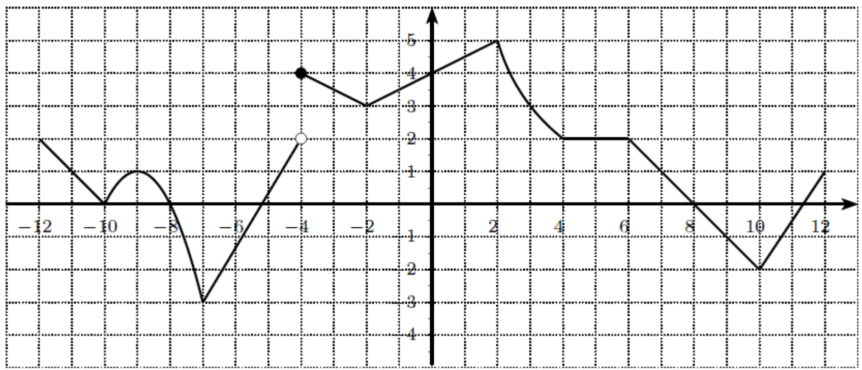
2

FONCTIONS

Exercice 2.1

Une fonction $f : [-12; 12] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet le graphe suivant :



a. Que vaut

$f(-11)$ $f(-4)$ $f(1)$ $f(9)$

$f(-7)$ $f(-1)$ $f(3)$

b. Déterminer le zéros de f.

c. En utilisant les notations ensemblistes, identifier les ensembles suivants

$f([-12; 12])$ $f([-8; -2])$ $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 2\}$

$f(]2; 5[)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 2\}$

d. Trouver le(s) point(s) du graphe dont l'abscisse vaut le double de l'ordonnée

Exercice 2.2

Etablir le tableau des signes de la fonction suivante : $f : x \longmapsto y = x(x-1)(x^2+x+1)$

Exercice 2.3

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $3x < -x + 4$ c. $-2x + 2 < x - 5$ e. $-3x + 4 < x^2$

b. $x - 1 \leq 3x - 1$ d. $x - 5 \geq 4x + 9$ f. $-x^2 + 4x \geq -5$

Exercice 2.4

Pour résoudre l'inéquation $\frac{3}{x-1} > \frac{2x}{x+1}$ c'est-à-dire $\frac{3}{x-1} - \frac{2x}{x+1} > 0$, on établit un tableau des signes de $f(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{2x}{x+1} = \frac{-2x^2+5x+3}{(x-1)(x+1)}$. A l'aide d'un tableau des signes résoudre les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{x^2-4}{(x+4)(x-1)} \geq 0$

b. $\dfrac{4x^8-2x^7}{3x-5} < 0$

c. $\dfrac{x+1}{x-1} > \dfrac{x-1}{x+1}$

d. $\dfrac{13}{2-x} \leq \dfrac{21x+3}{3x+1}$

Exercice 2.5

Comment choisir d afin que l'équation n'a aucune solution ?

a. $3x^2 + dx + d = 0$

b. $2x^2 + x + 2 = dx$

c. $x^2 + 2x + d = 3$

d. $\dfrac{1}{4}(x+1)^2 + 2 = dx$

Exercice 2.6

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

a. $f_1(x) = \dfrac{2x+1}{x-5}$

b. $f_2(x) = \sqrt{x-5}$

c. $f_3(x) = \dfrac{(x-1)}{2(5x-3)}$

d. $f_4(x) = \dfrac{1}{x^2-2x+1}$

e. $f_5(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{x^2-9}$

f. $f_6(x) = \sqrt{2-3x}$

g. $f_7(x) = \dfrac{x^2}{(x-3)(x+4)}$

h. $f_8(x) = \dfrac{1-x^2}{(x-4)^3}$

i. $f_9(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x^2-6x}}$

j. $f_{10}(x) = \sqrt{x^2-5x+7}$

k. $f_{11}(x) = \sqrt{x^2-1}$

Exercice 2.7

Dessiner, dans le même système d'axes, les droites suivantes :

a. $f(x) = \dfrac{1}{2}x$

b. $g(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$

c. $h(x) = \dfrac{1}{2}x - 3$

d. $i(x) = -3x$

e. $j(x) = 3x + 1$

f. $k(x) = -3$

Exercice 2.8

Trouver l'équation des droites dont le graphe passe par :

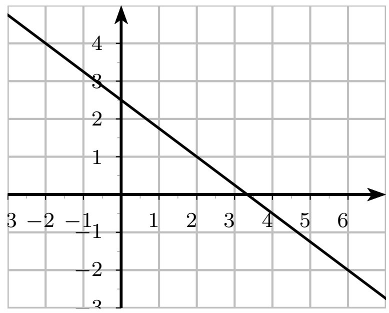
a. Les points $O(0;0)$ et $P(2;6)$.

b. Les points $A(-1;-4)$ et $B(7;-8)$.

c. Le point $C(2;-2)$ et dont la pente vaut $\frac{3}{5}$.

d. Les points P et C.

e. La droite sur le dessin ci-contre



Exercice 2.9

Déterminer l'expression de la droite f telle que $f(4) = 4$ et $f(-6) = -1$.

Exercice 2.10

On donne la droite $f(x) = -2x + 1$ et le point $A(2;1)$.

a. Trouver l'équation de la droite g dont le graphe passe par A et est parallèle à celui de f.

b. Idem pour h dont la pente vaut $\frac{1}{2}$ et coupe le graphe de f en $x = 1$.

c. Représenter ces 3 fonctions dans le même système d'axes. Comparer les 3 pentes. Observations ?

Exercice 2.11

Soient $f(x) = -3x + 4$ et $g(x) = 5x + \frac{3}{2}$ deux fonctions. Résoudre graphiquement et algébriquement $f(x) = g(x)$. Exprimer, à l'aide d'intervalles, l'ensemble $A = \{x \mid f(x) < g(x)\}$.

Exercice 2.12

Déterminer l'expression fonctionnelle de la droite f passant par $A(2;0)$ et $B(-1;6)$. Etablir ensuite l'équation de la droite g dont le graphe passe par $C(-1;-2)$ et est perpendiculaire à celui de f.

Exercice 2.13

Esquisser les graphes suivants.

a. $f_1 : x \longmapsto y = x^2$

b. $f_2 : x \longmapsto y = -x^2 + 4$

c. $f_3 : x \longmapsto y = -(x+1)^2$

d. $f_4 : x \longmapsto y = -2(x+1)(x-3)$

e. $f_5 : x \longmapsto y = 2\,(x-1)^2 + 4$

f. $f_6 : x \longmapsto y = x^2 + 4x - 12$

Exercice 2.14

a. Calculer le sommet de la parabole $f : x \longmapsto y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3$, puis l'intersection de la parabole avec la droite $d : x - y + 1 = 0$.

b. Compléter $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3 = ...(x.........)(x.........) = ...(x.........)^2 + ...$

Exercice 2.15

a. Calculer l'intersection de $f : x \longmapsto y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ avec la droite $d_1 : y = 2x - 1$.

b. Calculer la valeur de b afin que $y = -x^2 + 2$ soit tangent à $d_2 : y = -3x + b$.

Exercice 2.16

Trouver l'équation de la parabole passant par $A(1;5)$, $B(2;5)$ et $C(-1;11)$.

Exercice 2.17

Trouver l'équation de la parabole de sommet $S(3;3)$ et passant par l'origine.

Exercice 2.18

Trouver l'équation d'une droite linéaire tangente à la parabole $P : x \longmapsto y = \frac{x^2-2x+9}{4}$.

Exercice 2.19

Pour quelles valeurs de a le graphe de $f : x \longmapsto y = 3x^2 + ax - a$ n'a pas d'intersection avec l'abscisse ?

Exercice 2.20

Soit $f(x) = 2x^2 - nx + 3n$ une parabole. Quelle valeur faut-il donner à n de sorte que l'axe de symétrie de cette parabole soit la droite verticale $x = 1$? Déterminer les coordonnées du sommet S de f.

Exercice 2.21

Pour quelles valeurs de m l'équation $x^2 + mx + m - 0.75 = 0$ a-t-elle un zéro double ? Quelles sont ces solutions ?

Exercice 2.22

Une parabole coupe l'axe des x en $x = 1$ et $x = -3$. De plus, elle est tangente à la droite $y = 8$. Trouver les coordonnées du sommet et l'équation de cette parabole.

Exercice 2.23

Trouver les zéros de $f : x \longmapsto y = x^3 - x^2 - 2x$

Exercice 2.24

Calculer les coordonnées des points d'intersection entre le graphe de $f(x) = \frac{1}{x-3}$ et la droite d : $x - 4y = 0$.

Exercice 2.25

Etudier les fonctions suivantes, préciser l'ensemble des images.

a. $f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$

b. $f_2(x) = 2\sqrt{x-4} - 6$

Exercice 2.26

Etudier les fonctions suivantes.

a. $f_1(x) = \dfrac{5}{x^2 + 1}$

b. $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

c. $f_3(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

d. $f_4(x) = \dfrac{x-3}{x^2 + x - 2}$

e. $f_5(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$

f. $f_6(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$

Exercice 2.27

a. Exprimer les fonctions suivantes comme des fonctions définies par morceaux puis tracer les graphes

$f_1(x) = |x|$

$f_2(x) = 2x + |x|$

$f_3(x) = -|x+2|$

$f_4(x) = 2|x^2 - 1| - 2$

$f_5(x) = x|x+1|$

$f_6(x) = \frac{2x}{|x+1|}$

b. Déduire de vos graphes les solutions de l'équation $f_6(x) = f_1(x)$

Exercice 2.28

Calculer b et c afin que le graphe de $f(x) = \frac{x+b}{cx-3}$ passe par le point $P(4; -2)$ et admette une asymptote verticale en $x = 6$.

Exercice 2.29

On donne une fonction homographique$f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$ et une fonction affine $g(x) = -x + \frac{3}{2}$.

a. Donner le domaine de définition de f et vérifier à l'aide de la division euclidienne que $f(x) = 2 + \frac{1}{x+3}$.

b. Tracer dans un même système d'axes le graphe de f (une hyperbole) et le graphe de g. Calculer et marquer spécialement les points d'intersection de ces graphes, les intersections des graphes avec les axes ainsi que les éventuelles asymptotes.

c. Tracer au mieux les tangentes à l'hyperbole qui sont parallèles à la droite.

d. Calculer les équations de ces tangentes et déterminer les coordonnées de leur point de contact avec l'hyperbole.

Exercice 2.30

Soient $f : x \longmapsto y = x^2$ et $g : x \longmapsto y = x + 1$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2.31

Soient $f : x \longmapsto y = 2x - 3$ et $g : x \longmapsto y = \frac{x+3}{2}$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Remarques ?

Exercice 2.32

Calculer la réciproque de $f : x \longmapsto y = \frac{x+1}{2x-3}$. Dessiner, dans un même système d'axes, les deux graphes. Remarques.

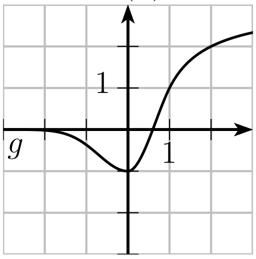
Exercice 2.33

Soient $f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$ et $g(x) = \frac{x-1}{3x+2}$. Calculer $f \circ g$, ${}^{r}f$, ${}^{r}g$, ${}^{r}(f \circ g)$ et ${}^{r}g \circ {}^{r}f$. Remarques.

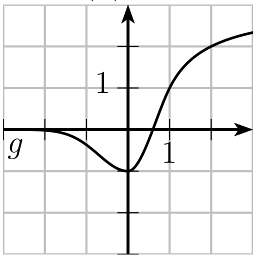
Exercice 2.34

On a dessiné le graphe de la fonction g. Dessine les graphes des fonctions suivantes :

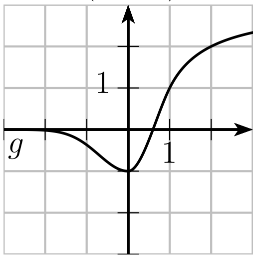
$-g(x)$



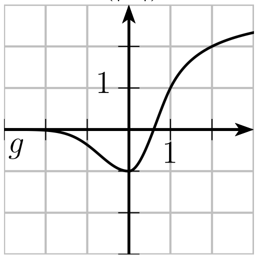
$g(x) - 1$



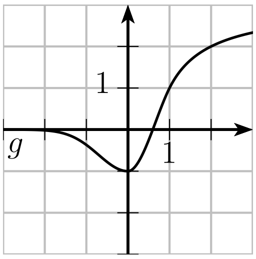
$g(x-1)$



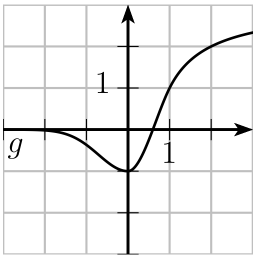
$g(|x|)$



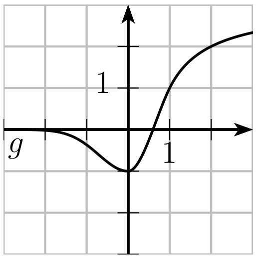
$\dfrac{g(x)}{2}$



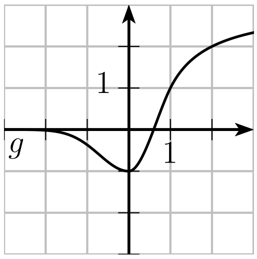
$\sqrt{g(x)}$



$|g(x)|$



$-g(x-1)+1$



Exercice 2.35

Résoudre

a. $10^x = 9.56$

b. $10^{3x} = -5$

c. $\log(x) = 2.5$

d. $\log(4x-1) = -2$

e. $2\log(x) = -4$

f. $\log(x^2 - 21) = 2$

g. $10^{3x-2} = \sqrt{10}$

h. $\log(\log(x)) = 1$

i. $2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$

j. $2^x = 10$

k. $1.03^x = 2$

l. $\log(0.5x - 3) = -1$

m. $2.8^x = 5$

n. $3\log(2x) = 9$

o. $1000^{x+2} = 10^{5x+8}$

p. $\log^2(x) - \log(x) - 2 = 0$

q. $9 \cdot 3^{2x} - 82 \cdot 3^x + 9 = 0$

r. $2^{x^2-8} = \dfrac{1}{16}$

2.1

a. $1 \qquad -3 \qquad 4 \qquad \frac{7}{2} \qquad \frac{9}{2} \qquad 3 \qquad -1$

b. $x_1 = -10 \qquad x_2 = -8 \qquad x_3 = -\frac{26}{5} \qquad x_4 = 8 \qquad x_5 = \frac{34}{3}$

c. $[-3;5] \qquad [2;5[\qquad [-3;2[\cup[3;4] \qquad \{-12\}\cup[4;6] \qquad [-4;4[$

d. $(4;2)$

2.2

x		0		1	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

2.3

a. $x < 1$

b. $x \geq 0$

c. $x > \frac{7}{3}$

d. $x \leq \frac{-14}{3}$

e. $x \in \left]-\infty;-4\right[\cup\left]1;\infty\right[$

f. $x \in [-1;5]$

2.4

a. $x \in \left]-\infty;-4\right[\cup\left[-2;1\right[\cup\left[2;\infty\right[$

b. $x \in \left]-\infty;0\right[\cup\left]\frac{1}{2};\frac{5}{3}\right[$

c. $x \in \left]-1;0\right[\cup\left]1;\infty\right[$

d. $x \in \left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left]2;\infty\right[$

2.5

a. $d \in \left]0;12\right[$

b. $d \in \left]-3;5\right[$

c. $d > 4$

d. $d \in \left]-1;2\right[$

2.6

a. $D_1 = \mathbb{R}\setminus\{5\}$

b. $D_2 = [5;+\infty[$

c. $D_3 = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{5}\right\}$

d. $D_4 = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

e. $D_5 = \mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$

f. $D_6 = \left]-\infty;\frac{2}{3}\right]$

g. $D_7 = \mathbb{R}\setminus\{-4;+3\}$

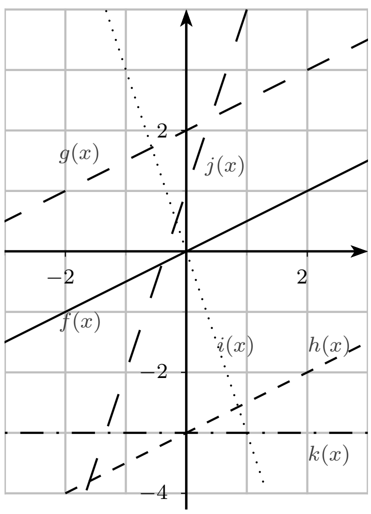
h. $D_8 = \mathbb{R}\setminus\{4\}$

i. $D_9 = \left]-\infty;0\right[\cup\left]2;\infty\right[$

j. $D_{10} = \mathbb{R}$

k. $D_{11} = \mathbb{R}\setminus\left]-1;1\right[$

2.7



2.8
a. $y = 3x$
b. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$
c. $y = \frac{3}{5}x - \frac{16}{5}$
d. $x = 2$
e. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$

2.9 $y = \frac{1}{2}x + 2$

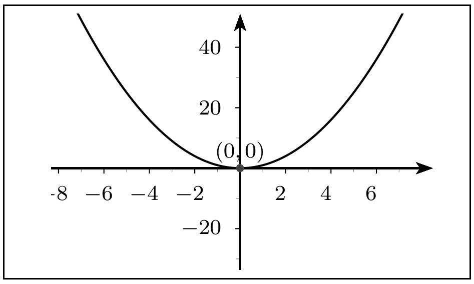
2.10
a. $g : y = -2x + 5$
b. $h : y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
c. $f \perp h$

2.11
a. $x = \frac{5}{16}$
b. $A = \left]\frac{5}{16}; \infty\right[$

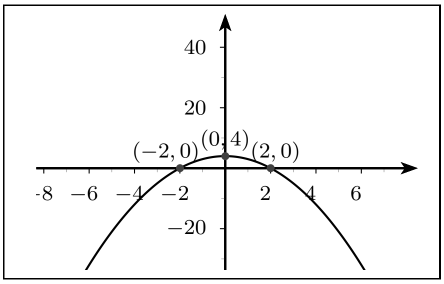
2.12
a. $f : y = -2x + 4$
b. $g : y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

2.13

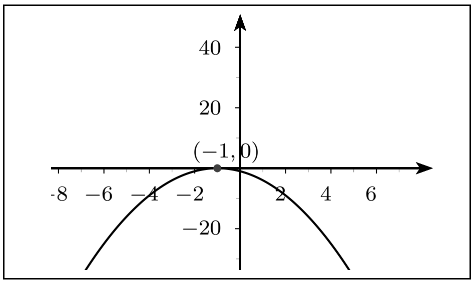
$f_1 : x \longmapsto y = x^2$
Zéro : $P_1(0; 0)$
Sommet : $S = P_1$



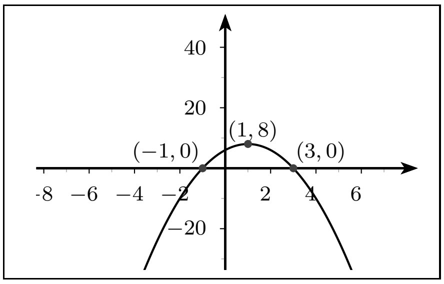
$f_2 : x \longmapsto y = -x^2 + 4$
Zéros : $P_{1,2}(\pm 2; 0)$
Sommet : $S(0; 4)$



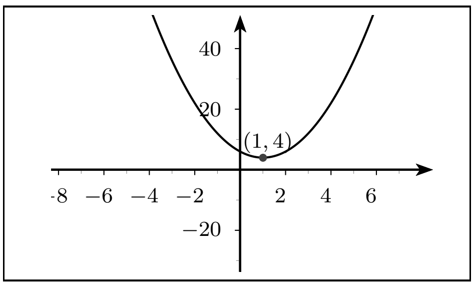
$f_3 : x \longmapsto y = -(x + 1)^2$
Zéro : $P_1(-1; 0)$
Sommet : $S(-1; 0)$



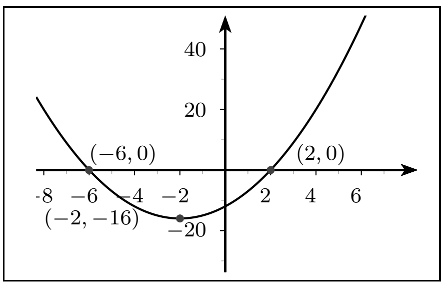
$f_4 : x \longmapsto y = -2(x + 1)(x - 3)$
Zéros : $P_1(-1; 0)$ et $P_1(3; 0)$
Sommet : $S(1; 8)$



$f_5 : x \longmapsto y = 2\left(x - 1\right)^2 + 4$
Sommet : $S(1; 4)$



$f_6 : x \longmapsto y = x^2 + 4x - 12$
Zéros : $P_1(2; 0)$ et $P_2(-6; 0)$
Sommet : $S(-2; -16)$



2.14 a. $S\left(1; \frac{7}{2}\right)$, $I_1(2;3)$ et $I_2(-2;-1)$

b. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3 = -\frac{1}{2}(x - 1 + \sqrt{7})(x - 1 - \sqrt{7}) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{7}{2}$

2.15 a. $I(2;3)$ b. $b = \frac{17}{4}$

2.16 $y = x^2 - 3x + 7$

2.17 $y = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 3$

2.18 $y = x$ et $y = -2x$

2.19 $a \in \left]-12; 0\right[$

2.20 $n = 4$ et $S(1;10)$

2.21 Pour $m_1 = 3$ on obtient $x = \frac{-3}{2}$ et pour $m_2 = 1$ on obtient $x = \frac{-1}{2}$

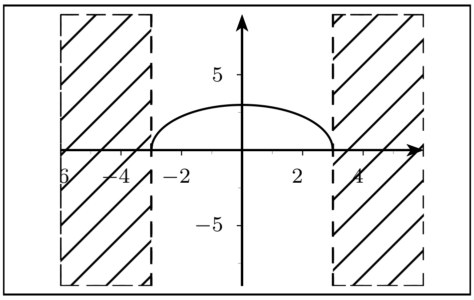
2.22 $S(-1;8)$ et $y = -2(x+1)^2 + 8$

2.23 $I_1(-1;0)$, $I_2(0;0)$ et $I_3(2;0)$

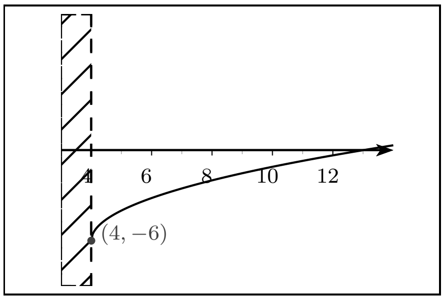
2.24 $I_1\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$ et $I_2\,(4;1)$

2.25

$f_1 : x \longmapsto y = \sqrt{9 - x^2}$
$f(D) = [0;3]$

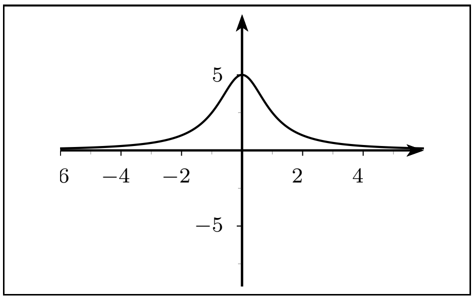


$f_2 : x \longmapsto y = 2\sqrt{x-4} - 6$
$f(D) = [-6; +\infty[$

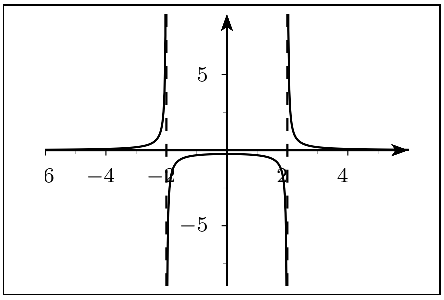


2.26

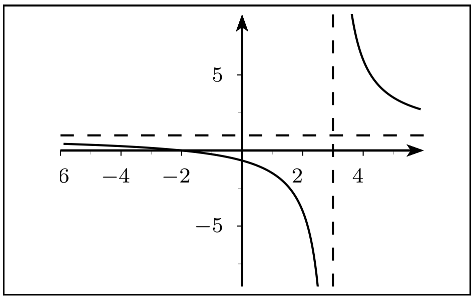
$$f_1 : x \longmapsto y = \frac{5}{x^2+1}$$



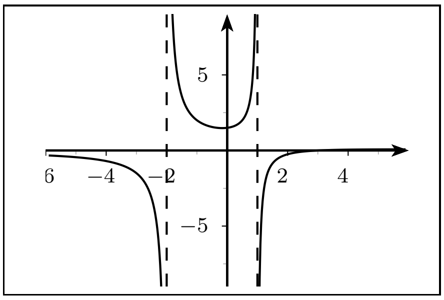
$$f_2 : x \longmapsto y = \frac{1}{x^2-4}$$



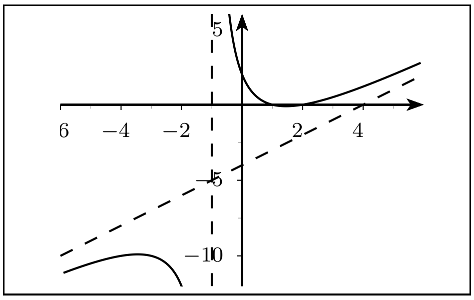
$$f_3 : x \longmapsto y = \frac{x+2}{x-3}$$



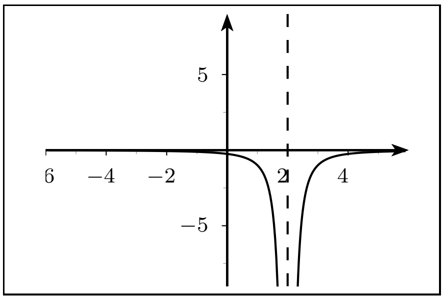
$$f_4(x) = \frac{x-3}{x^2+x-2}$$



$$f_5(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$$

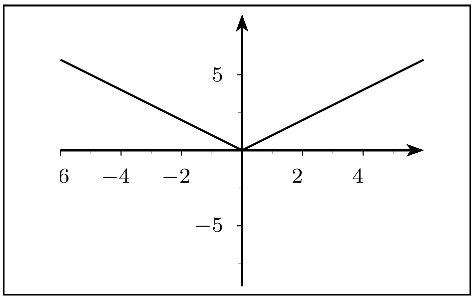


$$f_6(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

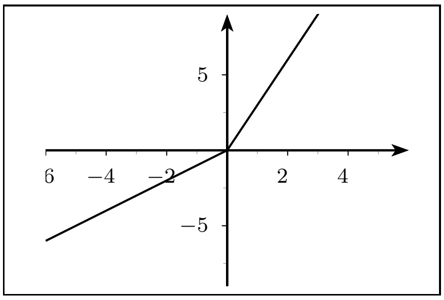


2.27

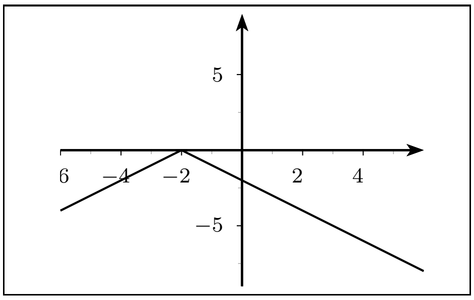
$f_1(x) = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$



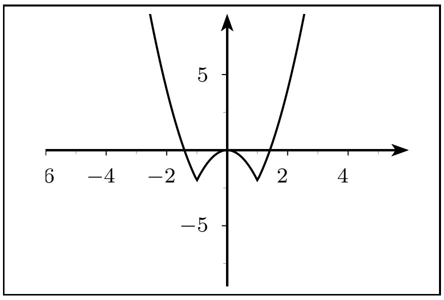
$f_2(x) = 2x + |x| = \begin{cases} 3x & x > 0 \\ x & \text{sinon} \end{cases}$



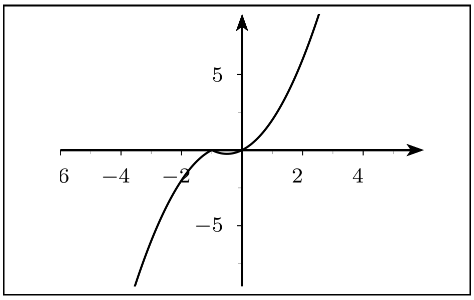
$f_3(x) = \begin{cases} -x-2 & x > -2 \\ x+2 & \text{sinon} \end{cases}$



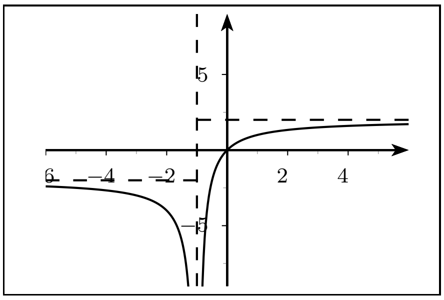
$f_4(x) = \begin{cases} -2x^2 & x \in [-1;1] \\ 2x^2-4 & \text{sinon} \end{cases}$



$f_5(x) = \begin{cases} x^2+x & x > -1 \\ -x^2-x & \text{sinon} \end{cases}$



$f_6(x) = \frac{2x}{|x+1|} = \begin{cases} \frac{2x}{x+1} & x > -1 \\ \frac{-2x}{x+1} & x < -1 \end{cases}$



Les solutions de $f_1(x) = f_6(x)$ sont $x = 1$ et $x = 0$

2.28 $b = -2$ et $c = \frac{1}{2}$

2.29 $t_1 : y = -x + 1$, $t_2 : y = -x - 3$, $P_1\,(-2;3)$ et $P_2\,(-4;1)$

2.30 $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 1$ et $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$

2.31 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$. On remarque que $f =^r g$

2.32 ${}^r f(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$

2.33

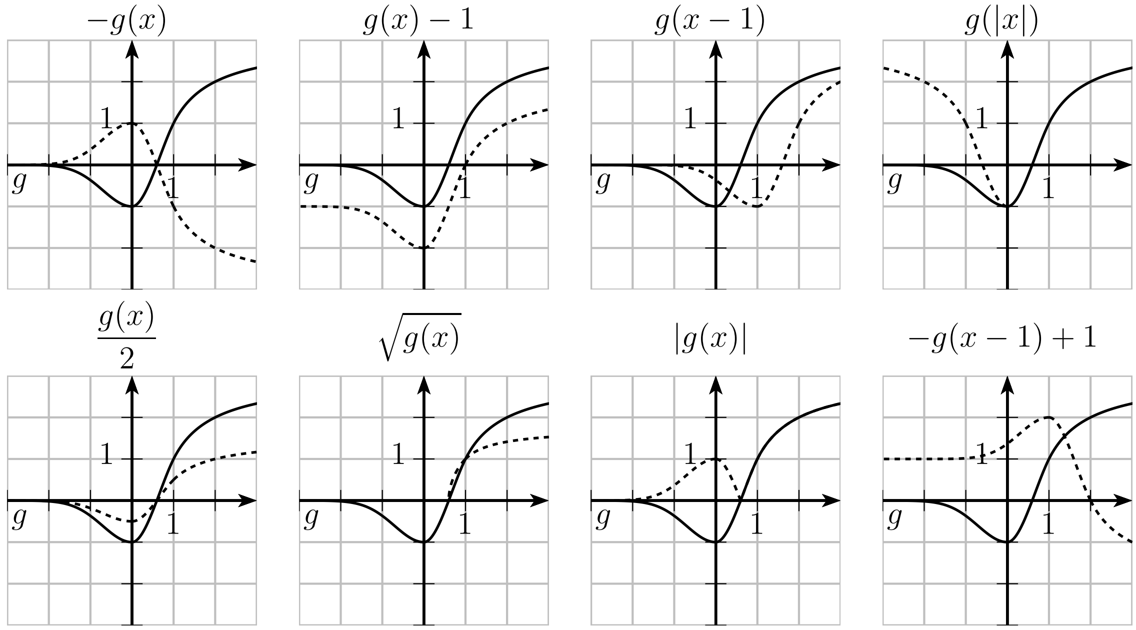
$f \circ g\,(x) = \frac{-7x-8}{16x+9}$

${}^r g(x) = (x) = \frac{-1-2x}{3x-1}$

${}^r f\,(x) = \frac{5x+3}{2-x}$

$({}^r g \circ {}^r f)\,(x) =^r (f \circ g\,(x)) = \frac{-9x-8}{16x+7}$

2.34



2.35

a. $x = \log(9, 56)$

b. Impossible

c. $x = 10^{2,5}$

d. $x = \frac{101}{400}$

e. $x = 10^{-2}$

f. $x_{1,2} = \pm 11$

g. $x = \frac{5}{6}$

h. $x = 10^{10}$

i. $x_1 = 2 \quad x_2 = -1$

j. $x = \frac{1}{\log(2)}$

k. $x = \frac{\log(2)}{\log(1{,}03)}$

l. $x = \frac{31}{5}$

m. $x = \frac{\log(5)}{\log(2{,}8)}$

n. $x = 500$

o. $x = -1$

p. $x_1 = 100 \quad x_2 = 10^{-1}$

q. $x_{1,2} = \pm 2$

r. $x_{1,2} = \pm 2$