Université de Neuchâtel
Faculté de Sciences économiques

Mathématiques appliquées I
Session d'examens: Janvier 2019
Date: 15.01.2019
Durée: 2 heures
Total: 50 points

professeur: Giuseppe Melfi

Nom et Prénom: ....

Notes

Document autorisé : Une feuille format A4 recto/verso de notes personnelles. Aucune autre documentation ni dispositif électronique n'est autorisé.
Calculatrice : Autorisée
Vos copies, la donnée et les brouillons doivent être rendus ensemble et agrafés par le surveillant à l'issue du temps imparti. N'oubliez pas d'écrire votre nom sur chaque feuille.
Toutes les réponses doivent être rédigées sur des feuilles séparées. Les réponses inscrites sur cette donnée ne seront pas prises en compte.

Analyse: fonctions d'une variable réelle (16 pts)

Considérons la fonction:

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 - 2, & x \leq 0 \\ 2e^x - 4, & x > 0 \end{cases}$$

1.1 Etudiez la continuité et la dérivabilité de $f(x)$. (3 pts)

1.2 Trouvez les extrema locaux et globaux de la fonction $f(x)$ si elle en a. (2 pts)

1.3 Trouvez les points d'inflexion de $f(x)$. (2 pts)

1.4 Si la fonction f possède une fonction inverse, trouvez-la et donnez-en son expression explicite. (4 pts)

1.5 Tracez la courbe de $f(x)$. (1 pts)

1.6 Algébriquement, trouvez les coordonnées des points d'intersection de la courbe de $f(x)$ avec la courbe de $g(x) = e^x$. (2 pts)

1.7 Etant donné $h(x) = |x|$, ajoutez sur le graphique que vous avez dessiné en point 1.5 la courbe de la fonction $(h \circ f)(x)$. (2 pts)

~~Algèbre Linéaire (11 pts)~~

2.1 Soit le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{cases} 2x & +y & & = & 4 \\ 6x & +2y & +6z & = & 20 \\ -4x & -3y & +9z & = & 3 \end{cases}$$

a) Ecrivez ce système en forme matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où A est la matrice des coefficients, $\mathbf{x}$ est le vecteur colonne des variables x, y et z et $\mathbf{b}$ est le vecteur colonne du côté droit du système. (1 pts)

b) Quelles sont les variables de base et quelles sont les variables libres du système? (1 pts)

c) Trouvez la solution du système avec la méthode de **Gauss-Jordan**. Bien explicitez les étapes de votre procédure sur la feuille de réponse. (2 pts)

d) Démontrez que l'inverse de A est: (2 pts)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & \frac{3}{2} & -1 \\ 13 & -3 & 2 \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e) Utilisez la matrice inverse A^{-1} pour retrouver la solution au système linéaire trouvé au point (**c**). (1 pts)

2.2 Soit M la matrice augmentée d'un système d'équations linéaires:

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a & ab \\ 0 & 0 & b & a \end{array}\right)$$

a) Discutez du rang de la matrice M selon les valeurs de a et b. (2 pts)

b) Quand est-ce que ce système admet-il une solution unique? (1 pts)

c) Si $a \neq 0$ et $b = 0$, quelles sont les solutions du système? (1 pts)

Applications (23 pts)

3.1 Trois représentants de vente pour produits médicaux comparent leur salaire mensuel.

- **A** reçoit les 15% de son chiffre d'affaires;
- **B** reçoit un salaire fixe de 3500 Frs plus 5% de son chiffre d'affaires;
- **C** reçoit un salaire fixe de 5000 Frs

a) Illustrez cette situation par un graphique. (3 pts)

b) Déterminez par calcul, en fonction du chiffre d'affaire, quel représentant profite de la rétribution la plus avantageuse. (3pts)

3.2 La compagnie Desla envisage de proposer sur le marché une voiture éléctrique de nouvelle génération: le "MX". Desla a investi 2 milliards de dollars en recherche et développement pour mettre au point ce modèle. D'après des prévisions fiables, Desla peut compter sur une demande x exprimée en milliers d'unités, en fonction du prix p du "MX" exprimé en milliers de dollars. La demande peut être modélisée par l'équation

$$x = 80 - 0{,}5p.$$

L'assemblage de x milliers d'unités du modèle MX (hors investissement initial) revient à un coût C en millions de dollars $C = 0{,}2x^2$.

a) Exprimez le bénéfice de Desla (en millions de dollars) dégagé par la commercialisation du modèle MX en fonction de la variable p prix de vente qui sera choisi. (4 pts)

b) Quel prix Desla devra-t-elle fixer pour épuiser ces voitures MX si elle veut maximiser le bénéfice ? (3 pts)

c) Combien de voitures de ce modèle seront-elles vendues à ces conditions? (2 pts)

d) Quel sera le bénéfice ainsi dégagé? (1 pts)

3.3 Le "Journal de Brudeville" fondé en janvier 1925 a eu un tirage quotidien (en milliers d'exemplaires) donné par la fonction

$$f(x) = \frac{40}{\ln(x+2)}$$

où x représente le nombre d'années depuis la fondation ($x = 0$ correspond au tirage quotidien en janvier en 1925; $x = 1$ en janvier 1926, etc.)

a) Quel était le tirage quotidien moyen en janvier 2010 ? (1 pts)

b) Estimez, à l'aide de la dérivée de f, combien de copies le journal perdait en 2010 chaque mois (4 pts)

c) En raison de contraintes de rentabilité le journal devra cesser les publications lorsque son tirage quotidien ne dépassera pas les 8600 copies. En quelle année cela se passera-il ? (2 pts)

Solutions

Analyse

1.1 Le comportement intéressant de cette fonction se trouve au voisinage du point $x = 0$.

En regardant la limite de la fonction à gauche et à droite:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -3(0) - 2 = -2$ et

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2(1) - 4 = -2$

on trouve que la fonction est continue en $x = 0$.

Elle n'est, par contre, pas dérivable à ce point car la dérivée à gauche n'est pas la même que la dérivée à droite:

$$f'(x) = \begin{cases} -6x, & x < 0 \\ 2e^x, & x > 0 \end{cases}$$

(On peut aussi utiliser la définition de la dérivée pour montrer que la limite de la dérivée à gauche n'est pas la même que la limite à droite $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \neq \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$)

1.2

$$f'(x) = \begin{cases} -6x, & x < 0 \\ 2e^x, & x > 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$+$

La fonction est monotone et elle n'a aucun extremum (ni maximum ni minimum) car la première dérivée ne change pas de signe. (Le point $x = 0$ est un point critique car la première dérivée n'est pas définie **mais il n'est pas un extremum**).

1.3

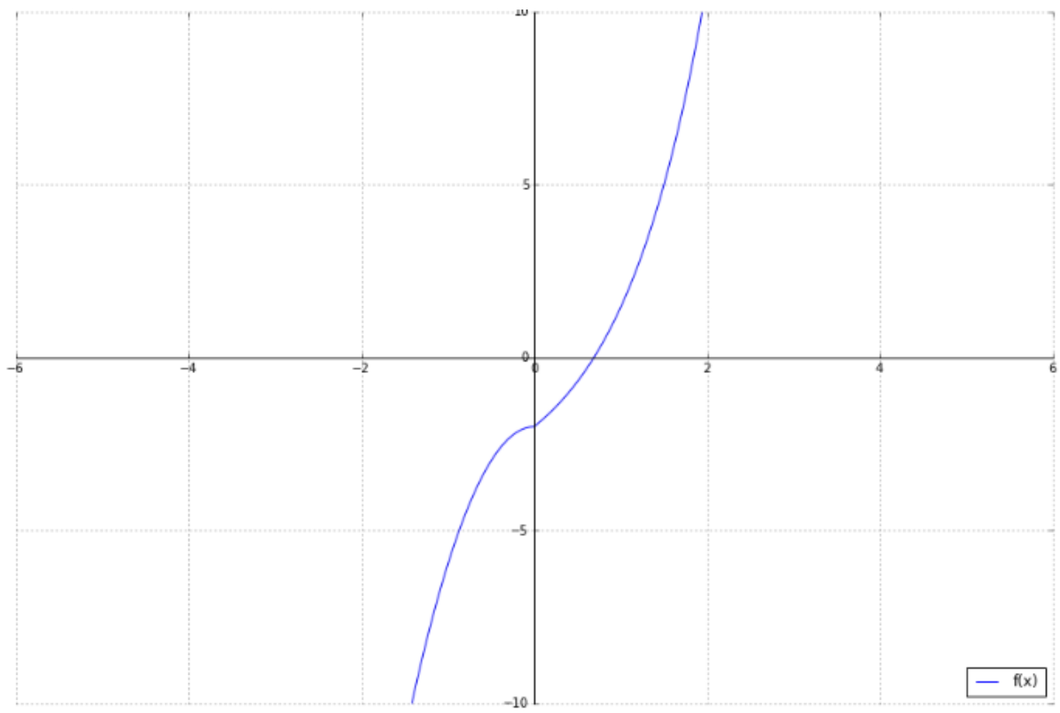
$$f''(x) = \begin{cases} -6, & x < 0 \\ 2e^x, & x > 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\|\|$	$+$

Le point $x = 0$ est le seul point où la deuxième dérivée change du signe et il est alors le seul point d'inflexion de la fonction.

1.4 Comme la première dérivée de cette fonction ne change pas de signe, la fonction est une fonction injective (monotone) et elle possède une fonction inverse.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{-x-2}{3}}, & x \leq -2 \\ \ln\left(\frac{x+4}{2}\right), & x > -2 \end{cases}$$

1.5 

1.6 Comme $g(x) = e^x$ est toujours positive, l'intersection de la courbe de $g(x)$ avec la courbe de $h(x)$ (si ces deux se croisent) est située dans la partie positive de $f(x)$ c.à.d. $f(x) > 0$ et alors pour trouver les points d'intersection, il nous suffit de résoudre l'équation :

$$e^x = 2e^x - 4$$

$$e^x = 4 \implies x = \ln(4)$$

1.7 

Algèbre Linéaire

2.1 a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \\ -4 & -3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Toutes les variables sont des variables de base

c) $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$

d) Vérifier que $A^{-1} \cdot A = I$

e) $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

2.2 a) Les cas suivants se présentent:

- Si $b = 0$, $a = 0$, la matrice M a rang 1
- Si $b = 0$, $a \neq 0$, la matrice M a rang 2
- Si $b \neq 0$, $a = 0$, la matrice M a rang 2
- Si $b \neq 0$, $a \neq 0$, la matrice M a rang 3

b) Ce système admet une solution unique dans le cas où $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Rang = nombre d'équations = nombre d'inconnues = 3

c) Pas de solution.

Applications

3.1 Jusqu'à 30'000 frs. de chiffre d'affaires c'est C qui a la rémunération la plus avantageuse. Entre 30 et 35 mille frs. c'est B; au dela de 35'000 frs c'est A.

3.2 a) $B(p) = -0,55p^2 + 96p - 3280$

b) Le prix à fixer du modèle MX est de 87273 dollars.

c) A ce prix, 36'360 voitures seront vendues

d) Le bénéfice sera de 909 millions de dollars

3.3 a) $f(85) = 8{,}956$, donc en 2010 le tirage était de 8956 copies.

b) On a

$$f'(x) = -\frac{40}{(\ln(x+2))^2} \cdot \frac{1}{x+2}$$

et donc puisque $f'(85) = 0{,}023$, en 2010 le journal perdait $0.023 \cdot 1000 \cdot \frac{1}{12} \simeq 1.916$ copies par mois.

c) La fonction f est décroissante, et donc le journal devra cesser ses publications lorsque

$$f(x) = 8,6.$$

Cela signifie lorsque $x \simeq 102{,}7$, ce qui signifie que la fermeture du journal sera ineluctable en 2027.