Lycée Jean-Piaget ESND
Mathématiques
Nom : ....
Prénom : ....

corrigé

2M12
TE n. 3

tot. /47

*Rédigez ce travail au stylo. La calculatrice est autorisée. Les détails de vos calculs sont **exigés**.*
Une réponse qui ne les fournit pas, aussi correcte soit-elle, ne sera pas prise en considération.

Exercice 1 (8 POINTS)

Soit $f(x) = x^2 - 5x + 3$ et $x_0 = 3$.

Calculez la valeur de $f'(3)$ avec la méthode en 5 étapes.

1) $f(3) = 9 - 15 + 3 = -3$ 1

2) $f(3+h) = (3+h)^2 - 5(3+h) + 3 = 9 + 6h + h^2 - 15 - 5h + 3 =$
$= h^2 + h - 3$ 3

3) $f(3+h) - f(3) = h^2 + h - 3 - (-3) = h^2 + h$ 1

4) $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \dfrac{h^2+h}{h} = \dfrac{h(h+1)}{h} = h+1$ 2

5) $\lim\limits_{h \to 0} (h+1) = 1 \Rightarrow f'(3) = 1$ 1

Exercice 2 (22 POINTS)

Déterminez, à l'aide des règles de dérivation, l'équation de la dérivée des fonctions suivantes.
Donnez la réponse sous la forme réduite (au maximum).

1. $f(x) = 16x - \frac{1}{5}$

$f'(x) = 16$ (1

2. $f(x) = 6x^4 - \frac{1}{4}x^8 + 3^5$

$f'(x) = 24x^3 - 2x^7 = 2x^3(12 - x^4)$ (2

3. $f(x) = \sqrt[3]{x} - 12\sqrt[4]{x^3} = x^{1/3} - 12x^{3/4}$

$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 12 \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{9}{\sqrt[4]{x}}$. (4

4. $f(x) = \left(9x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(x)$

$f'(x) = 9\sin(x) + \left(9x + \frac{\pi}{4}\right)\cos x$. (3

5. $f(x) = (8x - 2x^7)^5$

$f'(x) = 5(8x - 2x^7)^4 \cdot (8 - 14x^6) = 10(4 - 7x^6)(8x - 2x^7)^4$. (3

6. $f(x) = \sqrt{\cos(3x - \frac{\pi}{5})}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\cos(3x - \pi/5)}} \cdot \left(-\sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)\right) \cdot 3 = -\frac{3\sin(3x - \pi/5)}{2\sqrt{\cos(3x - \pi/5)}}$

7. $f(x) = \frac{-5x + x^2 + 2}{x^2 + 4x - 1}$

(4

$$f'(x) = \frac{(2x-5)(x^2+4x-1) - (x^2-5x+2)(2x+4)}{(x^2+4x-1)^2} =$$

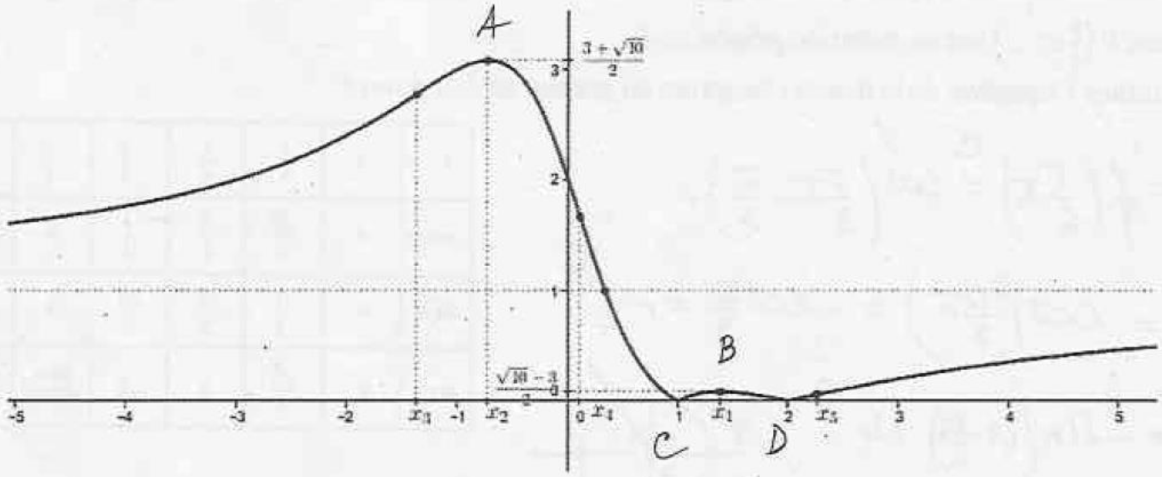
$$= \frac{2x^3 + 8x^2 - 2x - 5x^2 - 20x + 5 - 2x^3 - 4x^2 + 10x^2 + 20x - 4x - 8}{(x^2+4x-1)^2} =$$

(5

$$= \frac{9x^2 - 6x - 3}{(x^2+4x-1)^2}$$

Exercice 3 (8 points)

Voici le graphe d'une fonction f.



Par lecture du graphe, donnez précisément (valeurs exactes) les informations suivantes:

1. Ensemble de définition de f; $\mathbb{R}$ (1
2. Les coordonnées de tous les points de maximum et de minimum ;
3. Le tableau de croissance.

Max : $A\left(x_2 ; \frac{3+\sqrt{10}}{2}\right)$
$B\left(x_1 ; \frac{\sqrt{10}-3}{2}\right)$

Min : $C(1;0)$ (4

$D(2;0)$

x		x_2		1		x_1		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+
f	↗	Max A	↘	Min C	↗	Max B	↘	Min D	↗

(3

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction d'équation : $y = f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 20.$.

Dressez son tableau de croissance (montrez tous les détails des calculs).

$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x - 6 = 2x^2 + x - 6$ (1

$f'(x) = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} = \begin{cases} -2 \\ +3/2 \end{cases}$ (2

$f'(x) > 0$ -2 3/2

x		-2		$3/2$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
f	↗	Max	↘	Min	↗

(3

Exercice 5 (9 points)

Soit f la fonction représentée par le graphe ci-dessous et d'équation : $y = f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Le point $P\left(\frac{5}{6}\pi; \ldots\right)$ est un point du graphe de f.

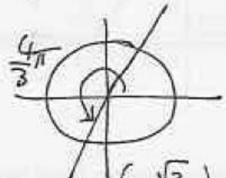
Déterminez l'équation de la droite t tangente au graphe de f au point P.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie	0	0

$y_P = f\left(\frac{5}{6}\pi\right) \overset{1}{=} \cos\left(\frac{5}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$

$= \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ 2

$f'(x) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot 2$ 2



$m_t = f'\left(\frac{5}{6}\pi\right) \overset{1}{=} -2\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$ 2.

$t: y - \left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\left(x - \frac{5}{6}\pi\right) \overset{1}{\Rightarrow} t: y = \sqrt{3}x - \frac{5\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{1}{2}$.

BONUS (3 points)

Dessinez la droite t sur le graphe ci-dessous.