

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL  
FACULTÉ DE SCIENCES ÉCONOMIQUES

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES I  
SESSION D'EXAMENS: AOÛT 2019

DATE: 28.08.2019

DURÉE: 2 HEURES

TOTAL: 50 POINTS

PROFESSEUR: GIUSEPPE MELFI

NOM ET PRÉNOM: .....

---

## Notes

---

*Document autorisé : Une feuille format A4 recto/verso de notes personnelles. Aucune autre documentation ni dispositif électronique n'est autorisé.*

*Calculatrice : Autorisée*

*Vos copies, la donnée et les brouillons doivent être rendus ensemble et agrafés par le surveillant à l'issue du temps imparti. N'oubliez pas d'écrire votre nom sur chaque feuille.*

*Toutes les réponses doivent être rédigées sur des feuilles séparées. Les réponses inscrites sur cette donnée ne seront pas prises en compte.*



---

## Analyse: fonctions d'une variable réelle (17 pts)

---

Étant donné les fonctions suivantes:

$$f(x) = 7 - x^2; \quad g(x) = \ln(4 - 2x); \quad h(x) = \sqrt{x^3 + 27};$$

1.1 Quel est le domaine de définition des fonctions:  $I(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$  et  $(g \circ f)(x)$  ? (4 pts)

1.2 Trouver les extrema globaux de la fonction  $h(x)$  sur son domaine de définition. (2 pts)

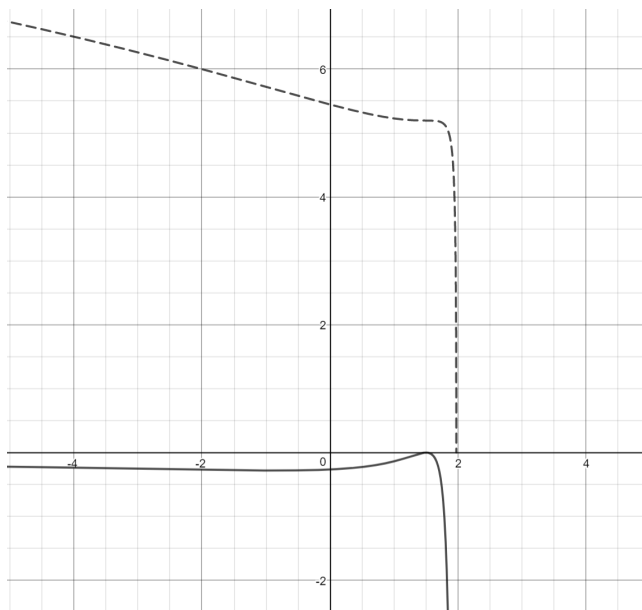
1.3 Combien de points d'inflexion y a-t-il pour la fonction  $g(x)$  ? (2 pts)

1.4 Pour chacune des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$ , trouver sa fonction inverse si elle en possède une. (4 pts)

1.5 Résoudre les équations suivantes pour  $x$ : (4 pts)

$$2^{f(x)} = 64; \quad \ln(f(x)) - \ln(2x + 4) = 0;$$

1.6 L'une des courbes ci-dessous est le graphe de la fonction  $(h \circ g)(x)$ , et l'autre est le graphe de sa dérivée  $(h \circ g)'(x)$ . Identifier chacune d'entre elles. (1 pts)



---

## Algèbre Linéaire (11 pts)

---

2.1 Soit le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \beta z = 3 \\ x + \beta y + 3z = 2 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de  $\beta$  de telle sorte que ce système d'équations possède: (5 pts)

- a) aucune solution;
- b) une solution unique;
- c) une infinité de solutions.

2.2 Soient les matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver une matrice  $\mathbf{C}$  telle que  $\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - \mathbf{C} = \mathbf{0}$ . (2 pts)

2.3 Calculer  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  dans la relation suivante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité. (2 pts)

2.4 Calculer, si possible, l'inverse de la matrice suivante: (2 pts)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

---

## Applications (22 pts)

---

3.1. Les organisateurs d'un festival au bord du lac de Neuchâtel ont prévu des concerts tout au long de l'été 2019. Ils proposent aux festivaliers trois offres différentes selon les modèles ci-dessous:

- **Offre 1:** L'entrée de chaque concert est à 39 Frs.
- **Offre 2:** Une carte fidélité d'un coût de 50 Frs. qui permet l'entrée aux concerts pour 15 Frs.
- **Offre 3:** Un pass à 139 Frs. qui permet d'entrer librement aux concerts proposés.

a) Illustrez les trois offres par un graphique. (3 pts)

b) Déterminez par calcul, en fonction du nombre de concerts, quelle offre est la plus avantageuse. (3pts)

3.2. L'entreprise de haute horlogerie biennoise Epsilon souhaite lancer sur le marché une montre qui peut être commandée uniquement à travers leur site web, sans intermédiaires. Le management de cette entreprise a lancé une étude de marché, dont les résultats ont montré que la demande  $n$  de telles montres en fonction du prix unitaire  $p$  de ces dernières peut être illustrée par la relation

$$n = 4500 - 3p$$

Par ailleurs, pour le lancement de cette nouvelle montre, cette entreprise doit prévoir des coûts fixes de 75'000 francs, ainsi que des coûts nets de production s'établissant à 600 francs par montre fabriquée.

- a) Exprimez le bénéfice (chiffre d'affaire – coûts) de Epsilon dégagé par la commercialisation de la montre en fonction de la variable  $p$  prix de vente qui sera choisi. (3 pts)
- b) Quel prix Epsilon devra-t-elle fixer pour ses montres si elle veut maximiser le bénéfice ? (3 pts)
- c) Combien de montres seront-elles vendues à ces conditions? (2 pts)
- d) Quel sera le bénéfice ainsi dégagé? (1 pts)

3.3. Le marché des vélos depuis quelques années vit une petite révolution, en partie, liée à l'apparition des vélos électriques. Pour le fabricant VIKIbike, la part de recettes  $P(t)$  que représentent les vélos électriques par rapport à l'ensemble des recettes est donnée par la relation suivante

$$P(t) = \frac{3 - e^{-0,4t}}{7}$$

dans laquelle  $t$  est exprimé en années à compter de début 2016 ( $t = 0$  en début 2016).

- a) Quelle part représentaient les vélos électriques au début de 2019 ? (1 pts)
- b) À partir de quand les vélos électriques assureront-ils 40% des recettes totales de VIKIbike ? (4 pts)
- c) Sur le très long terme, quelle part des recettes totales proviendra des vélos électriques ? (2pts)

---

## Solutions

---

---

### Analyse

---

- 1.1
- $I(x) = \frac{\ln(4-2x)}{7-x^2}$ , il faut:  $(4-2x > 0)$  et  $(7-x^2 \neq 0)$  alors  $D_I = ]-\infty, 2[ \setminus \{-\sqrt{7}\}$
  - $(g \circ f)(x) = \ln(2x^2 - 10)$   
il faut:  $2x^2 - 10 > 0 \implies D_{(g \circ f)} = ]-\infty, -\sqrt{5}[ \cup ]\sqrt{5}, \infty[$
- 1.2  $h'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+27}}$ ;  $f'(x) = 0$  quand  $x = 0$ ; En consultant le signe de  $f'(x)$  avant et après  $x = 0$  on voit que le point  $(0, 3)$  ne s'agit pas d'un point extrême (Ou, alternativement, on peut vérifier que  $f''(0) = 0$ ).  
Pour  $x = -3$ :  $(-3, 0)$  est un minimum global de la fonction (étant donné que  $f'(x) \geq 0$  sur tout le domaine de définition de  $f(x)$ ).
- 1.3  $g''(x) = \frac{-1}{(2-x)^2}$  Pas de solution pour  $g''(x) = 0$ ; par contre:  $g''(x)$  n'est pas définie pour  $x = 2$ .  
mais comme  $x = 2 \notin D_g = ]-\infty, 2[$ ; La fonction  $g(x)$  n'a aucun point d'inflexion.
- 1.4
- La fonction  $f(x)$  n'est pas injective, alors elle ne possède pas de fonction inverse.
  - $g^{-1}(x) = \frac{4-e^x}{2}$
  - $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2 - 27}$
- 1.5
- $2^{f(x)} = 64 \implies 2^{7-x^2} = 2^6 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$
  - $\ln(f(x)) - \ln(2x+4) = 0 \implies \ln(7-x^2) - \ln(2x+4) = 0 \implies \ln\left(\frac{7-x^2}{2x+4}\right) = 0 \implies \frac{7-x^2}{2x+4} = 1 \implies x^2 + 2x - 3 = 0 \implies x \in \{-3, 1\}$  Comme  $\ln(2x+4)$  n'est pas définie pour  $x = -3 \implies$  la seule solution pour l'équation est  $x = 1$ .
- 1.6 La courbe pointillée est le graphe de la fonction  $(h \circ g(x))$  et la courbe continue est le graphe de sa dérivée.

---

### Algèbre Linéaire

---

- 2.1
- a)  $\beta = -3$
  - b)  $\beta \neq -3$  et  $\beta \neq 2$
  - c)  $\beta = 2$

2.2  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

2.3  $a = 4, b = -\frac{3}{2}, c = -1$  et  $d = \frac{1}{2}$

2.4 Le déterminant de  $\mathbf{A}$  est nul, donc  $\mathbf{A}^{-1}$  n'existe pas.

---

### Applications

---

- 3.1 Les trois fonction  $y_A = 39x$ ;  $y_B = 15x + 50$ ;  $y_C = 139$  sont représentées dans la figure ci-dessous:



Figure 1: Les trois fonctions.

Pour un ou deux concerts, c'est l'offre 1 qui est la plus avantageuse. Pour 3, 4, ou 5 concerts c'est l'offre 2, et à partir de 6 concert le forfait à 139 frs est la solution la plus avantageuse.

3.2 a)  $B(p) = -3p^2 + 6300p - 2775000$

b) Le prix à fixer sera de 1'050 Frs.

c) A ce prix, 1350 montres seront vendues

d) Le bénéfice sera de 532'500 Frs.

3.3 a)  $P(3) \simeq 0,3855$ , donc en 2019 la part de vélo électrique était de 38,55% copies.

b) On a  $P(4) \simeq 0,399$ , donc la part de vélo électrique représentera 40% déjà en 2020.

c) On a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{3}{7} \simeq 0,428$$

donc sur le long terme, la part de vélo électriques sera d'environ 42,8%.