Université de Neuchâtel
Faculté de Sciences économiques

Mathématiques appliquées II
Session d'examens: Juin 2018
Date: 06.06.2018
Durée: 2 heures
Total: 40 points

professeur: Giuseppe Melfi

Nom et Prénom: ....

Notes

Document autorisé : Une feuille format A4 recto/verso de notes personnelles. Aucune autre documentation ni dispositif électronique ne sont autorisés.

Calculatrice : Autorisée

Vos copies, la donnée et les brouillons doivent être rendus ensemble et agrafés par le surveillant à l'issue du temps imparti. N'oubliez pas d'écrire votre nom sur chaque feuille.

***Toutes les réponses doivent être justifiées par les calculs ou des arguments adéquats** et rédigées sur des feuilles séparées. Les réponses inscrites sur cette donnée ne seront pas prises en compte.*

Problème 1 (8 pts)

Considerons l'ensemble de vecteurs $S = \left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2k \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} k^3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

a) Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{R}$ l'ensemble S forme une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Étant donné $k \in \mathbb{R}$, lesquels des vecteurs suivants sont **toujours** engendrés par S? Pourquoi?

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2+k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3k^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} k \\ k^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} k^3-3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

Problème 2 (8 pts)

Le management de Hartman Rent-A-Car a alloué un budget de 1,5 million de francs pour acheter une flotte de voitures composée de voitures de type A, voitures de type B et voitures de type C. Les voitures type A coûtent 12 000 frs chacune, les type B 18 000 frs chacune et les type C 24 000 frs chacune. Hartman a besoin d'une flotte qui comprend deux fois plus de voitures de type A que de voitures de type B et d'un total de 100 voitures à acheter.

a) En sachant que le management de Hartman Rent-A-Car utilise tout le budget disponible, formuler un système d'équations linéaires pour déterminer combien de voitures de chaque type seront achetées. Indiquer clairement ce que chaque variable dans votre système représente.

b) Utiliser la règle de Cramer pour trouver la bonne solution.

Problème 3 (10 pts)

Un drone commercial affecté à la livraison de colis effectue un trajet à partir d'une aire de lancement qui occupe l'origine d'un système de coordonnées cartésien. Le plan de vol que le drone effectue est décrit par la fonction $\mathbf{f} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{f}(t) = (4t,\ 3t,\ 10t^2(1-t)^2)$$

Ici, t représente le temps en heures à compter du départ du drone; les deux premières composantes représentent les coordonnées du drone dans la direction EST et dans la direction NORD par rapport à l'aire de lancement du drone, et la troisième composante représente l'altitude du drone. Toutes les coordonnées représentent des kilomètres.

a) Quelle a été l'altitude maximale du drone?

b) Calculer le vecteur vitesse $\mathbf{f}'(t)$

c) Quelle a été la vitesse maximale du drone ?

d) Après une heure le drone arrive à sa destination. À combien de kilomètres du point de départ se trouve-t-il?

Problème 4 (14 pts)

L'entreprise Chokki produit des barres chocolatées pour le marché suisse, italien et brésilien. Les fonctions demande pour chacun de ces trois pays sont respectivement

$$q_1 = 1,1 - p_1$$
$$q_2 = 1,6 - 2p_2$$
$$q_3 = 2,4 - 6p_3$$

où p_i représente le prix en francs suisses de la barre chocolatée au pays i et q_i représente le nombre de barres chocolatées en millions vendues au pays i. La production des barres chocolatées coûte à Chokki 10 centimes par barre chocolatée.

a) Ecrire le bénéfice de Chokki en fonction des trois variables p_1, p_2 et p_3.

b) Quel est le bénefice aux prix $p_1 = 0,50$, $p_2 = 0,50$ et $p_3 = 0,30$?

c) Par rapport au scenario b), estimer à l'aide de la différentielle la variation du bénefice si p_1 augmente de $0,01$ francs et p_3 diminue de $0,02$ francs.

d) Prouver que l'Hessienne de la fonction bénéfice est définie négative.

e) Quel serait les prix de vente des barres chocolatées dans chacun de ces pays afin de maximiser le bénéfice de Chokki?

f) Quel serait dans ce cas le bénéfice maximal de Chokki?

Solutions Problème 1

a) $det\begin{pmatrix} -1 & 2 & k^3 \\ 2 & 2k & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2k^3 - 2k.$

Pour $k \in \{-1, 0, 1\}$ les vecteurs de S sont linéairement dependants et alors pour que S forme une base de $\mathbb{R}^3$, il faut que $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

b) $\vec{v_1} = \vec{v} - (k)\ \vec{u}$

$\vec{v_4} = \vec{w} + (3)\ \vec{u}$

$\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ ne sont pas (toujours) engendrés par S car pour $k = 1$ la matrice 3×4 formée par $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{v_2}$ comme aussi la matrice formée par $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{v_3}$ a rang 3, tandis que la matrice 3×3 formée par $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ a rang 2.

Solutions Problème 2

a) x = nombre de voitures type A; y = nombre de voitures type B; z = nombre de voitures type C.

$$\begin{cases} 12x + 18y + 24z = 1500 \\ x - 2y = 0 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

b) Cramer: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Où $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{b} = (1500, 0, 100)$ et $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & 18 & 24 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$x = \frac{|B_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1500 & 18 & 24 \\ 0 & -2 & 0 \\ 100 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 18 & 24 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1800}{30} = 60$$

$$y = \frac{|B_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1500 & 24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 100 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 18 & 24 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{900}{30} = 30$$

$$z = \frac{|B_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 18 & 1500 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 100 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 18 & 24 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{300}{30} = 10$$

Solutions Problème 3

a) L'altitude est donnée par la troisième coordonnée. Donc puisque $10t^2(1-t)^2$ est 10 fois le carré de la fonction $t(1-t)$ qui représente une parabole avec sommet en $t = 0,5$, le maximum de l'altitude est atteint pour $t = 0,5$ et vaut donc

$$z_{\max} = 10 \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^2 = 0,625.$$

L'altitude maximale a été donc de 625 mètres.

b) Le vecteur vitesse est donné par la dérivée de f, et précisément:

$$f'(t) = (4, 3, 20t(1-t)^2 - 20t^2(1-t)) = (4, 3, 20t(1-t)(1-2t))$$

c) Puisque le drone se deplace a vitesse constante le long de la direction est et nord ($x'(t) = 3$, et $y'(t) = 4$), la vitesse sera maximale lorsque le drone aura atteint la vitesse verticale la plus elevée. La vitesse verticale est donnée par

$$z'(t) = 20t - 60t^2 + 40t^3.$$

Son maximum est atteint lorsque $z''(t) = 0$, c'est-à-dire lorsque

$$120t^2 - 120t + 20 = 0.$$

Cette équation a comme solution

$$t = 0,5 \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \simeq 0,5 \pm 0,289.$$

La vitesse verticale la plus élévée est donc de

$$z'_{\max} \simeq 20 \cdot 0,211 - 60 \cdot 0,211^2 + 40 \cdot 0,211^3 \simeq 1,9245.$$

La vitesse maximale sera donc de

$$\max\{\|f'(t)\|\} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1,9245^2} \simeq 5,35 \text{ km/h}.$$

d) Le point de destination se trouve à la position $P(3, 4, 0)$, qui par rapport à la position $O, (0, 0, 0)$ se trouve 5 km de distance. En effet en applicant la formule de distance euclidienne entre deux points on a

$$d(O, P) = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2 + (0-0)^2)} = 5$$

.

Solutions Problème 4

a) La fonction bénéfice, exprimée en millions, est:

$$B(p_1, p_2, p_3) = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 - 0,1(q_1 + q_2 + q_3)$$

qui s'écrit:

$$B(p_1, p_2, p_3) = p_1(1,1 - p_1) + p_2(1,6 - 2p_2) + p_3(2,4 - 6p_3) - 0,51 + 0,1p_1 + 0,2p_2 + 0,6p_3$$

b) Si $p_1 = p_2 = 0,5$ et $p_3 = 0,3$, alors le bénéfice est:

$$B(0{,}5; 0{,}5; 0{,}3) = 0,6$$

donc 600'000 francs

c) On a:

$$\frac{\partial B}{\partial p_1} = 1,2 - 2p_1$$
$$\frac{\partial B}{\partial p_2} = 1,8 - 4p_2$$
$$\frac{\partial B}{\partial p_3} = 3 - 12p_3$$

Donc $dB = (-2p_1 + 1,2)dp_1 + (-4p_2 + 1,8)dp_2 + (-12p_3 + 3)dp_3$ ce qui veut dire que pour $dp_1 = 0,01$ et $dp_3 = -0,02$ on a

$$dB = 0,014$$

qui correspondent à une amélioration du bénéfice de 14'000 francs.

d) La matrice Hessienne est donc

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

et celle-ci est clairement définie négative.

e) La fonction B possède un extremum au point $(0,60; 0,45; 0,25)$, qui pour le point d) est un maximum. Le prix de vente en Suisse est de 60 centimes; en Italie de 45 centimes et au Brésil de 25 centimes.

f) A ces prix là, le bénéfice est de 0,63 millions de francs.