Université de Neuchâtel
Faculté de Sciences économiques

Mathématiques appliquées II
Session d'examens: Août - Septembre 2018
Date: 29.08.2018
Durée: 2 heures
Total: 40 points

professeur: Giuseppe Melfi

Nom et Prénom: ....

Notes

Document autorisé : Une feuille format A4 recto/verso de notes personnelles. Aucune autre documentation ni dispositif électronique ne sont autorisés.

Calculatrice : Autorisée

Vos copies, la donnée et les brouillons doivent être rendus ensemble et agrafés par le surveillant à l'issue du temps imparti. N'oubliez pas d'écrire votre nom sur chaque feuille.

***Toutes les réponses doivent être justifiées par les calculs ou des arguments adéquats** et rédigées sur des feuilles séparées. Les réponses inscrites sur cette donnée ne seront pas prises en compte.*

Problème 1 (8 pts)

1. Écrivez l'équation non-paramétrique du plan suivant: (4 pts)

$$\mathbf{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Considerons l'ensemble de vecteurs $S = \left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ h-2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} h \\ -2 \\ h \end{pmatrix} \right\}$

   a) Pour $h = 0$, les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils linéairement independants ? (2 pts)

   b) Pour quelles valeurs de $h \in \mathbb{R}$ l'ensemble S forme une base de $\mathbb{R}^3$? (2 pts)

Problème 2 (8 pts)

Un producteur de souvenirs souhaite produire trois types de souvenirs: types A, B et C. Pour la production de chaque souvenir de type A, il nécessite 2 minutes sur une première machine, 1 minute sur une deuxième machine et 2 minutes sur une troisième machine. Chaque souvenir de type B nécessite 1 minute sur la première machine, 3 minutes sur la deuxième machine et 1 minute sur la troisième machine. Chaque souvenir de type C nécessite 1 minute sur la première machine et 2 minutes sur chacune des deux autres machines. Le producteur dispose de 3 heures au total sur la première machine, 5 heures sur la deuxième machine, et 4 heures sur la troisième machine pour le traitement de la commande.

a) En sachant que le producteur utilise tout le temps disponible, formulez un système d'équations linéaires pour déterminer combien de souvenirs de chaque type il peut produir. Indiquez clairement ce que chaque variable dans votre système représente. (4 pts)

b) Par une méthode de votre choix, déterminez la solution du système linéaire ainsi trouvé. (4 pts)

Problème 3 (10 pts)

Une compagnie de croisières offre deux types de crosières d'une semaine: une cabine standard vendue à un prix p_S, et une cabine Gold vendue à un prix p_G qui en plus offre aussi l'accès à l'espace détente et à l'espace fitness pendant toute la durée de la croisière. Pour chacune de ces offres la fonction de demande (nombre de reservations Standard et Premium q_S et q_G qui pourraient se vendre selon le prix de vente) s'exprime par les fonctions;

$$q_S = 2000 - p_S$$

$$q_G = 500 - 0,2p_G$$

Les coûts d'exploitation du paquebot s'élèvent à

$$C(q_S, q_G) = 500'000 + 50q_S + 100q_G$$

Tous les prix sont en Francs.

a) Ecrire la fonction bénéfice, définie comme étant les recettes de la vente des deux catégories de crosières moins les coûts d'exploitation, et l'exprimer comme fonction des deux variables p_S et p_G. (3 pts)

b) A quel prix ces deux catégories de croisières seront proposées au public afin de maximiser le bénéfice de la société ? Justifiez votre réponse. (4 pts)

c) Combien de croisières seront vendues dans les deux catégories ? (2 pts)

d) Quel sera le bénéfice que la compagnie tirera de la vente de ses croisières ? (1 pts)

Problème 4 (14 pts)

Dans une région approximativement carrée de 4 km de côté centrée autour du centre ville de Marse-sur-mer le relief topographique est décrit par la fonction

$$f(x,y) = -0,03 \cdot (x^4 - 4x^2 + y^4 - 4y^2).$$

Ici x,y ainsi que l'altitude $f(x,y)$ est exprimé en kilomètres. Une course à pied se deroule avec point de départ le point $(-2,-2)$ et comme point d'arrivée le point $(2,2)$. La durée prévue est d'une heure et le parcours prévu est décrit par les coordonnées $x(t) = 4t - 2$ et $y(t) = 4t - 2$ pour $t \in [0,1]$.

a) Quelle est l'altitude du point de départ ? et d'arrivée ? (4 pts)

b) Après combien de temps est-il prévu de passer par le centre ville, situé à l'origine du système de coordonnées ? (2 pts)

c) Exprimez l'altitude prévue pour un coureur en fonction du temps t écoulé depuis le départ. (4 pts)

d) Quelle est l'altitude maximale que les coureurs atteignent ? (4 pts)

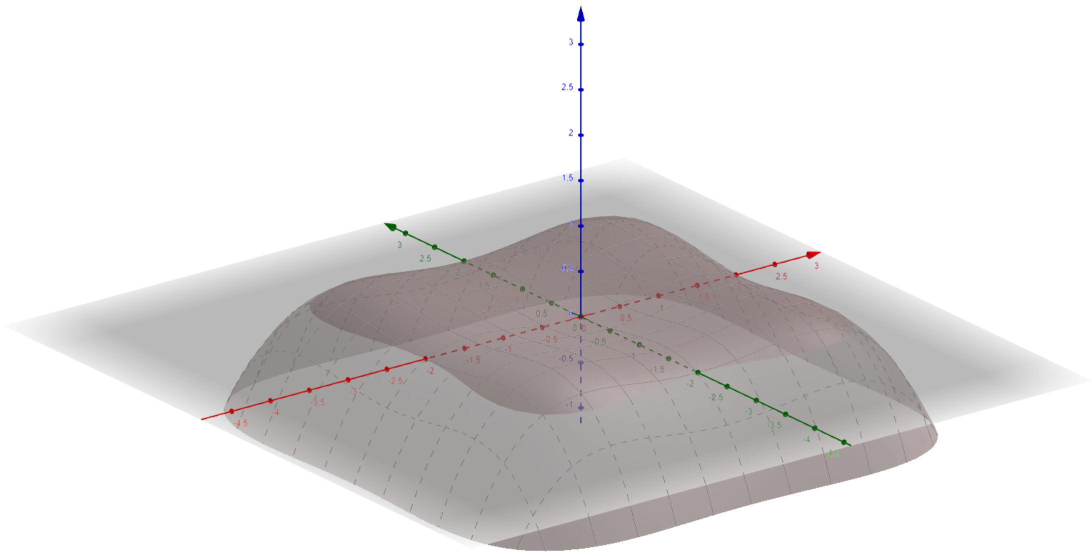

Figure 1: $f(x,y) = -0,03 \cdot (x^4 - 4x^2 + y^4 - 4y^2)$.

Solutions Problème 1

1.
$$x = 1 + 2t$$
$$y = 2 + s$$
$$z = t + 3s$$

De la première équation: $t = \frac{x-1}{2}$ et de la deuxieme: $s = y-2$, $\implies$ dans la troisième: $x+6y-2z-13 = 0$

2. a) pour $h = 0$, $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -4 \neq 0 \implies$ les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement independants.

   b) L'ensemble S forme toujours une base de $\mathbb{R}^3$ car $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -h^2 - 4 \neq 0$ pour toutes les valeurs de $h \in \mathbb{R}$.

Solutions Problème 2

x = nombre de souvenirs type A; y = nombre de souvenirs type B; z = nombre de souvenirs type C.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 180 \\ x + 3y + 2z = 300 \\ 2x + y + 2z = 240 \end{cases}$$

Avec Cramer: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Où $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{b} = (180, 300, 240)$ et $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$x = \frac{|B_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 180 & 1 & 1 \\ 300 & 3 & 2 \\ 240 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{180}{5} = 36$$

$$y = \frac{|B_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 180 & 1 \\ 1 & 300 & 2 \\ 2 & 240 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{240}{5} = 48$$

$$z = \frac{|B_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 180 \\ 1 & 3 & 300 \\ 2 & 1 & 240 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{300}{5} = 60$$

Avec Matrice Inverse: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}b}$.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}b} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 180 \\ 300 \\ 240 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -1/5 & -1/5 \\ 2/5 & 2/5 & -3/5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 180 \\ 300 \\ 240 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 48 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Solutions Problème 3

Solution

a) Si y est le bénéfice de la vente des croisières, on aura:

$$y = p_S q_S + p_G q_G - C(q_S, q_G)$$

Si on remplace q_S et q_G par leurs expressions en fonction de p_S et p_G on aura:

$$y = -p_S^2 - 0,2p_G^2 + 2050p_S + 520p_G - 650'000$$

b) La fonction bénéfice possède un point stationnaire lorsque $\partial y/\partial p_S = -2p_S + 2050 = 0$ et $\partial y/\partial p_G = -0,4p_G + 520 = 0$. Ceci donne $p_S = 1025$ et $p_G = 1300$. Puisque

$$\frac{\partial^2 y}{\partial p_S^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial p_G^2} = -0,4 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial p_G \partial p_S} = 0,$$

la matrice Hessienne:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0,4 \end{bmatrix}$$

est définie négative, donc le point stationnaire trouvé ci-dessous est bien un point de maximum. Les deux catégories de croisières seront donc vendues à 1025 Frs et 1300 Frs respectivement.

c) Le nombre de croisières vendues sera alors de $2000-1025 = 975$ pour la cabine standard et $500-0,2\cdot 1300 = 240$ pour la cabine Gold.

d) Le bénéfice de la compagnie sera alors de

$$y_{\max} = 975 \cdot 1025 + 240 \cdot 1300 - 500'000 - 50 \cdot 975 - 100 \cdot 240 = 738'625 \text{ Frs}.$$

Solutions Problème 4

a) Le point de départ se situe au coordonnées $A(-2;-2)$, donc puisque $f(-2,-2) = f(2,2) = 0$ les points de départ et d'arrivée se trouvent à une altitude nulle (donc au niveau de la mer).

b) Pour $t = 0,5$ on a $x(t) = y(t) = 0$, donc le passage au centre ville de Marse-sur-mer est prévu une demi heure après le départ.

c) Notons que tout au long du parcours $x(t) = y(t)$ et donc $f(x(t), y(t)) = -0,06(x(t)^4 - 4x(t)^2)$. L'altitude en fonction du temps t peut s'exprimer par la fonction composée

$$h(t) = f(x(t), y(t)) = -0,06((4t-2)^4 - 4(4t-2)^2).$$

que l'on peut aussi écrire

$$h(t) = -15,36t^4 + 30,72t^3 - 19,2t^2 + 3,84t.$$

d) On a

$$h'(t) = -0,06(16(4t-2)^3 - 32(4t-2))$$

donc $h'(t) = 0$ soit lorsque $t = 0,5$, soit lorsque $(4t-2)^2 = 2$. Dans le premier cas, le coureur passe par le centre ville qui est sur le niveau de la mer. Dans le deuxième cas, si $(4t-2)^2 = 2$ alors $h(t) = -0,06(2^2 - 4\cdot 2) = 0,24$. Donc l'altitude maximale de course est à 240 mètres sur le niveau de la mer.