# LDDR – Niveau 1 : FONCTIONS

## 4. Fonctions

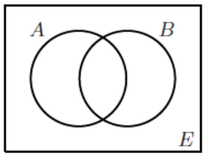
**1** Ecrire les ensembles suivants avec les notations d'intervalle.

$A = \{x \ : \ 4 < x \leqslant 9\}$ $\quad B = \{x \ : \ -3 \leqslant x \leqslant 2\}$ $\quad C = \{x \ : \ x - 1 > 0\}$

$D = \{x \ : \ -3 < x < 4\}$ $\quad E = \{x \ : \ 2x + 1 \leqslant 0\}$ $\quad F = \{x \ : \ |x| \leqslant 2\}$

$G = D \cap \mathbb{N}$ $\quad H = A \cap B$ $\quad I = B \cup C$ $\quad J = D \cup E$

**2** Dans des *diagrammes de Venn* comme présenté ci-contre, hachurer les zones $E \setminus (A \cap B)$, $E \setminus (A \cup B)$, $(E \setminus A) \cap (E \setminus B)$ et $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.




**3** Parmi les 1000 élèves d'un lycée, 720 apprennent l'anglais, 500 l'italien et 250 l'espagnol. Il y a 340 élèves qui suivent les cours d'anglais et d'italien, 140 ceux d'anglais et d'espagnol, 130 ceux d'espagnol et d'italien. Seulement 40 élèves suivent les trois cours. Combien d'élèves n'apprennent aucune langue ?

**4** Parmi les expressions suivantes, lesquelles décrivent une fonction ?

a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \ x \mapsto x^2 + 1$ $\quad$ b) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $\quad$ c) $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}, \ x \mapsto 2$

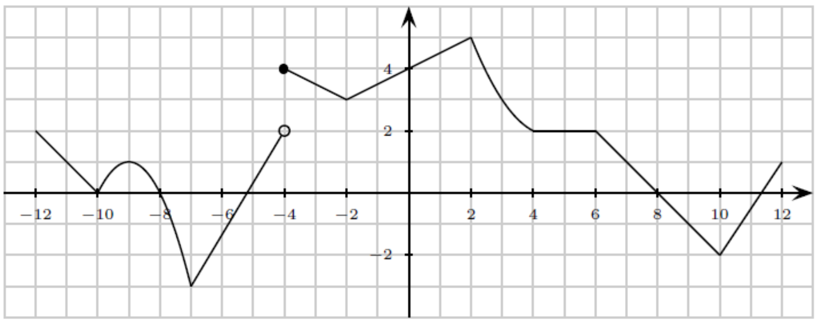
d) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \dfrac{3}{x^2 - 2}$ $\quad$ e) $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \ x \mapsto \dfrac{3}{x^2 - 2}$ $\quad$ f) $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x$

**5** Tracer le graphe des fonctions suivantes pour $x \in [-6; 6]$ puis trouver le domaine de définition maximal et le domaine d'arrivée minimal de chacune d'elles.

$f_1(x) = 3$ $\quad f_2(x) = 0.5x + 1$ $\quad f_3(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x - 2)$ $\quad f_4(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

$f_5(x) = |x| = \sqrt{x^2}$ $\quad f_6(x) = \sqrt{x + 4}$ $\quad f_7(x) = (1.25)^x$

**6** Une fonction $f : [-12; 12] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet le graphe suivant :




a) Déterminer les images $f(-11)$, $f(-7)$, $f(-4)$, $f(1)$, $f(3)$ et $f(9)$.

b) Déterminer l'ensemble des images ainsi que les zéros de $f$.

c) Identifier les ensembles $f(]2; 5[)$, $f([-8; -2])$, $\{x : f(x) = 2\}$ et $\{x : f(x) > 2\}$

d) Trouver le(s) point(s) du graphe dont l'abscisse vaut le double de l'ordonnée.

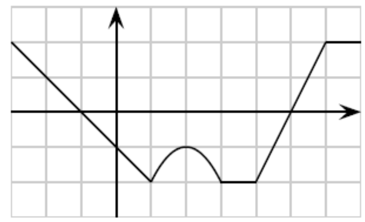
**7** Expliciter $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$ dans les cas suivants.

a) $f(x) = x^2 + 4 \qquad g(x) = x - 1$ b) $f(x) = 3x + 5 \qquad g(x) = \dfrac{x-5}{3}$

c) $f(x) = (x^2 - 2)^2 \qquad g(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad g(x) = \sin(x)$

La composition de fonctions n'est pas une opération commutative (les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont en général différentes) mais elle est associative : $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

**8** Une fonction $f$ admet le graphe ci-contre. Esquisser le graphe des fonctions définies comme suit :



$f_1(x) = f(x) + 3 \qquad f_2(x) = f(x+3) \qquad f_3(x) = |f(x)|$

$f_4(x) = f(-x) \qquad f_5(x) = -f(x) \qquad f_6(x) = -f(-x)$

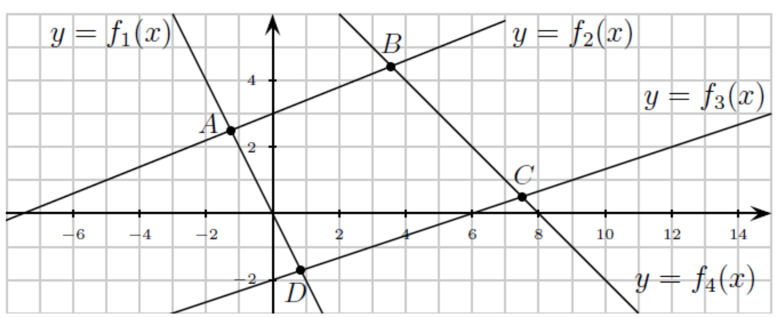
**9** Trouver l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{g(x)}$ dans les cas suivants.
$g_1(x) = (x^2 - 1)(x - 4) \qquad g_2(x) = x^2 - 5x + 7 \qquad g_3(x) = (x+1)(x^2 - 2x - 3)$

**10** Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x^2 - 4}{(x+4)(x-1)} \geqslant 0$ b) $\dfrac{(3x+12)(x+2)}{x^2 - 6x + 9} \leqslant 0$ c) $\dfrac{4x^8 - 2x^7}{3x+5} < 0$

d) $\dfrac{x-3}{x^2 - 3x + 2} > 0$ e) $\dfrac{x+1}{x-1} > \dfrac{x-1}{x+1}$ f) $\dfrac{13}{2-x} \leqslant \dfrac{21x+3}{3x+1}$

**11** Trouver l'expression des fonctions qui admettent les graphes suivants. Déterminer les sommets du quadrilatère $ABCD$ et l'angle au sommet $A$ avec deux décimales.




**12** Déterminer l'expression de la fonction affine $f$ dont le graphe passe par les points
1) $A(2;3)$ et $B(-3;5)$ 2) $A(2;-6)$ et $B(8;-3)$ 3) $A(a;a^2)$ et $B(b;b^2)$

**13** Trouver l'expression de la fonction $f$ dont le graphe est une droite descendante qui passe par le point $(2;5)$ et qui coupe l'axe des $x$ sous un angle de $60°$.

**14** a) Montrer que la composition de deux fonctions affines $f_1$ et $f_2$ est encore une fonction affine. Comparer la pente de $f_1 \circ f_2$ avec celles de $f_1$ et de $f_2$.

b) On considère $f(x) = 2x + 1$. Exprimer $f_2(x) = (f \circ f)(x)$, $f_3(x) = (f \circ f \circ f)(x)$ et deviner l'expression de $f_{16}(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{\text{16 facteurs}}(x)$.

**15** Exprimer les fonctions suivantes sous forme factorisée (si possible) et sous la forme du sommet : $f_1(x) = 2x^2 - 5x + 2$, $f_2(x) = x^2 + x + 1$, $f_3(x) = -x^2 + 6x - 8$.

**16** Trouver la forme développée des paraboles suivantes :

a) parabole coupant les axes en $I_{x1}(2;0)$, $I_{x2}(10,0)$ et $I_y(0;-5)$,

b) parabole de sommet $S(-2;7)$ passant par $P(1;2)$,

c) parabole passant par $A(-3;3)$ et $B(6;-6)$, avec un sommet d'abscisse $x_S = 1$.

**17** Déterminer les paraboles $y = f(x)$ qui passent par trois points donnés.

a) $A(-1;9)$, $B(2;-6)$ et $C(4;14)$ b) $A(3;1)$, $B(4;-7)$ et $C(5;-19)$

c) $A(-3;30)$, $B(4;72)$ et $C(11;-180)$ d) $A(-2;18)$, $B(5;11)$ et $C(8;68)$

**18** Trouver les points d'intersection entre la parabole d'équation $y = 3x^2 - 8x - 2$ et

a) ...la droite $3x + 2y + 9 = 0$ b) ...la parabole $y = -2x^2 + 6x + 1$

**19** Résoudre les (in)équations suivantes sans chercher l'expression des fonctions $f$ et $g$.

a) $f(x) = 4$

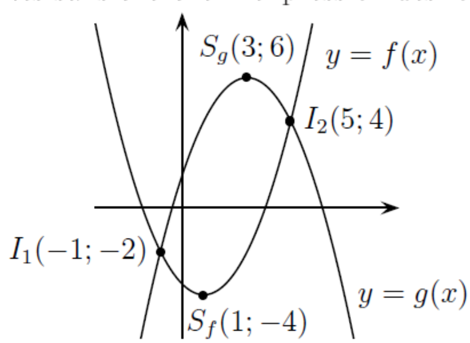
b) $g(x) \leqslant f(x)$

c) $g(x) \geqslant -2$

d) $g(x) > f(5)$

e) $f(x) + 2 \leqslant 0$

f) $g(x) - 10 \geqslant f(x)$




**20** Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs de $k$ de sorte que l'équation n'admette qu'une seule solution puis indiquer cette solution.

a) $x^2 + 3x - k = 0$ b) $2x^2 - kx + 3 = 0$ c) $1 + kx - x^2 = x^2 + 3$

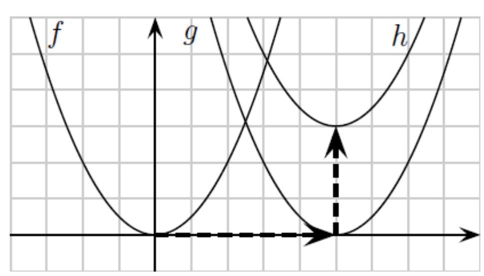
**21** a) Trouver $k$ pour que la parabole $y = (x+k)^2$ soit tangente à la droite $y = 2x - 7$.

b) Déterminer les droites qui passent par $P(3;1)$ et qui touchent en un seul point la parabole $y = x^2 - 3x + 5$.

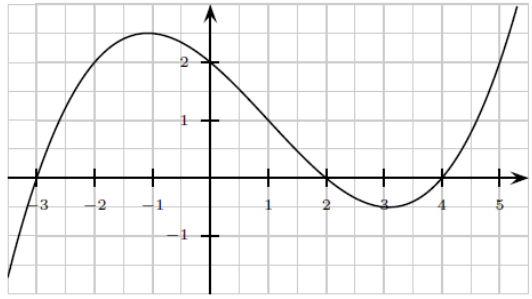
**22** On décale la parabole $y = 2x^2 + 3x - 5$ de deux unités vers la droite et d'une unité vers le bas. Trouver l'équation développée de la parabole résultante.

Le graphe d'une fonction quadratique $h(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ est obtenu en translatant le graphe de $f(x) = ax^2$ selon le vecteur $\binom{x_S}{y_S}$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 \\ &\downarrow \text{ translation horizontale de } x_S \text{ unités} \\ g(x) &= a(x - x_S)^2 \\ &\downarrow \text{ translation verticale de } y_S \text{ unités} \\ h(x) &= a(x - x_S)^2 + y_S \end{aligned}$$



**23** Une fonction $f$ admet le graphe donné ci-contre. Déterminer




a) les nombres $f(1)$, $f(-1)$ et $(f \circ f)(4)$.

b) l'image par $f$ des ensembles $A = [0;5]$ et $B = ]-2;1[$.

c) l'ensemble dont l'image par $f$ est $]0;2]$.

d) Indiquer le nombre de solutions des équations suivantes :

$$f(x) = -1, \quad f(x) = 2, \quad f(x) = f(3), \quad f(x) = -x, \quad f(x) = \tfrac{1}{2}x + 1$$

e) Indiquer les zéros de $f$ puis trouver les expressions factorisée et développée de $f(x)$, en sachant qu'il s'agit d'un polynôme du troisième degré.

**24** Dans chacun des cas suivants, trouver des ensembles $D$ et $A$ pour que la fonction $f : D \longrightarrow A$ soit bijective et déterminer sa réciproque.

$$f_1(x) = 3x - 1 \qquad f_2(x) = x^2 - 4 \qquad f_3(x) = \sqrt{3-x} \qquad f_4(x) = \sqrt{x^2 - 5}$$

$$f_5(x) = |2x - 1| \qquad f_6(x) = \frac{1}{x-2} \qquad f_7(x) = 3x^2 - 4x + 1 \qquad f_8(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

**25** Calculer l'intersection entre la droite $y = 2x + 1$ et l'hyperbole $y = \dfrac{2x-3}{3x+8}$. Trouver les valeurs de $k$ pour que la droite $y = kx$ coupe l'hyperbole en un seul point.

**26** Pour chacune des homographies suivantes, trouver le domaine de définition maximal, le domaine d'arrivée minimal et déterminer la fonction réciproque.

$$f_1(x) = \frac{2x+1}{x-3} \qquad f_2(x) = \frac{2x+3}{x+1} \qquad f_3(x) = 1 + \frac{3}{x-1} \qquad f_4(x) = 3 - \frac{1}{x}$$

**27** Trouver des relations entre les coefficients $(a, b, c, d)$ d'une hyperbole qui. . .

a) passe par l'origine

b) possède l'axe $Ox$ comme asymptote

c) possède l'asymptote $x = -2$

d) a la droite $y = x$ pour axe de symétrie

**28** Discuter de la parité des fonctions suivantes

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f_1(x) = 3$ | $f_2(x) = x - 5$ | $f_3(x) = -4x^3$ | $f_4(x) = (x-1)^2$ |
| $f_5(x) = x^2 + 3x$ | $f_6(x) = \lvert x\rvert$ | $f_7(x) = \lvert x+2\rvert$ | $f_8(x) = x^4 + x^2$ |
| $f_9(x) = \sin\lvert x\rvert$ | $f_{10}(x) = 3\cos(x)$ | $f_{11}(x) = \tan(x)$ | $f_{12}(x) = \cos(x+\pi)$ |
| $f_{13}(x) = 2(\sin x)^3$ | $f_{14}(x) = \cos(5x)$ | $f_{15}(x) = \lvert\cos x\rvert$ | $f_{16}(x) = x^2\sin(2x)$ |

**29** Discuter de la parité de $f + g$, $fg$ et $f \circ g$ par rapport à celles de $f$ et $g$.

| $f$ | $g$ | $f+g$ | $fg$ | $f \circ g$ |
|---|---|---|---|---|
| paire | paire | | | |
| paire | impaire | | | |
| impaire | paire | | | |
| impaire | impaire | | | |

**30** Esquisser le graphe des fonctions suivantes (1 carreau $\equiv \pi/6$ radians) :

$f_1(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \qquad f_2(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \qquad f_3(x) = \cos(2x) \qquad f_4(x) = 2\cos(x)$

Indiquer si les fonctions sont paires ou impaires, et préciser leur période.