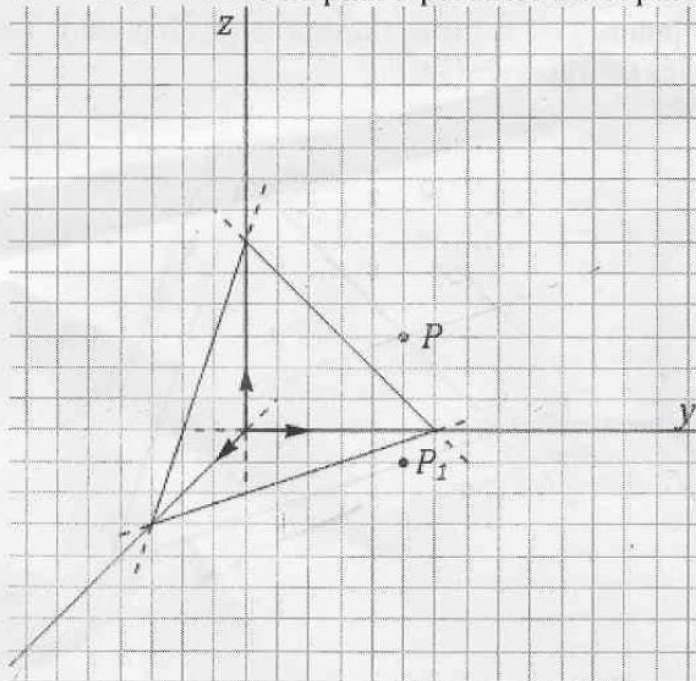
14. On donne deux plans  $\alpha$  et  $\beta$  par leurs traces. Dessiner la droite d'intersection de ces deux plans.



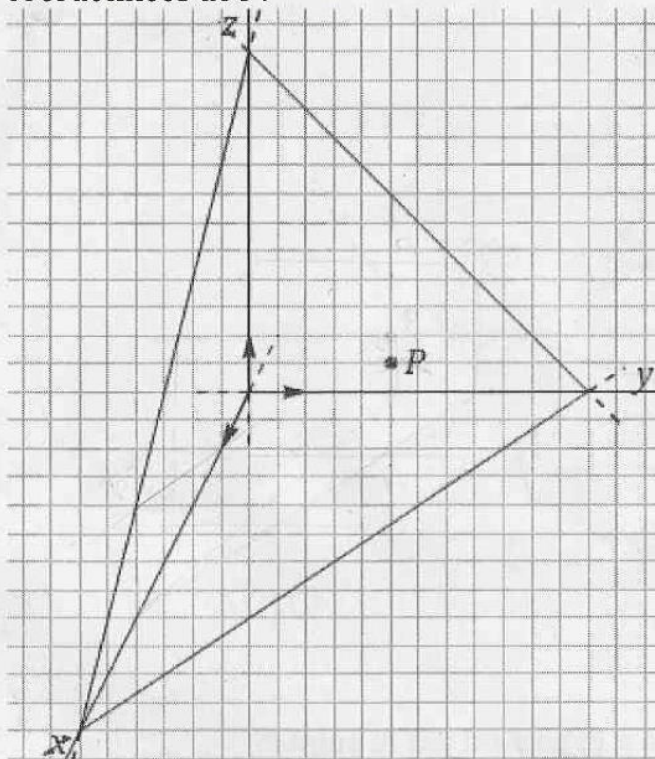
15. Un plan  $\pi$  est donné par ses traces. Le point  $P$  appartient à la trace de  $\pi$  dans le mur. Dessiner la droite horizontale  $h$  contenue dans  $\pi$  et passant par  $P$ . Dessiner aussi la projection de  $h$  dans le sol.



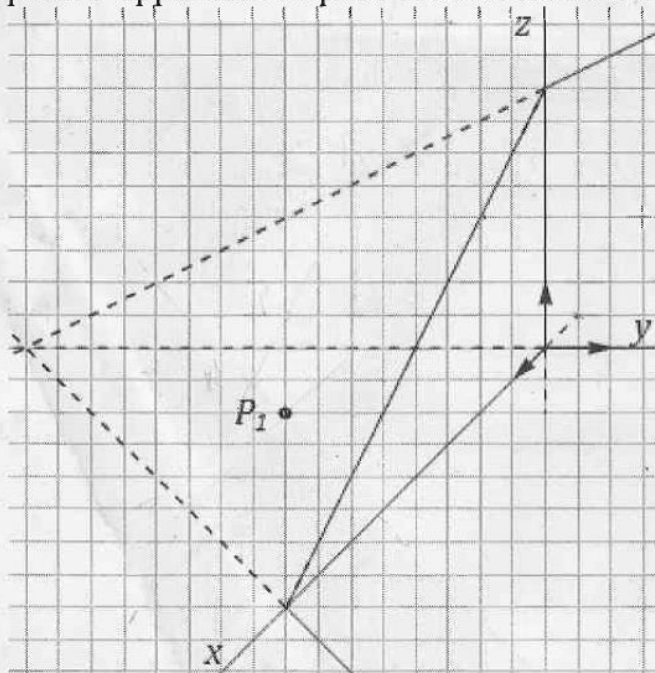
16. Un plan  $\pi$  est donné par ses traces. Dessiner les traces du plan  $\sigma$  parallèle à  $\pi$  et passant par le point  $P$ .



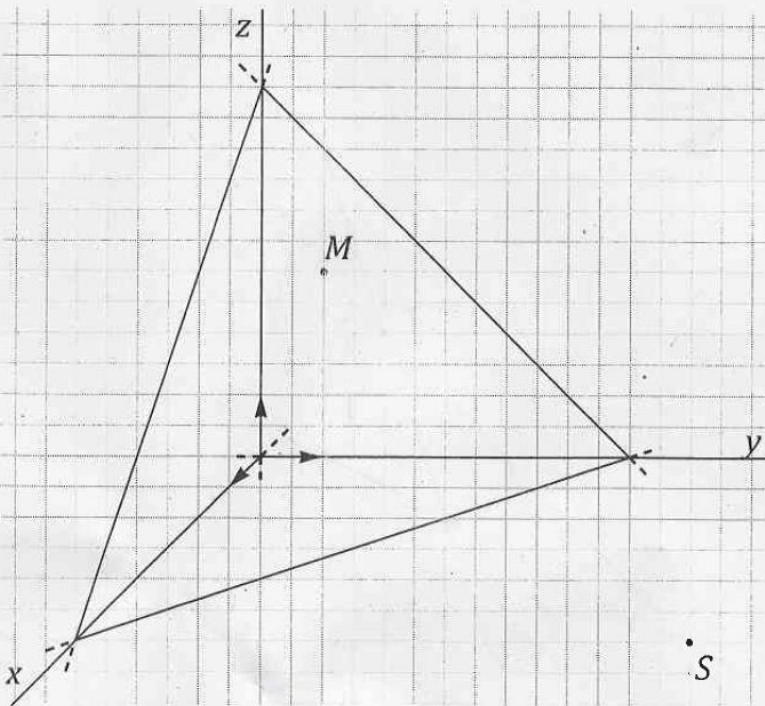
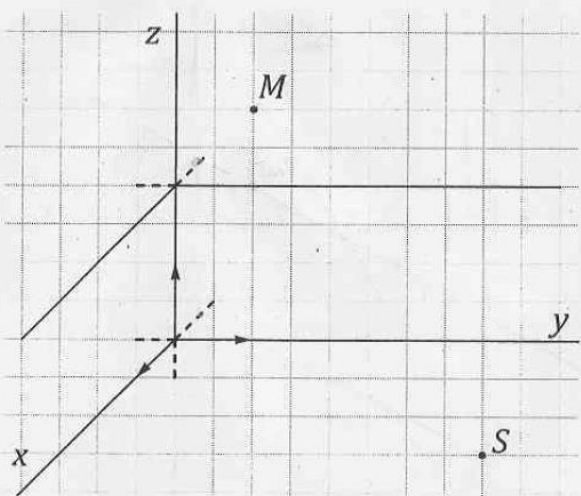
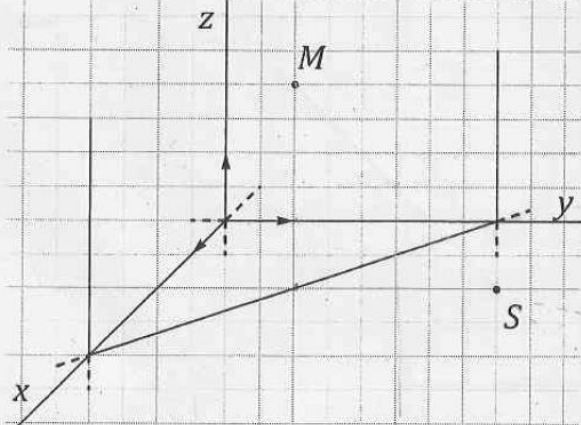
17. Un plan est donné par ses traces. Le point  $P$  appartient au plan. Trouver les coordonnées de  $P$ .



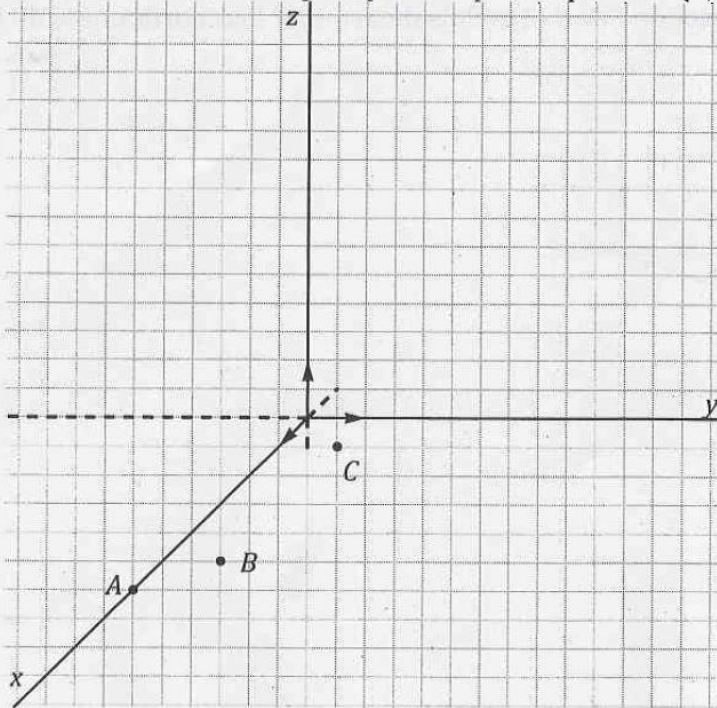
18. Un plan est donné par ses traces. Le point  $P_1$  est la projection sur le sol du point  $P$ . Le point  $P$  appartient au plan. Trouver les coordonnées de  $P$ .



19. On donne un plan  $\pi$  par ses traces et une droite  $d$  par ses traces  $S$  et  $M$  dans le sol et le mur. Dessiner le point d'intersection  $I$  de  $d$  et  $\pi$ . Puis déterminer les coordonnées de  $I$ .



20. Dessiner les traces du plan passant par les points  $A(6; 0; 0)$ ,  $B(5; 1; 0)$  et  $C(3; 2; 1)$ .



## Produit scalaire

21. Considérons les points  $A(5; -3; 8)$ ,  $B(1; 7; 2)$  et  $C(-3; 2; 5)$ . Calculer l'angle au sommet  $B$  dans le triangle  $ABC$ .

Réponse  $\beta = 53.3817 \dots^\circ$

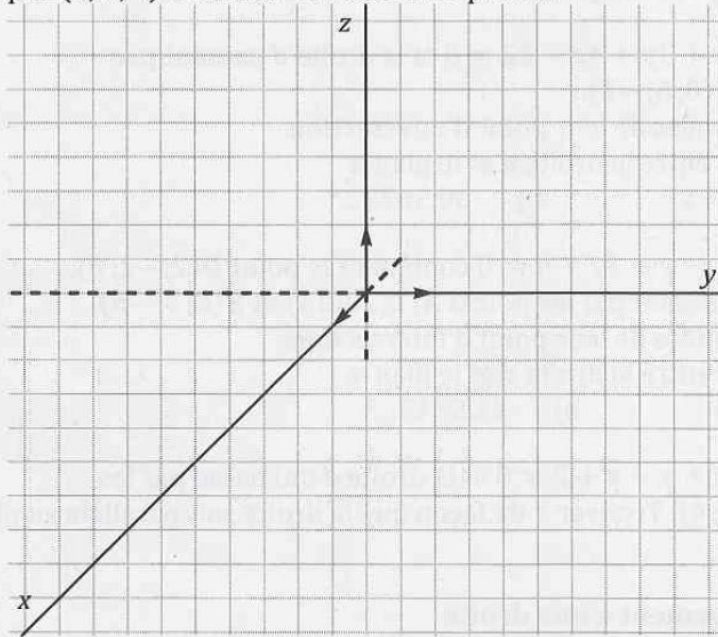
22. Considérons les points  $A(2; 5; 0)$  et  $B(-2; 2; k)$ .

Trouver  $k$  tel que l'angle en  $A$  dans le triangle  $OAB$  soit égal à  $60^\circ$ .

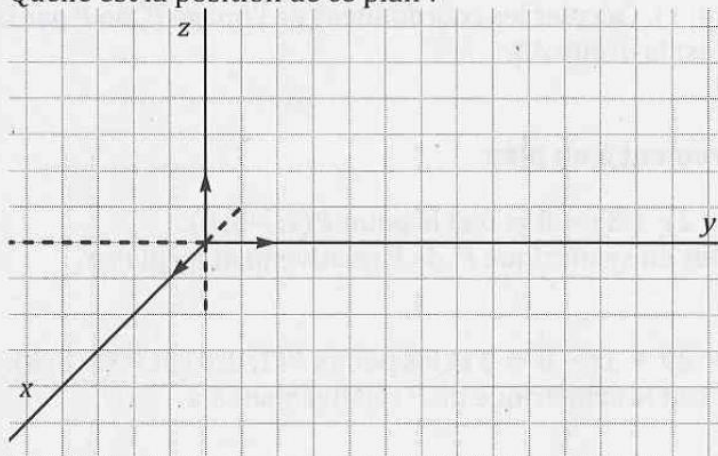
Réponse  $k = \pm 6.9257 \dots$

## Équation cartésienne d'un plan

23. a) Trouver une équation cartésienne du plan  $\pi$  normal à  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$  et passant par  $(1; 2; 4)$ . Dessiner les traces du plan  $\pi$ .



b) Représenter le plan  $\pi$  d'équation  $2x + y - 6 = 0$ . Quelle est la position de ce plan ?



c) Trouver une équation cartésienne du plan passant par les points  $A(1; -3; 4)$ ,  $B(5; 2; 4)$  et  $C(3; -5; 4)$ .

d) Considérons le plan  $\pi: 2x + 5z - 10 = 0$ . Ce plan est-il normal à la paroi ? normal à l'axe  $Ox$  ?

24. Déterminer une équation cartésienne du plan qui passe par le point  $P(3; 1; 1)$  et qui est perpendiculaire à la droite passant par les points  $A(1; 0; 5)$  et  $B(3; -3; 8)$ .  
*Réponse*  $\pi: 2x - 3y + 3z - 6 = 0$
25. Soit le point  $A(2; 5; 4)$ . Trouver une équation cartésienne  
 a) du plan horizontal contenant le point  $A$ .  
 b) du plan parallèle au mur et contenant le point  $A$ .
26. Considérons le plan  $\pi: x - 2y + 3z - 36 = 0$  et le point  $A(10; \dots; 4)$ .  
 a) Trouver l'ordonnée de  $A$  sachant que ce point est dans le plan  $\pi$ .  
 b) Trouver les deux points  $P$  dans le plan  $\pi$  tels que le segment  $AP$  soit parallèle au mur et que la longueur de ce segment soit égale à  $\sqrt{13}$ .  
*Réponse* a)  $-7$  b)  $P(10; -4; 6)$  et  $P(10; -10; 2)$

### Position relative d'une droite et d'un plan

27. On considère le plan  $\pi: 2x + 3y + 4z - 22 = 0$  et la droite  $d$  passant par les points  $A(2; 0; -3)$  et  $B(0; 5; -2)$ .  
 a) Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.  
 b) Calculer l'angle aigu entre la droite  $d$  et le plan  $\pi$   
*Réponse* a)  $(-2; 10; -1)$  b)  $30.5671\dots^\circ$
28. On considère le plan  $\pi: 2x - y + 3z + d = 0$  contenant le point  $D(2; -2; 0)$ . On considère la droite  $d$  passant par les points  $A(1; 20; 15)$  et  $B(6; 5; -5)$ .  
 a) Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.  
 b) Calculer l'angle aigu entre la droite  $d$  et le plan  $\pi$ .  
*Réponse* a)  $(4; 11; 3)$  b)  $21.5245\dots^\circ$
29. On considère le plan  $\alpha: 2x + y - z + 2 = 0$  et la droite  $d$  qui passe par les points  $A(3; k; 3)$  et  $B(4; 4; 4)$ . Trouver  $k$  de façon que la droite soit parallèle au plan.  
*Réponse*  $k = 5$

### Symétrique d'un point relativement à une droite

30. Considérons la droite passant par les points  $A(4; -4; 7)$  et  $B(-5; -1; -8)$ . Considérons le point  $P(5; 4; 1)$ . Calculer les coordonnées de l'image  $P'$  de  $P$  par la symétrie axiale dont l'axe est la droite  $AB$ .  
*Réponse*  $P'(-3; -10; 3)$

### Symétrique d'un point relativement à un plan

31. On considère le plan  $\pi: x - 2y + 3z - 8 = 0$  et le point  $P(2; -5; 8)$ . Déterminer les coordonnées du symétrique  $P'$  de  $P$  relativement au plan  $\pi$ .  
*Réponse*  $P'(-2; 3; -4)$
32. On considère le plan  $\pi: x - 2y + 3z - 8 = 0$  et les points  $P(1; 0; 0)$  et  $P'(5; 8; k)$ . Trouver  $k$  de façon que  $P'$  soit le symétrique de  $P$  relativement à  $\pi$ .  
*Réponse* impossible

## Indications

Exercices 33a et 34 faits vendredi 13 mars.

Exercice 35 indication : la distance d'un point (à choisir) de  $\pi$  au plan  $\sigma$  est connue. Appliquer la formule, l'inconnue n'est pas la distance mais le  $d$  de l'équation du plan  $\sigma$ .

Exercice 36 indication : Comme à l'exercice 35 avec un point général de la droite  $(-11 + 21\lambda; \dots; \dots)$

## Distance d'un point à un plan

33. On donne le plan  $\pi: 13x + 16y - 4z + 7 = 0$  et le point  $P(-4; -27; -9)$ .

a) Calculer la distance de  $P$  à  $\pi$ .

b) Calculer les coordonnées du point  $I$  de  $\pi$  le plus proche de  $P$ .

c) Vérifier que la distance de  $P$  à  $I$  est égale au résultat obtenu en a).

Réponses a) 21 b)  $I(9; -11; -13)$

34. Calculer la distance entre les deux plans parallèles  $\alpha: 3x + 12y - 4z - 18 = 0$  et  $\beta: 3x + 12y - 4z + 73 = 0$ .

Réponse 7

35. On considère le plan  $\pi: 4x - 3y + 12z - 36 = 0$ .

Trouver une équation cartésienne d'un plan  $\sigma$  parallèle à  $\pi$  et tel que la distance séparant  $\pi$  et  $\sigma$  soit égale à 5.

Réponse  $\sigma: 4x - 3y + 12z - 101 = 0$  ou  $\sigma: 4x - 3y + 12z + 29 = 0$

36. On considère le plan  $\pi: 12x - 3y - 4z + 12 = 0$  et la droite  $d$  passant par  $A(-11; 8; 3)$  et  $B(10; -4; -3)$ . Calculer les coordonnées des points de  $d$  situés à distance 4 de  $\pi$ .

Réponse  $P_1(3; 0; -1); P_2(-4; 4; 1)$

## Produit vectoriel

37. On donne les vecteurs  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$  et  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Calculer les produits vectoriels  $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ,  $\vec{b} \wedge \vec{a}$ ,  $\vec{a} \wedge \vec{c}$  and  $\vec{c} \wedge \vec{b}$ .

Réponses

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a}) = \begin{pmatrix} 14 \\ -31 \\ -32 \end{pmatrix}; \vec{a} \wedge \vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}; \vec{c} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -19 \\ -2 \end{pmatrix}$$

38. On considère les points  $A(3; 0; 6)$ ,  $B(6; -6; -4)$  et  $C(-2; -4; 4)$ .

a) Établir une équation cartésienne du plan  $\pi$  contenant les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

b) Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .

c) Trouver un vecteur directeur de la droite horizontale  $h$  passant par  $A$  et contenue dans le plan  $\pi$ .

Réponses a)  $2x - 4y + 3z - 24 = 0$  b)  $\sqrt{1421}$  c)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

39. La droite  $a$  passe par  $A(5; 1; 2)$  et la droite  $b$  passe par  $B(3; 9; 7)$ .

Les deux droites sont parallèles à  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

Trouver une équation cartésienne du plan contenant les deux droites.

Réponse  $15x + 5y - 2z - 76 = 0$

40. Déterminer des équations paramétriques de la droite  $d$  passant par le point  $(4; ?; 4)$ , parallèle au mur et contenue dans le plan  $\pi: 3x + 2y + z = 0$

Réponse  $d: \begin{cases} x = 4 \\ y = -8 + \lambda \\ z = 4 - 2\lambda \end{cases}$

41. Soit le plan  $\pi: 3x - 12y + 4z - 24 = 0$ . Soit  $A(8; 1; \dots)$  et  $B(\dots; 5; 6)$  deux points de  $\pi$ . Calculer les coordonnées des points  $C$  et  $D$  de  $\pi$  tels que  $ABCD$  soit un carré.

Réponse  $C(16; 8; 18); D(4; 4; 15)$  ou  $C(24; 2; -6); D(12; -2; -9)$

42. Calculer le volume du tétraèdre (pyramide à base triangulaire) dont les sommets sont les points  $A(0; 2; 3), B(-2; 2; -1), C(4; -2; 2)$  and  $D(3; 6; 0)$ .

Réponse  $24 \text{ unité}^3$

### Droites concourantes (sécantes) et droites parallèles

43. On considère les droites  $a: \begin{cases} x = 17 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -12 - 4\lambda \end{cases}$  et  $b: \begin{cases} x = -6 + 4\lambda \\ y = 4 - 5\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$

- a) Montrer que ces droites sont sécantes et calculer les coordonnées de leur point d'intersection.  
b) Calculer l'angle aigu formé par ces droites.  
c) Trouver une équation cartésienne du plan contenant ces deux droites.

Réponses a)  $(2; -6; 8)$  b)  $88.3247\dots^\circ$  c)  $18x + 22y + 19z - 56 = 0$

44. On donne deux droites parallèles  $a: \begin{cases} x = -5 - \lambda \\ y = 8 + 4\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$  et  $b: \begin{cases} x = k + m\lambda \\ y = 4 - 8\lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$

- a) Quelle est la valeur de  $m$  ?  
b) Quelle que soit la valeur de  $k$  le point  $B(k; 4; 2)$  est sur la droite  $b$ . Pourquoi ?  
c) Pour quelle valeur de  $k$  le point  $B$  est-il aussi sur la droite  $a$  ?  
d) Pour quelle valeur de  $k$  les droites  $a$  et  $b$  sont-elles distinctes ?

### Distance d'un point à une droite

45. On considère le point  $P(5; -2; 1)$  et la droite  $d$  passant par les points  $A(-3; 8; 16)$  et  $B(-2; 14; 18)$ .

- a) Calculer la distance du point  $P$  à la droite  $d$ .  
b) Calculer les coordonnées du point  $I$  de  $d$  le plus proche du point  $P$ .  
c) Vérifier le résultat obtenu en a) en calculant la distance de  $P$  à  $I$ .

Réponses a)  $15$  b)  $I(-5; -4; 12)$

## Position relative de deux plans

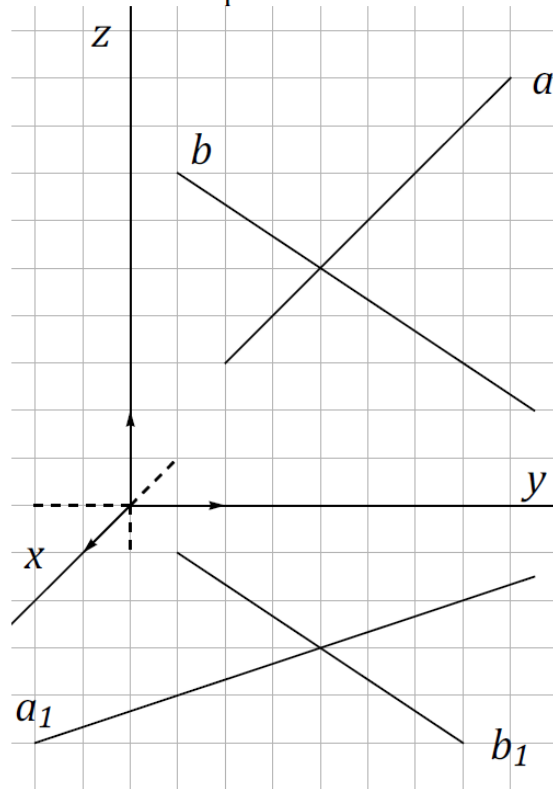
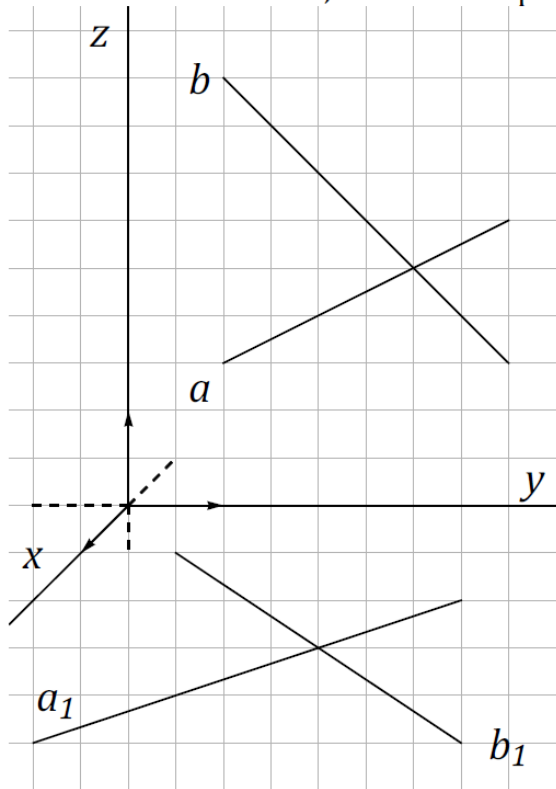
46. Considérons les plans  $\alpha: x - 2y + z - 8 = 0$  et  $\beta: x + y - 3z + 1 = 0$
- Montrer que ces plans sont sécants.
  - Calculer l'angle aigu formé par ces plans.
  - Trouver un vecteur directeur de la droite d'intersection  $i$  de ces plans.
  - En utilisant les équations des plans, calculer les coordonnées de la trace  $S$  de  $i$  dans le sol.
  - Ecrire des équations paramétriques de la droite  $i$ .

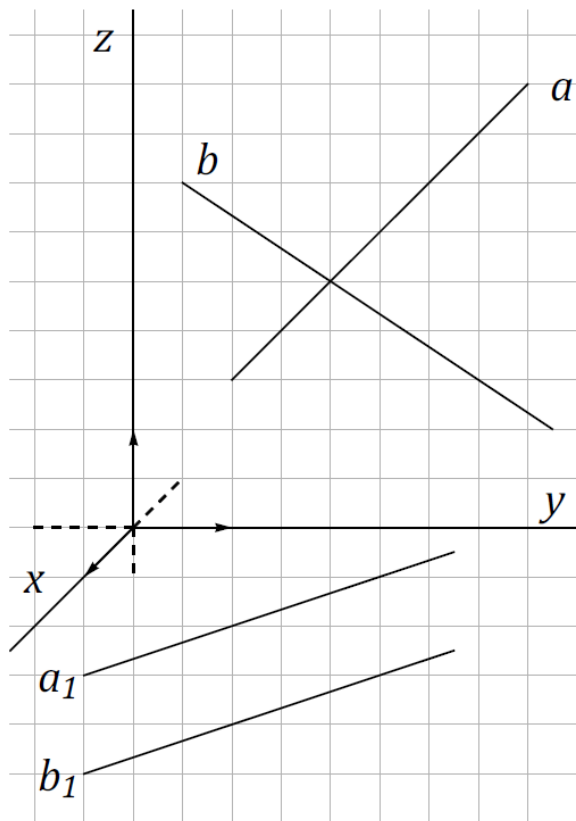
Réponses    b)  $60.5037\dots^\circ$     d)  $i: \begin{cases} x = 2 + 5\lambda \\ y = -3 + 4\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

47. On considère les plans  $\alpha: x + y - 2z + 4 = 0$  et  $\beta: x + y + mz + 5 = 0$ .
- Trouver  $m$  de façon que les plans soient parallèles.
  - Trouver  $m$  de façon que les plans soient perpendiculaires.
- Réponses    a)  $m = -2$     b)  $m = 1$

## Droites gauches

48. Au moyen du dessin, déterminer la position relative des deux droites dessinées. Si les droites sont sécantes, déterminer par dessin les coordonnées du point d'intersection.





49. On donne deux droites  $a$  et  $b$  par leurs équations paramétriques

$$a: \begin{cases} x = 10 + 6\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = 10 - 5\lambda \end{cases} \quad \text{et} \quad b: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = -27 - 2\lambda \end{cases}$$

Ces droites sont-elles gauches ?

Réponses Oui.

50. Considérons les droites  $a: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 8 - 2\lambda \end{cases}$  et  $b: \begin{cases} x = 7 - 3\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -5 + m \cdot \lambda \end{cases}$ .

Trouver, en fonction de  $m$ , la position relative de  $a$  et  $b$ . Si les droites sont sécantes, trouver leur point d'intersection et l'angle formé par les deux droites.

Réponses

Pour  $m = -1$ , les droites se coupent en  $(16; -3; -2)$  avec un angle de  $49.9947\dots^\circ$ .

Pour  $m \neq -1$ , les droites sont gauches.

## Sphère

51. Dans chaque cas, donner l'équation de la sphère.
- a) Le centre de la sphère est  $C(5; -3; 7)$  son rayon est égal à 3.  
Quels sont les points communs à cette sphère et à la paroi ?
- b) La sphère est centrée en  $C(4; -3; -2)$  et est tangente  
au plan  $\pi: 16x - 15y - 12z + 42 = 0$ .  
Quels sont les points d'intersection de cette sphère avec l'axe  $Ox$  ?
- Réponses a)  $(5; 0; 3)$  b)  $r = 7; (10; 0; 0); (-2; 0; 0)$
52. Dans chaque cas l'équation donnée est celle d'une sphère. Trouver le centre et le rayon de la sphère.
- a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z - 46 = 0$
- b)  $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 8x - 16y - 4z = 123$
- Réponses a)  $C(3; -1; 5); r = 9$  b)  $C(-1; 2; 0.5); r = 6$

## Position relative d'une droite et d'une sphère

53. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite  $d: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$   
avec la sphère  $s: (x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 13$ .
- Réponse  $(1; 2; 5); \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{14}{3}\right)$
54. Déterminer la valeur de  $m$  de façon que la droite  $d: \begin{cases} x = 10 - \lambda \\ y = 10 - \lambda \\ z = m \cdot \lambda \end{cases}$  soit tangente  
à la sphère  $s: x^2 + y^2 + z^2 = 9$ .
- Réponse  $m = \pm\sqrt{18/191}$
55. Déterminer en fonction de  $m$  la position relative de la droite  $d: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = m + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$  et de la  
sphère  $s: x^2 + y^2 + z^2 = 9$ .
- Réponse  
Si  $m = -3/2$  ou  $m = 3$ ,  $d$  est tangente à  $s$ ; si  $-3/2 < m < 3$ ,  $d$  coupe  $s$ ;  
sinon  $d$  ne rencontre pas  $s$ .
56. Soit la sphère  $s: (x - 5)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 49$ .
- a) Trouver  $p > 0$  de façon que le point  $P(7; p; 9)$  soit sur  $s$ .
- b) Trouver un vecteur directeur de la droite horizontale qui est tangente à  $s$   
en  $P$ .
- Réponses a)  $p = 2$  b)  $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

## Position relative d'un plan et d'une sphère

57. On donne la sphère  $s: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24$  et le point  $P(-1; a; 0)$ .
- Trouver  $a < 0$  de façon que  $P$  soit sur  $s$ .
  - Trouver une équation cartésienne du plan tangent à  $s$  au point  $P$ .
  - Trouver un vecteur directeur de la droite  $d$  tangente à la sphère au point  $P$  et parallèle au mur.

Réponses a)  $a = -1$     b)  $2x + y - z + 3 = 0$     c)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

58. On donne le plan  $\pi: 12x + 4y + 3z - 12 = 0$  et la sphère de centre  $C(3; 1; 0)$  et de rayon 26.

- On considère les plans parallèles à  $\pi$  tangents à la sphère  $s$ .  
Trouver les équations cartésiennes de ces plans sans chercher les points de tangence.
- Puis calculer les coordonnées des points de tangence.

Réponses: a)  $\pi_1: 12x + 4y + 3z + 298 = 0$  et  $\pi_2: 12x + 4y + 3z - 378 = 0$   
b)  $I_1(-21; -7; -6) \in \pi_1$  et  $I_2(27; 9; 6) \in \pi_2$

59. On considère la sphère  $s: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 9$  et le plan  $\pi: z - 12 = 0$ .

- Quelle est la plus courte distance de  $\pi$  à  $s$ ?
- Quel est le point de  $s$  le plus proche de  $\pi$ ?
- Quel est le point de  $\pi$  qui est le plus proche de  $s$ ?

Réponses a) 5    b)  $(1; 2; 7)$     c)  $(1; 2; 12)$

60. Considérons le plan  $\pi: 3x + 4y - 12 = 0$ .

- Quelle est la position de ce plan relativement au système de coordonnées?
- On considère une sphère  $s$  centrée sur la partie positive de l'axe  $z$ .  
Sachant que la sphère est tangente au sol et au plan  $\pi$ ,  
trouver les coordonnées de son centre.
- Trouver le point de tangence entre  $s$  et le sol.
- Trouver le point de tangence entre  $s$  et  $\pi$ .

Réponses :    b)  $C(0; 0; r), r = 2.4$     c) Origine  
d)  $(36/25; 48/25; 12/5)$

## Cercle d'intersection d'une sphère et d'un plan

61. Trouver les coordonnées du centre et le rayon du cercle d'intersection du plan  $\pi: z - 8 = 0$  et de la sphère  $s$  de centre  $C(6; 7; 4)$  et de rayon 5.  
*Réponses*  $\Omega(6; 7; 8), \rho = 3$
62. Calculer les coordonnées du centre et le rayon du cercle d'intersection de la sphère  $s: (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$  et du plan  $\pi: 2x - 2y - z + 9 = 0$ .  
*Réponse*  $\Omega(-1; 2; 3), \rho = 8$
63. Considérons une sphère  $s$  de centre  $C(2; -2; 3)$  et de rayon  $r = 10$   
Un plan  $\pi$  coupe cette sphère  $s$  le long d'un cercle  $\gamma$  de centre  $\Omega(6; -6; 5)$   
a) Trouver le rayon  $\rho$  du cercle  $\gamma$   
b) Trouver une équation cartésienne du plan  $\pi$   
*Réponse*  $\rho = 8; \pi: 2x - 2y + z - 29 = 0$
64. Considérons le plan  $\pi: 6x + 2y + 3z - 17 = 0$ ,  
la sphère  $s: (x + 13)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 245$  and  
le cercle d'intersection  $c$  de la sphère  $s$  et du plan  $\pi$ .  
a) Montrer que le point  $A(-4; 10; 7)$  appartient à  $c$ .  
b) Considérons le carré  $ABCD$  inscrit dans  $c$ .  
Calculer les coordonnées des sommets  $B, C$  et  $D$ .  
*Réponses*  
a)  $A \in \pi \cap s$   
b)  $\Omega(-1; 4; 5), \rho = 7, B(1; 7; -1), C(2; -2; 3), D(-3; 1; 11)$

## Position relative de deux sphères

65. On considère les sphères  $s_1: (x - 10)^2 + (y - 8)^2 + (z - 1)^2 = 25$   
et  $s_2$  de centre  $A(10; 8; m)$  et de rayon 2.  
Trouver tous les nombres  $m$  tels que  $s_2$  est complètement à l'intérieur de  $s_1$ .  
*Réponse*  $-2 \leq m \leq 4$
66. Considérons les sphères  $s_1: (x - 10)^2 + (y - 8)^2 + (z - 1)^2 = 25$  et  $s_2$  centrée  
en  $A(10; b; 1)$  et de rayon 4. Soit  $T$  le point de  $s_1$  qui est le plus éloigné de la paroi.  
Trouver tous les nombres  $b$  tels que  $s_2$  est tangente à  $s_1$  en  $T$ .  
*Réponse*  $b = 9$  et  $s_2$  est à l'intérieur de  $s_1$ ,  $b = 17$  et  $s_2$  est à l'extérieur de  $s_1$